U N I V E R S I T E T I   I   K O S O V Ë S

Dr. JOSIP MOSER ● Dr RASIM BEJTULLAHU

HYRJE NË FIZIKË TEORIKE

ENTI I TEKSTEVE DHE I MJETEVE MËSIMORE
I KRAHINËS SOCIALISTE AUTONOME TË KOSOVËS
P R I S H T I N Ë

Recensentë:

Dr. Ljiljana Janiçijeviq, prof. FSHNM, Shkup
Mr. inxh. Zija Leshi, doc. në FSHNM, Prishtinë
Dr. Jahja Kokaj, doc. në FSHNM, Prishtinë

Redaktor biblioteke
Tafil Morina, prof.

Me vendimin e Pleqësisë së Universitetit nr. 3049 të datës 20. 12. 1979, lejohet të përdoret si tekst universitar.

Në bazë të mendimit të Sekretariatit Krahinor për Arsim, Shkencë e Kulturë me vendimin 04 nr. 4134/77, ky tekst lirohet nga tatimi në qarkullim.

PARATHËNIE

Ky tekst përmban dy kurse të përgjithshme teorike. Pjesa e parë, MEKANIKA TEORIKE iu dedikohet studentëve të fizikës së vitit të dytë të studimeve, ndërsa pjesa e dytë, ELEKTRODINAMIKA studentëve të vitit të tretë. Teksti është përpiluar duke u bazuar në plan-programin e studimeve të fizikës pranë FSHM Natyrore në Prishtinë, por në vetveti përmban edhe disa kapituj të cilët iu dedikohen lexuesve tjerë të cilët dëshirojnë t'i zgjerojnë dituritë nga fizika apo t'i vazhdojnë studimet posuniversitare.

Në tërë tekstin i kemi qëndruar besnik metodës së shpjegimit induktiv. Mendojmë se kjo metodë është më e lehtë që të kuptohet nga lexuesi i cili për herë të parë i zgjeron dituritë e veta teorike. Gjatë tërë shpjegimit të materialit janë dhënë plotësime nga matematika, por është përdorur ai aparat i cili për lexuesin është më i afërt dhe të cilin e dëgjon në kurset e analizës matematike I dh II. Besojmë se këtu plotësisht ia kemi arrijtur qëllimit.

Vazhdimisht kemi pasur parasysh lidhmërinë e teorisë me eksperimentin, sepse paraqesin një tërësi të pandarë. Fundi i fundit gjithmonë fjalën e fundit e jep eksperimenti, ndërsa lexuesi të cilit i dedikohet, ende është i orientuar për hulumtim teorik apo eksperimental.

Tërë materiali është ndarë në XXII kapituj dhe në një shtesë matematike vendin e së cilës nuk e gjetëm gjatë shpjegimit. Në këtë shtesë kemi dhënë elementet e analizës vektoriale të vlefshme për kuptimin e tekstit si dhe zhvillimin e operatorëve në koordinata të vijëpërkulta. Materiali është shkruar në sistemin ndërkombëtar SI.

Emërtimi i shprehjeve është dhënë vetëm me një numër. Kapitujt i kemi shënuar me numra romakë, ndërsa mësimet dhe shprehjet me numra tjerë. Nëse bazohemi në ndonjë shprehje e cila ka të bëjë me të njëjtin mësim, atëherë është shënuar vetëm numri rendor i saj, meqë çdo mësim fillon nga numri një. Por, nëse kërkojmë shprehjen në ndonjë mësim të mëparshëm, atëherë së pari shënohet numri i kapitullit, pastaj numri i mësimit në të dhe më në fund numri rendor i saj në atë mësim.

Jemi të bindur, se në tekst nuk ka gjetur vend tërë materiali i cili ceket në literaturë nga lëmenjtë e shtjelluar. E dijmë se këtu është dhënë vetëm një minimum i tij.

Të gjithë lexuesve të cilët mund të na bëjnë vërejtje objektive për gabimet e lëshuara iu jemi mirënjohës.

Autorët

PJESA E PARË

MEKANIKA TEORIKE

I. LËVIZJA E PIKËS MATERIALE

1. DEFINICIONI I PIKËS MATERIALE

Pikë materiale e quajmë trupin fizik, dimensionet e të cilit mund t'i mos përfillim në procesin e shqyrtimit të lëvizjes së tij. Kur i çmojmë dimensionet e tij, që të mund ta mendojmë si pikë materiale, duhet ta krahasojmë me dimensionet e hapësirës nëpër të cilën ai lëviz. Kështu, në bankën laboratorike, në hapësirë prej një m^3, si pikë materiale mud ta mendojmë sferën prej disa mm, ndërsa në hapësirën e dhomës së laboratorit si pikë materiale mund ta mendojmë edhe trupin me vëllim prej disa cm^3. Në hapësirën e Galaktikës sonë edhe Tokën mund ta mendojmë si pikë materiale.

Do të mendojmë se pika materiale i ka të gjitha vetitë e trupit fizik. Përderisa pika gjeometrike është vetëm element i hapësirës pa kurrfarë vetish fizike, pika materiale i ka të gjitha vetitë e trupit me dimensione të caktuara.

Studimi i mekanikës, zakonisht fillon me shqyrtimin e lëvizjes së pikës materiale, sepse lëvizja e saj është ndër më të thjeshtat ndaj lëvizjeve të trupave me dimesione të caktuara. Përveç kësaj, çdo trup mund ta zbërthejmë në pjesë përbërse të vogla, të cilat mund t'i mendojmë si pika materiale dhe kësisoji lëvizja e trupave mund të interpretohet si lëvizje e grumbullit të pikave materiale.

2. SHPEJTËSIA DHE NXITIMI

a) Definicioni i shpejtësisë

Të mendojmë se pika materiale lëviz nëpër një vijë të lakuar. Në përgjithësi kjo vijë mund të jetë një lakore në hapësirë, kurse në raste të veçanta të lëvizjes mund të qëndrojë në një rrafsh. Vijën e lakuar nëpër të cilën lëviz pika materiale e quajmë rrugë të saj.

Pozita e pikës materiale mund të përcaktohet me ndihmën e vektorit të pozitës. Këtë vektor do ta shënojmë me $\vec{r}$. Ky vektor fillon nga një pikë arbitrare dhe përfundon aty ku gjendet pika materiale. Le të gjendet pika materiale në kohën t në pozitën A. Pozitën e kësaj pike e përcakton vektori i pozitës $\vec{r}(t)$. Kur pika materiale lëviz, atëherë do të ndërrojë edhe vektori i pozitës. Kuptojmë se ky vektor varet prej kohës t. Lëvizja do të jetë e njohur kur dijmë varshmërinë funksionale të vektorit të pozitës sipas kohës.

Pas një kohe shumë të shkurtër Δt, pika materiale do të gjendet në pozitën B, e cila është shumë afër pikës A. Për të kuptuar marrëdhëniet gjeometrike më lehtë në fig. 1 largësia në mes të pikave A dhe B është paraqitur mjaft e zmadhuar. Vektori i pozitës së pikës B do të jetë $\vec{r}(t+\Delta t)$. Ky vektor ndryshon nga vektori $\vec{r}(t)$ edhe për nga intensiteti edhe për nga kahu. Ndërrimi i vektorit të pozitës është vektori i cili bashkon pikat A dhe B. Do ta shënojmë me $\Delta\vec{r}$. Sipas rregullës së zbritjes së vektorëve shohim se vlen

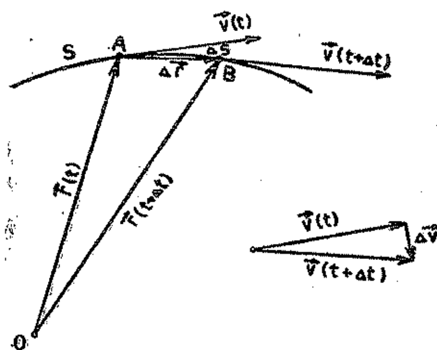


Fig. 1

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

Ky vektor është sekante e rrugës në mes të pikës A dhe pikës B dhe shumë pak ndryshon nga harku në mes të këtyre pikave. Harku Δs është i barabartë me rrugën të cilën do ta kalojë pika materiale gjatë kohës Δt.

Në jetën e përditshme me nocionin shpejtësi kuptojmë rrugën e kaluar në njësi të kohës. Por ky definim nuk është plotësisht i saktë, sepse në përgjithësi në natyrë, pikat materiale nuk kalojnë në të gjitha njësitë e kohës rrugë të njëjta. Për këtë arsye, rrugën e kaluar në njësi të kohës do ta qujmë shpejtësi mesatare të pikës materiale në interval të caktuar të kohës.

Në rastin të cilin po e shqyrtojmë, pika materiale gjatë kohës Δt ka kaluar rrugën Δs. Kur këtë rrugë e pjesëtojmë me kohën Δt, fitojmë shpejtësinë mesatare. Pra,

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1}$$

Në vend të harkut Δs, mund të zëvendësojmë tetivën $\Delta\vec{r}$, e cila shumë

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \tag{2}$$

Tani, intervalin e kohës do ta zvogëlojmë sistematikisht, kështu që në kalimin kufitar $\Delta t \to 0$. Atëherë pika B sistematikisht i afrohet pikës A, kurse sekantja $\Delta\vec{r}$ i afrohet tangjentes së rrugës në pikën A. Në kalimin kufitarë shpejtësia mesatare është e barabartë me shpejtësinë në pikën A. Do të kemi:

$$\vec{v}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} \qquad (3)$$

Formula e fituar na përkujton derivatin e funksionit $\vec{r}(t)$ sipas kohës, prandaj shkruajmë:

$$\vec{v}(t)=\frac{dr(t)}{dt} \qquad (4)$$

Në mekanikë është përvetësuar, që derivatet sipas kohës të shënohen me një pikë mbi ndryshore, prandaj për shpejtësi mund të shkruajmë:

$$\vec{v}=\dot{\vec{r}} \qquad (5)$$

Kuptojmë se shpejtësia e pikës materiale definohet si derivat i parë i vektorit të pozitës sipas kohës. Shpejtësia është madhësi vektoriale dhe gjithmonë e ka kahun e tangjentes në pikë të dhënë të rrugës. Intensiteti i shpetjësisë fitohet duke kryer në formulën (1) kalimin kufitar të përshkruar. Fitojmë:

$$v=\frac{ds}{dt}=\dot{s} \qquad (6)$$

Shprehja e fundit mund të shfrytëzohet, nëse rruga e kaluar është funksion i njohur i kohës.

b) Definicioni i nxitimit

Shpejtësia e pikës materiale gjithashtu varet prej kohës. Pra, shpejtësia ndërron gjatë kohës. Në kohën t, përkatësisht në pikën A të rrugës, shpejtësia e pikës materiale është $\vec{v}(t)$. Pas kohës së shkurtër Δt, kur pika materiale gjendet në pikën B të rrugës së vet, do të ketë shpejtësinë $\vec{v}(t+\Delta t)$. Që të përcaktojmë ndërrimin e shpejtësisë, do t'i bartim vektorët e shpejtësive në pikë të përbashkët ashtu siç shihet në fig. 1. Ky ndërrim do të jetë:

$$\vec{v}=\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)$$

Këtë ndërrim shpejtësie do ta pjesëtojmë me intervalin kohor Δt. Do të fitojmë ndërrimin mesatar të shpejtësisë në njësi të kohës:

$$\vec{a}_m=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t} \qquad (7)$$

Prapë do të kryejmë kalimin kufitar për $\Delta t\to 0$. Fitojmë:

$$\vec{a}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t} \tag{8}$$

Këtë vlerë kufitare e quajmë nxitim të pikës materiale. Ana e djathtë e formulës (8) është identike me formulën e definicionit të derivatit prandaj mund të shkruajmë:

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}}{dt}=\dot{\vec{v}} \tag{9}$$

Shohim se nxitimi është derivati i parë i shpejtësisë sipas kohës. Meqë shpejtësia është derivati i vektorit të pozitës sipas kohës për nxitim mund të shkruajmë:

$$\vec{a}=\ddot{\vec{a}} \tag{10}$$

Pra nxitimi është derivati i dytë i vektorit të pozitës sipas kohës.

c) Zbërthimi i nxitimit në komponente natyrore

Shpejtësia e pikës materiale gjithmonë ka kah të tangjentes në rrugë të lëvizjes. Vektorin unitar në kah të tangjentes do ta shënojmë me $\vec{t}_o$, kurse vektorin e shpejtësisë mund ta shkruajmë si prodhim të këtij vektori dhe intensitetit të saj:

$$\vec{v}=\vec{t}_o v \tag{11}$$

Që të fitojmë nxitimin, shpejtësinë duhet derivuar sipas kohës. Do të kemi:

$$\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\dot{v}\,\vec{t}_o+v\,\dot{\vec{t}}_o \tag{12}$$

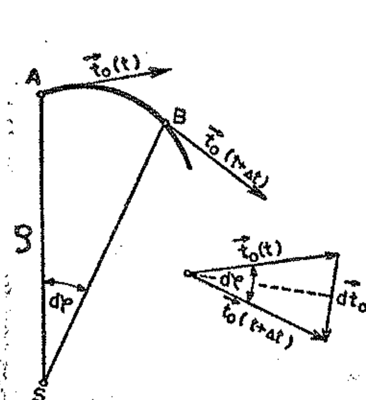


Fig. 2

Vektori $\vec{t}_o$ është vektor me gjatësi konstante, por me kah të ndryshuar. Prandaj ky varet nga koha. Derivatin e tij sipas kohës do ta njehsojmë sipas formulës së derivatit të funksionit të përbër. Në të vërtetë, mund të mendojmë se vektori unitar i tangjentes varet nga harku i rrugës s, kurse ky i fundit nga koha t. Fitojmë:

$$\dot{\vec{t}}_o=\frac{d\vec{t}_o}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=v\,\frac{d\vec{t}_o}{ds} \tag{13}$$

sepse sipas (6) $\frac{dt}{ds}=v$.

Në fig. 2 është vizatuar harku i rrugës në mes të pikave A dhe B, mjaft i zmadhuar. Në këto pika janë vizatuar vektorët unitarë në kahe të tangjenteve: $\vec{t}_o(t)$ dhe $\vec{t}_o(t + \Delta t)$. Normalet në këto tangjente prehen në pikën S. Kjo pikë është qendër e lakueshmërisë së vijës së rrugës në mes të pikave A dhe B. Largësia e kësaj pike nga pika A quhet rreze e lakueshmërisë dhe do ta shënojmë me ρ. Nga vizatimi shohim se vlen:

$$ds = \rho d\varphi \tag{14}$$

Këtu me $d\varphi$ kemi shënuar këndin në pikën S të cilin e mbyllin rrezet e lakueshmërisë në pikat e shqyrtuara të rrugës.

Do t'i bartim vektorët unitarë të tangjenteve në pikë fillestare të përbashkët. Këta dy vektorë gjithashtu mbyllin këndin $d\varphi$, sepse tangjentet janë normale ndaj rrezeve. Ndryshimi i tyre paraqet ndërrimin e vektorit unitar kurse intensitetin $d\vec{t}_o$, e njehsojmë nga trekëndshi i cili ka dy brinjë me gjatësi një njësi dhe këndin në mes tyre $d\varphi$.

$$|d\vec{t}_o| = 2|\vec{t}_o| \sin \frac{d\varphi}{2} = 2 \frac{d\varphi}{2} = d\varphi$$

sepse $|\vec{t}_o| = 1$, kurse sinusi i këndit të vogël është i barabartë me vet këndin. Vektori $d\vec{t}_o$ ka kahun i cili shumë pak ndryshon nga kahu e normales në pikën A të rrugës. Nëse vektorin unitar në kah të normales e shënojmë me $\vec{n}_o$ atëherë do të kemi:

$$d\vec{t}_o = \vec{n}_o |d\vec{t}_o| = \vec{n}_o d\varphi \tag{15}$$

Pjesëtojmë (15) me (14)

$$\frac{d\vec{t}_o}{ds} = \frac{\vec{n}_o}{\rho}$$

Vlerën e fituar e zëvendësojmë në (13), përkatësisht në (12) dhe fitojmë:

$$\vec{a} = \dot{v}\, \vec{t}_o + \vec{n}_o \frac{v^2}{\rho} \tag{16}$$

Shprehja e fituar na tregon se nxitimi mund të zbërthehet në dy komponente. Komponentja e parë e ka kahun e tangjentës në vijë të rrugës dhe quhet komponente tangjentore. Kjo komponente e ka intensitetin

$$a_t=\dot{v}=\frac{dv}{dt} \tag{17}$$

Komponentja tjetër e ka kahun e normales në vijë të lëvizjes. Kjo komponente është e drejtuar kah qendra e lakesës së rrugës. Për këtë, quhet komponente centripetale e nxitimit dhe e ka intensitetin:

$$a_n=\frac{v^2}{\rho} \tag{18}$$

Ky zbërthim i nxitimit në komponente të veta është kryer duke u bazuar në vetitë gjeometrike të rrugës së pikës materiale. Shpesh këto komponente quhen komponente natyrore të nxitimit.

Nga formulat (17) dhe (18) kuptojmë se komponentja tangjentore e nxitimit paraqitet si rezultat i ndryshimit të intensitetit të shpejtësisë kurse ajo centripetale nga ndryshimi i kahut së saj.

Nëse rruga e lëvizjes është e drejtë, atëherë $\rho=\infty$ dhe në formulën (16) mbetet vetëm anëtari i parë. Pra në lëvizjet drejtvizore ekziston vetëm komponentja tangjentore e nxitimit. Nëse te këto lëvizje mbetet i pandryshuar edhe intensiteti i shpejtësisë, atëherë $\dot{v}=0$ dhe nuk do të ketë nxitim fare. Lëvizja e këtillë quhet lëvizje e njëtrajtshme drejtvizore.

Nëse pika materiale lëviz nëpër vijë rrethore me shpejtësi konstante, $\dot{v}=0$ dhe në formulën (16) mbetet vetëm anëtari i dytë. Shihet se kjo lëvizje do të ketë nxitim konstant centripetal me intensitet $\frac{v^2}{\rho}$.

d) Komponentet e shpejtësisë dhe nxitimit në koordinate kënddrejta

Në fizikë njehsimet i kryejmë në ndonjë sistem koordinatash, që marrëdhëniet gjeometrike mund t'i shqyrtojmë në mënyrë analitike. Ndër këto sisteme të koordinatave shpesh përdoret sistemi i koordinatave kënddrejta. Ky sistem përcaktohet me tri drejtëza ndërmjet veti normale të cilat dalin nga një pikë. Kjo pikë quhet qendër kurse drejtëzat, boshte të koordinatave. Vektorët unitarë në kah të boshteve shënohet me $\vec{i}$, $\vec{j}$ dhe $\vec{k}$. Këta vektorë unitarë janë konstantë edhe për nga kahu edhe për nga intensiteti në të gjitha pikat e hapësirës.

Kur vektorin e pozitës $\vec{r}$ të ndonjë pike e zbërthejmë në komponente të tij në kah të boshteve, shohim se këto komponente janë të barabarta me koordinatat x, y dhe z të asaj pike. Prandej vektorin e pozitës së pikës së dhënë mund ta shkruajmë me ndihmën e komponenteve të saj kësisoji:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z \tag{19}$$

Shpejtësinë e gjejmë duke derivuar shprehjen (19) sipas kohës. Në këte rast duhet të merret në konsiderim vlera konstante e vektorëve unitarë:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{i}\dot{x} + \vec{j}\dot{y} + \vec{k}\dot{z} \tag{20}$$

Kjo shprehje na tregon se shpejtësinë mund ta zbërthejmë në tri komponente të saj ku çdo njëra prej tyre ka kahun e njërit prej boshteve.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \tag{21}$$

Komponentet e vektorit sipas rregullave të matematikës i shkruajmë në formë të matricës me një shtyllë. Elementet e kësaj matrice janë komponentet e shpejtësisë v_x, v_y dhe v_z, kurse shprehja (20) tregon se këta janë koeficientët të cilët qëndrojnë pranë vektorëve unitarë. Pra, komponentja e shpejtësisë, në kah të njërit prej boshteve kënddrejta është derivati sipas kohës i koordinatës gjegjëse të pikës materiale.

Nxitimin e fitojmë kur shprehjen (20) e derivojmë sipas kohës. Pra:

$$\vec{a} = \vec{i}\ddot{x} + \vec{j}\ddot{y} + \vec{k}\ddot{z} \tag{22}$$

ose

$$a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \tag{23}$$

Shohim se komponentet e nxitimit janë të barabarta me derivatin e dytë sipas kohës së koordinateve gjegjëse.

e) Komponentet e shpejtësisë dhe të nxitimit në koordinata polare

Koordinatat polare të ndonjë pike në rrafsh janë: gjatësia e vektorit të pozitës $\vec{r}$ dhe këndi φ që ky vektor e mbyll me boshtin polar të sistemit koordinat. Vektorin e pozitës së pikës së dhënë A do ta shprehim si prodhim të vektorit unitar polar dhe intensitetit të tij

$$\vec{r} = \vec{r}_o r \tag{24}$$

Në këtë mënyrë vektori i pozitës së pikës është lidhur me një koordinatë polare. Shpejtësinë e fitojmë duke derivuar shprehjen e fundit sipas kohës:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{r}_o + r\dot{\vec{r}}_o \tag{25}$$

Ka mbetur të përcaktohet derivati i vektorit unitar $\vec{r}_o$. Në fig. 3 janë paraqitur vektorët e pozitës së pikave A dhe B të rrugës së pikës materiale. Ndryshimi i vektorëve unitarë për këto pozita shprehet me vektorin $d\vec{r}_o$. Intensitetin e këtij vektori e njehsojmë në mënyrë analoge sikur te (15). Fitojmë:

$$|d\vec{r}_o| = d\varphi$$

Kahu i këtij vektori shumë pak ndryshon nga normalja në $\vec{r}_o$. Vektorin unitar normal në $\vec{r}_o$ do ta shënojmë me $\vec{\varphi}_o$. Do të kemi

$$d\vec{r}_o = \vec{\varphi}_o d\varphi$$

Nga figura 3 shohim se ndërrimi i vektorit unitar $\vec{\varphi}_o$ shprehet në formën

$$d\vec{\varphi}_o = -\vec{r}_o d\varphi$$

Kur të dy shprehjet e fundit i pjesëtojmë me kohën dt fitojmë:

$$\dot{\vec{r}}_o = \varphi_o\dot{\varphi} \tag{26}$$

$$\dot{\vec{\varphi}}_o = -\vec{r}_o\,\dot{\varphi} \tag{27}$$

Zëvendësojmë (26) në (25)

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{r}_o + r\dot{\varphi}\,\vec{\varphi}_o \tag{28}$$

Pra shpejtësia në koordinatë polare ka këto komponente:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\varphi} \end{pmatrix} \tag{29}$$

Shpejtësinë në koordinatën polare mund ta njehsojmë direkt duke derivuar sipas kohës koordinatet:

$$x=r\cos\varphi$$

$$y=r\sin\varphi$$

do të fitojmë

$$\dot x=\dot r\cos\varphi-r\sin\cdot\dot\varphi$$

$$\dot y=\dot r\sin\varphi+r\cos\varphi\,\dot\varphi$$

I ngrisim në katror dhe i mbledhim

$$v^2=\dot x^2+\dot y^2=v_r^2+v_\varphi^2=\dot r^2+r^2\dot\varphi^2$$

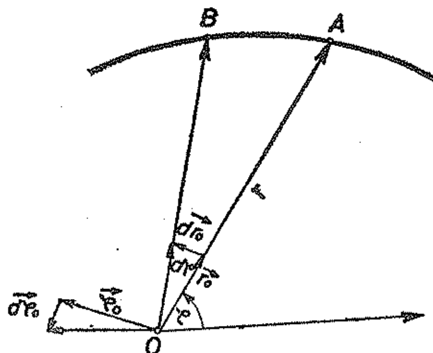


Fig. 3

Komponentet e nxitimit i fitojmë duke derivuar (28) sipas kohës

$$\vec a=\dot{\vec v}=\ddot r\,\vec r_o+\dot r\,\dot{\vec r}_o+\dot r\dot\varphi\,\vec\varphi_o+r\ddot\varphi\,\vec\varphi_o+r\dot\varphi\,\dot{\vec\varphi}_o$$

Zëvendësojmë vlerat nga (26) dhe (27)

$$\vec a=\vec r_o(\ddot r-r\dot\varphi^2)+\vec\varphi_o(r\ddot\varphi+2\dot r\dot\varphi) \tag{30}$$

Shohim se komponentet e nxitimit në koordinate polare janë

$$\vec a=\begin{pmatrix}a_r\\a_\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ddot r-r\dot\varphi^2\\r\ddot\varphi+2\dot r\dot\varphi\end{pmatrix} \tag{31}$$

f) Komponentet e shpejtësisë në koordinatë cilindrike dhe sferike

Lidhja në mes të koordinateve kënddrejta dhe cilindrike paraqitet me shprehjet

$$x=r\cos\varphi$$
$$y=r\sin\varphi$$
$$z=z$$

Pasi t'i derivojmë sipas kohës dhe i ngrisim në katror fitojmë:

$$\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2=\dot r^2+r^2\dot\varphi^2+\dot z^2$$

ose

$$\vec v=\begin{pmatrix}v_r\\v_\varphi\\v_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot r\\r\dot\varphi\\\dot z\end{pmatrix} \tag{32}$$

Në mënyrë analoge sikur më parë, nga lidhja në mes të koordinateve kënddrejta dhe sferike:

$$x=r\sin\vartheta\cos\varphi$$

$$y=r\sin\vartheta\sin\varphi$$

$$z=r\cos\vartheta$$

pas derivimit sipas kohës fitojmë:

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\vartheta}^2+\dot{r}^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2 \tag{33}$$

Lehtë mund të njehsohet katrori i elementit të gjatësisë së harkut në sistemet e cekura të koordinatave kur dihet se në koordinatat kënddrejta ka formën $dl^2=dx^2+dy^2+dz^2$.

3. LIGJET THEMELORE TË MEKANIKËS

a) Ekuacioni themelor i dinamikës

Përvoja tregon se në mes të trupave fizikë ekziston një veprim reciprok. Veprimin e një trupi në trup tjetër e quajmë forcë, prandaj themi se një trup vepron në trupin tjetër me një forcë. Forca është madhësi vektoriale, sepse plotësisht është e përcaktuar kur dijmë intensitetin dhe kahun e veprimit të saj. Nëse në trup veprojnë dy apo më shumë forca, ato mund të zëvendësohen me një, forcë kjo e cila fitohet duke i mbledhur në mënyrë vektoriale.

Kur në pikën materiale vepron ndonjë forcë, ajo pikës ia ndërron gjendjen e lëvizjes. Me lëvizje të pikës materiale mund të lidhim një madhësia vektoriale $\vec{p}$ e cila është proporcionale me shpejtësinë e saj $\vec{v}$. E quajmë sasi të lëvizjes. Sasinë e lëvizjes e shprehim në formën:

$$\vec{p}=m\vec{v} \tag{1}$$

Meqë forca pikës materiale i ndërron sasinë e lëvizjes, atëherë duhet të ekzistojë një lidhje në mes të forcës dhe sasisë së lëvizjes. Këtë lidhje e shpreh ligji i Njutnit. Sipas këtij ligji forca është e barabartë me derivatin e sasisë së lëvizjes sipas kohës. E shprehim në formën:

$$\vec{f}=\dot{\vec{p}} \tag{2}$$

Masa e trupit, te shpejtësitë të cilat janë të papërfillshme ndaj shpejtësisë së dritës, mbetet e pandryshuar, prandaj kur zëvendësojmë (1) në (2) fitojmë:

$$\vec{f} = m\dot{\vec{v}} \tag{3}$$

Meqë $\dot{\vec{v}}$ është nxitimi i pikës materiale, shprehja e fundit shkruhet në formën:

$$\vec{f} = m\vec{a} \tag{4}$$

Në këtë formë ligji i Njutnit tregon se forca pikës materiale i jep nxitim i cili është proporcional me atë forcë. Nëse nxitimin e shprehim në formën $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$, fitojmë:

$$\vec{f} = m\ddot{\vec{r}} \tag{5}$$

Nëse forca është funksion i njohur i vendit dhe kohës, atëherë shprehja (5), paraqet ekuacion diferencial, zgjidhja e të cilit na jep varshmërinë e vektorit të pozitës prej kohës, me çka lëvizja është e përcaktuar plotësisht. Për këtë arsye shprehja (5) paraqet ekuacion themelor diferencial të mekanikës së pikës materiale. Do të na shërbejë për zgjidhjen e shumë problemeve në mekanikë.

Nëse shpejtësia e pikës materiale është konstante, atëherë $\dot{\vec{v}} = 0$ dhe nga (3) rrjedh:

$$\vec{f} = 0 \tag{6}$$

Shprehja e fundit na shpreh ligjin e inercisë sipas të cilit pika materiale lëviz me shpejtësi konstante kur në të nuk vepron kurrfarë force.

E shumëzojmë relacionin (2) me dt dhe fitojmë:

$$\vec{f}\,dt = d\vec{p}$$

Kjo formulë tregon se ndërrimi i sasisë së lëvizjes është i barabartë me prodhimin $\vec{f}dt$ i cili quhet impuls i forcës.

b) Ligji i aksionit dhe reaksionit

Në mes të dy trupave A dhe B gjithmonë veprojnë forcat reciproke që do të thotë se kur trupi A vepron në trupin B, atëherë duhet në të njëjtën kohë edhe trupi B të veprojë në trupin A. Marrëdhënien e këtyre forcave reciproke e përcakton ligji i aksionit dhe i reaksionit. Sipas këtij ligji, këto forca janë të barabarta për nga intensiteti, por të kundërta për nga kahu. Zakonisht njëra prej këtyre forcave quhet aksion, kurse tjetra reaksion. Duke shfrytëzuar nocionet e fundit, ky ligj mund të shprehet kësisoji: Aksioni dhe reaksioni gjithmonë janë të barabartë, por me kahe të kundërta.

Ligjin e aksionit dhe të reaksionit mund ta shprehim edhe me ndihmën e sasisë së lëvizjes. Nëse forcën e aksionit e shënojmë me $\vec{f}_1$, kurse atë të reaksionit me $\vec{f}_2$, atëherë do të kemi:

$$\vec{f}_1 = - \vec{f}_2 \tag{7}$$

ose

$$\dot{\vec{p}}_1 = - \dot{\vec{p}}_2$$

integrojmë dhe fitojmë

$$\vec{p}_1 = - \vec{p}_2 + \vec{C}$$

ose

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{C} \tag{8}$$

Nga kjo kuptojmë se forcat e veprimit reciprok të dy pikave materiale nuk mund të ndërrojnë sasinë totale të lëvizjes së tyre. Ky është ligji i ruajtjes së sasisë së lëvizjes.

c) Sistemet inerciale

Për përshkrimin e proceseve të cilat ndodhin në natyrë, është e nevojshme njohja e sistemit. Me sistem të referimit kupojmë atë sistem të koordinatave i cili shërben për përcaktimin e pozitës së grimcës në hapësirë dhe me të është e lidhur ora për matje të kohës.

Ekziston një klasë e sistemeve të referimit në të cilën lëvizja e lirë e trupit, pra lëvizja e trupit në të cilin nuk veprojnë forca të jashtme kryhet me shpejtësi konstante. Këto sisteme referimi quhen sisteme inerciale.

Për klasën e këtyre sistemeve mund të shtrohet pyetja: A janë ligjet fizike të njëjtë në këto sisteme? Përvoja tregon se ligjet natyrore janë të njëjtë në të gjitha sistemet inerciale të referimit. Me fjalë tjera, ekuacionet të cilat i shprehin ligjet natyrore janë të pandryshuara ndaj transformimit të koordinatave dhe kohës nga një sistem inercial në tjetrin. Kjo do të thotë se ekuacionet të cilat e përshkruajnë ndonjë ligj natyrorë në sisteme të ndryshme inerciale të referimit e kanë formën e njejtë.

Për dukuritë mekanike ky pohim ka qenë formuluar qysh moti dhe njihet me emrin parim mekanik i relativitetit. Me asnjë lloj të dukurive mekanike nuk mund të vehet në dukje lëvizja e sistemit inercial.

Nëse dy sisteme të referimit lëvizin njëtrajtësisht në mënyrë translatore njëri ndaj tjetrit dhe nëse njëri prej tyre është inercial, atëherë kuptohet se edhe tjetri do të jetë inercial. Lëvizja e lirë në sistemin e

parë do të jetë lëvizje e lirë edhe në sistemin e dytë. Kuptojmë se ekziston numër i madh i sistemeve të referimit të cilët njëri ndaj tjetrit lëvizin në mënyrë të njëtrajtshme drejtvizore.

Mund të bëhet edhe kjo pyetje: A ekzistojnë sistemet inerciale, pra sisteme në të cilët trupi i lirë në të cilin nuk ushtrohet kurrfarë veprimi lëviz me shpejtësi konstante? Përvoja përgjigjet pozitivisht në këtë pyetje. Pra ka sisteme të tilla. Më tepër i afrohet sistemi me qendër në Diell dhe me boshte drejt disa yjeve të caktuara. Sistemi i lidhur me Tokën mund të konsiderohet i tillë në disa raste, por ka edhe aso problemesh që sistemi i tillë nuk kënaq.

Për të provuar nëse një sistem është inercial duhet provuar a është i zbatueshëm ligji i parë i Njutnit në të. Pra, si kriter për të provuar karakterin inercial të një sistemi merret vërtetësia e ligjit të parë të Njutnit në të. Nëse në sistemin e referimit të lidhur me yjet vërehet ndonjë shmangie e vogël nga ligji i parë i Njutnit, atëherë mund të përfundojmë se ky sistem nuk është inercial ideal, por i përafërt.

d) Momenti i sasisë së lëvizjes

Prodhimi vektorial i vektorit të pozitës dhe sasisë së lëvizjes quhet moment i sasisë së lëvizjes

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{9}$$

kurse prodhimi vektorial i vektorit të pozitës dhe vektorit të forcës quhet moment i forcës

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{f} \tag{10}$$

Shprehjet (9) dhe (10) mund të lidhen me një shprehje. Për këtë arsye është e nevojshme të derivojmë (9) sipas kohës:

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}}$$

anëtari i parë është i barabartë me zero sepse:

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{p} = \dot{\vec{r}} \times m\vec{v} = \dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}} = 0$$

Pra vlen

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}}$$

Nga (2) dhe (10) fitojmë

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{f} = \vec{M} \tag{11}$$

Formula e fundit tregon se derivati i momentit të sasisë së lëvizjes sipas kohës është i barabartë me momentin e forcës.

4. LËVIZJA NËN VEPRIMIN E FORCËS SË RËNDIMIT

a) Zgjidhja e përgjithshme

Forca tërheqëse e Tokës, iu jep të gjithë trupave në afërsi të sipërfaqes nxitimin g i cili vepron në kahe vertikale. Për gjerësi të caktuar gjeografike vlera e tij është konstante, dhe në gjerësitë e mesme e ka vlerën g=9,81 m/s². Për lëvizje të pikës materiale në fushë të veprimit të forcës së rëndimit mund të shkruajmë:

$$\dot{\vec{v}} = \vec{g}$$

Duke integruar këtë ekuacion diferencial fitojmë:

$$\vec{v} = \int \vec{g}dt = \vec{g}t + \vec{v}_o \tag{1}$$

Kjo shprehje na përcakton varshmërinë e shpejtësisë së pikës materiale nga koha, gjatë lëvizjes në fushë të forcës së rëndimit. Shohim se shpejtësia është funksion linear i kohës.

Në formulën (1) na paraqitet konstantja e integrimit $\vec{v}_o$. Do të përcaktojmë kuptimin e saj fizik. Të supozojmë se $t = 0$. Atëherë fitojmë $\vec{v} = \vec{v}_o$. Pra $\vec{v}_o$ është ajo shpejtësi të cilën e ka pasur pika materiale në fillim të lëvizjes. E quajmë shpejtësi fillestare.

Në anën e djathtë të formulës (1) në vend të shpejtësisë mund të shkruajmë derivatin e vektorit të pozitës sipas kohës. Kur e integrojmë edhe një herë fitojmë:

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_o t + \vec{r}_o \tag{2}$$

Konstantja e dytë e integrimit $\vec{r}_o$, paraqet vektorin e pozitës së pikës materiale në fillim të lëvizjes. Nga formula (2) kuptojmë se vektori i pozitës është funksion katror i kohës.

Lëvizjet e veçanta i fitojmë kur paraqesim vlera speciale për shpejtësinë fillestare $\vec{v}_o$ dhe pozitën fillestare $\vec{r}_o$. Do të shqyrtojmë disa shembuj të lëvizjes nën veprimin e forcës së rëndimit.

b) Rënia e lirë

Rënia e lirë është lëvizje e trupit të lëshuar pa shpejtësi fillestare nën veprimin e forcës së rëndimit. Në këtë rast duhet të merret:

$$\vec{v}_o = 0$$

kurse shprehja (2) merr formën

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2 + \vec{r}_o \tag{3}$$

Pikën fillestare e vendosim ashtu që vektori $\vec{r}_o$ të jetë i orientuar vertikalisht përpjetë. Atëherë të gjithë vektorët qëndrojnë në vijë vertikale dhe në shprehje mund të shkruajmë vetëm intensitetet e tyre. Lartësinë fillestare të trupit e shënojmë me h. Atëherë h është intensiteti i vektorit të pozitës fillestare $|\vec{r}_o| = h$ dhe formula (3) merr formën:

$$r = h - \frac{1}{2}\,g\,t^2 \tag{4}$$

Parashenja minus e cila paraqitet në anëtarin e dytë tregon se nxitimi i rënies $\vec{g}$ ka kah të kundërt nga kahu i përvetsuar i vertikales. Që të përcaktojmë shpejtësinë e trupit gjatë rënies në formulën (1) duhet zëvendësuar $\vec{v}_o = 0$. Fitojmë:

$$v = -g\,t \tag{5}$$

Rruga e kaluar te rënia është:

$$s = h - r$$

dhe nga (4) rrjedh

$$s = \frac{1}{2}\,g\,t^2 \tag{6}$$

Lehtë mund të shprehim shpejtësinë si funksion të rrugës së kaluar. Meqë vlen

$$t = \frac{v}{g}$$

shprehja (6) na jep:

$$v = \sqrt{2gs} \tag{7}$$

c) Hedhja e pjerrët

Kjo është lëvizje të cilën e kryen pika materiale nën ndikimin e forcës së rëndimit kur hedhet pjerrtas. Pikën fillestare të vektorit të pozitës e vendosim në pikën e hedhjes. Atëherë do të vlejë:

$$\vec{r}_o = 0$$

dhe shprehja (2) merr formën:

$$\vec{r} = \vec{v}_o t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \tag{8}$$

Boshtet e koordinateve kënddrejta i vendosim në atë rrafsh vertikal në të cilin gjendet shpejtësia fillestare $\vec{v}_o$ ashtu që boshti x ka drejtim të horizontales, kurse y të vertikales. Në këtë zgjedhje të sistemit të koordinatave vektori i pozitës do të ketë komponentet.

$$\vec{r} = \vec{i} x + \vec{j} y$$

kurse nxitimi i rëndimit:

$$\vec{g} = -\vec{j} g$$

Do të shënojmë me α këndin të cilin e mbyll shpejtësia fillestare me boshtin x. Ky kënd quhet këndi i elevacionit. E zbërthejmë shpejtësinë fillestare në komponentet e veta:

$$\vec{v}_o = \vec{i} v_o \cos\alpha + \vec{j} v_o \sin\alpha$$

dhe (8) do të ketë formën

$$\vec{i} x + \vec{j} y = \vec{i} v_o t \cos\alpha + \vec{j} v_o t \sin\alpha - \vec{j} \frac{1}{2} g t^2$$

I barazojmë koeficientët e vektorëve unitarë dhe do të fitojmë:

$$x = v_o t \cos\alpha$$

$$y = v_o t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \tag{9}$$

Me ndihmën e sistemit (9) mund të njehsojmë koordinatat e pikës materiale te hedhja e pjerrët në çfarëdo kohe. Këto paraqesin ekuacionet parametrike të rrugës së hedhjes së pjerrët. Nëse dëshirojmë të fitojmë ekuacionin eksplicit të rrugës, atëherë në (9) duhet të eliminohet koha t. Nga ekuacioni i parë i (9) kemi:

$$t = \frac{x}{v_o \cos\alpha}$$

Zëvendësojmë në ekuacionin e dytë vlerën e fituar:

$$y = x\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{2v_o^2\cos^2\alpha}\,x^2 \qquad (10)$$

Kuptojmë se kemi fituar ekuacionin e parabolës, prej nga përfundojmë se trupi gjatë hedhjes së pjerrët lëviz nëpër parabolë.

Te hedhja e pjerrët ka rëndësi largësia e hedhjes. Kjo është ajo vlerë e abshisës $x=d$ për të cilën ordinata $y=0$. Zëvendësojmë këto vlera në (10) dhe do të kemi:

$$0 = d\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{gd^2}{2v_o^2\cos^2\alpha}$$

$$d = \frac{2v_o^2}{g}\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\alpha$$

ose

$$d = \frac{v_o^2}{g}\sin^2\alpha \qquad (11)$$

Nga shprehja e fundit kuptojmë se të njëjtën largësi të hedhjes mund ta arrijmë me dy kënde të elevacionit. Njëri kënd është α, kurse tjetri $\frac{\pi}{2}-\alpha$. Përveç kësaj shohim se për shpejtësi fillestare të dhënë largësia do të jetë maksimale për kënd të elevacionit $\alpha=45°$.

d) Hedhja horizontale

Nëse këndi i elevacionit është $\alpha=0$ do të kemi hedhje horizontale. Do të specializojmë formulat (9) për $\alpha=0$, Fitojmë:

$$x = v_o\,t$$

$$y = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 \qquad (12)$$

Këto janë koordinatat e pozitës së pikës materiale te hedhja horizontale. Ekuacioni i rrugës fitohet duke specializuar formulën (10):

$$y = -\frac{g}{2v_o^2}\,x^2 \qquad (13)$$

Prapë kemi fituar ekuacionin e parabolës.

e) Hedhja vertikale

Hedhja vertikale është rast i veçantë i hedhjes te e cila këndi i elevacionit është $=90°$. Kur këtë vlerë të këndit të elevacionit e zëvendësojmë në sistemin (9) fitojmë:

$$x = 0$$

$$y = v_o t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (14)$$

Pra, lëvizja kryhet nëpër drejtëz vertikale, sepse $x=0$ paraqet ekuacionin e saj nëpër pikë fillestare të hedhjes.

Lehtë mund të njehsojmë lartësinë e ngritjes së trupit. Për këtë arsye duhet njehsuar maksimumin e y në (14). Derivojmë sipas kohës dhe e barazojmë me zero:

$$y' = v_o - g t = 0$$

prej nga

$$t = \frac{v_o}{g}$$

zëvendësojmë në (14) dhe fitojmë lartësinë e hedhjes:

$$h = \frac{v_o^2}{2g}$$

Duhet theksuar se të gjitha formulat e fituara për rënie dhe hedhje vlejnë vetëm për boshllëk, sepse përveç forcës së rëndimit nuk kemi marrë në konsiderim kurrfarë force tjetër. Nëse rënia apo hedhja kryhen në ajër, atëherë duhet të shqyrtohet edhe forca e rezistencës së ajrit.

5. HEDHJA NË MJEDIS REZISTUES

a) Hedhja e pjerrët

Kur hedhja kryhet në ajër, atëherë përveç veprimit të forcës së rëndimit duhet marrë në konsiderim edhe veprimin e rezistencës së ajrit. Eksperimentet tregojnë se forca e rezistencës së ajrit është proporcionale me shpejtësinë e trupit i cili lëviz nëpër të, prandaj do ta shkruajmë në formën:

$$\vec{a}_{rez} = -\gamma \vec{v} \qquad (1)$$

Parashenja minus duhet të shkruhet meqë kemi të bëjmë me nxitim të ngadalësuar. Faktori i proporcionalitetit γ shpreh rezistencën e mjedisit, kurse prodhimi $m\gamma$ quhet koeficient i rezistencës së mjedisit. Kur këtij nxitimi i shtojmë edhe nxitimin e forcës së rëndimit fitojmë:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \gamma \vec{v} \tag{2}$$

Do të paraqesim ndryshoren e re në formën:

$$\vec{u} = \vec{g} - \gamma \vec{v}$$

prej nga rrjedh:

$$d\vec{u} = -\gamma\, d\vec{v}$$

dhe (2) do të ketë formën:

$$-\frac{1}{\gamma}\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{u}$$

ose

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\gamma \vec{u}$$

Meqë derivati i funksionit të panjohur është proporcional me vetë funksionin, kuptojmë se kemi të bëjmë me funksion eksponencial:

$$\vec{u} = \vec{C} e^{-\gamma t} \tag{3}$$

Që të përcaktojmë konstanten e integrimit supozojmë se për $t = 0$ $\vec{v} = \vec{v}_o$, ku $\vec{v}_o$ është shpejtësia fillestare. Do të fitojmë:

$$\vec{g} - \gamma \vec{v}_o = \vec{C}$$

Vlerën e fituar e zëvendësojmë në (3):

$$\vec{g} - \gamma \vec{v} = (\vec{g} - \gamma \vec{v}_o)\, e^{-\gamma t}$$

prej nga shpejtësia do të jetë:

$$\vec{v} = \frac{\vec{g}}{\gamma} - \left(\frac{\vec{g}}{\gamma} - \vec{v}_o\right) e^{-\gamma t} \tag{4}$$

Në vend të shpejtësisë $\vec{v}$ mund të shkruajmë derivatin e parë të vektorit të pozitës sipas kohës dhe të integrojmë edhe një herë:

$$\vec{r} = \frac{\vec{g}}{\gamma} t + \left(\frac{\vec{g}}{\gamma^2} - \frac{\vec{v}_o}{\gamma}\right) e^{-\gamma t} + \vec{B}$$

Konstanten e dytë të integrimit do ta përcaktojmë nga kondităt fillestare. Supozojmë se në kohën $t = 0$, pozita e pikës materiale është e përcaktuar me vektorin $\vec{r}_o$. Zëvendësojmë këto kondita dhe fitojmë:

$$\vec{r}_o = \frac{\vec{g}}{\gamma^2} - \frac{\vec{v}_o}{\gamma} + \vec{B}$$

ose

$$\vec{B} = \vec{r}_o - \left(\frac{\vec{g}}{\gamma^2} - \frac{\vec{v}_o}{\gamma}\right)$$

Pasi të zëvendësojmë vlerën e fituar të konstantes $\vec{B}$ përfundimisht fitojmë:

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \frac{\vec{g}}{\gamma} t - \left(\frac{\vec{g}}{\gamma^2} - \frac{\vec{v}_o}{\gamma}\right) (1 - e^{-\gamma t}) \tag{5}$$

Formula e fundit na e mundëson njohjen e pozitës së pikës materiale në çfarëdo momenti të kohës. Shprehjet (4) dhe (5) janë mjaft të ndërlikuara, prandaj do ta kufizojmë diskutimin vetëm për dy raste kufitare.

Së pari do të shqyrtojmë rastin $\gamma t \ll 1$ i cili i përgjigjet kohës menjëherë pas fillimit të lëvizjes. Për këtë rast funksionin eksponencial mund ta zhvillojmë në rend dhe dhe t'i marrim në konsiderim vetëm anëtarët e shkallës së parë dhe të dytë:

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \frac{\vec{g}}{\gamma} t - \left(\frac{\vec{g}}{\gamma^2} - \frac{\vec{v}_o}{\gamma}\right) \left(1 - 1 + \gamma t - \frac{1}{2} g t^2\right)$$

ose

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 - \frac{1}{2} \vec{v}_o \gamma t^2 \tag{6}$$

Shohim se të tre anëtarët e parë janë të njëjtë sikurse të hedhja në boshllëk, kurse rezistenca e mjedisit vjen në shprehje vetëm te anëtarët ku koha paraqitet në shkallë të dytë apo më të madhe.

Rast tjetër kemi për $\gamma t \gg 1$, që i përgjigjet kohës shumë vonë pas fillimit të lëvizjes. Në këtë rast $e^{-\gamma t} \to 0$ dhe fitojmë:

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \frac{\vec{v}_o}{\gamma} + \frac{\vec{g}}{\gamma}\left(t - \frac{1}{\gamma}\right) \tag{7}$$

kurse nga formula (4) për shpejtësi do të kemi:

$$\vec{v} = \frac{\vec{g}}{\gamma} \tag{8}$$

Pra pas një kohe të gjatë, rruga e pikës materiale i afrohet vertikales, sepse atëherë shpejtësia ka kahun e vektorit $\vec{g}$.

Sipas formulës (7) vektori i pozitës $\vec{r}$ përbëhet nga tre vektorë: Vektori i parë $\vec{r}_o$ përcakton pikën fillestare të hedhjes, vektori i dytë $\frac{\vec{v}_o}{\gamma}$ e ka kahun e shpejtësisë fillestare, kurse i treti e ka kahun e vertikales. Këta vektorë si dhe rruga e pikës materiale te hedhja në mjedis rezistues janë paraqitur në fig. 4. Rruga fillon nga pika P sikurse në rastin e shqyrtuar në boshllëk pastaj shpejt lakohet dhe në fund merr kah të vertikales. Nga figura shihet se hedhja nuk mund të jetë më e gjatë se komponentja x e vektorit $\frac{\vec{v}_o}{\gamma}$

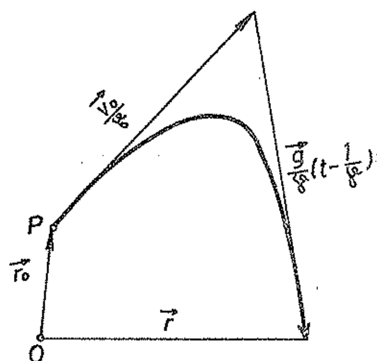


Fig. 4

b) Rënia në mjedis rezistues

Formulat e fituara më parë mund të specializohen për rënie. Për këtë rast duhet zëvendësuar $\vec{r}_o = \vec{h}$ dhe $\vec{v}_o = 0$. Te rënia të gjithë vektorët kanë kahe të vertikales prandaj mund të shkruajmë vetëm intensitetet e tyre. Nga formulat (4) dhe (5) fitojmë:

$$v = \frac{g}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right) \tag{9}$$

$$r = h + \frac{g}{\gamma}\left[t - \frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right)\right] \tag{10}$$

Shprehja (9) tregon se shpejtësia e rënies gjatë kohës në mënyrë asimtotike i afrohet vlerës konstante $\frac{\vec{g}}{\gamma}$. Për këtë arsye pikat e shiut të cilat bien nëpër ajër disa qindra metra, arrijnë në sipërfaqe të Tokës me shpejtësi konstante.

6. PUNA DHE ENERGJIA

Punë të forcës konstante nëpër rrugë të drejtë quajmë prodhimin skalar të vektorit të forcës dhe gjatësisë së rrugës,

$$A = \vec{f} \cdot \vec{s}$$

Nëse forca nuk është konstante dhe rruga nuk është e drejtë, atëherë rrugën duhet zbërthyer në elemente të vegjël $\vec{dr}$. Puna në këtë element të rrugës është:

$$dA = \vec{f} \cdot \vec{dr}$$

Pastaj duhet mbledhur këto elemente të punës. Për punë fitojmë formulën:

$$A = \int_{P_1}^{P_2} \vec{f}\,\vec{dr} \tag{1}$$

ku integrimi duhet të kryhet nëpër vijë të rrugës. Pra, puna është integrali vijor i forcës përgjatë rrugës.

Vlera e këtij integrali në përgjithësi varet prej formës së vijës së integrimit. Por ekziston një kategori e forcave te të cilat puna nuk varet prej kësaj forme. Këto forca quhen forca konservative. Forcat konservative kryejnë të njëjtën punë nëpër të gjitha rrugët të cilat bashkojnë pikën fillestare dhe të fundit. Këto forca duhet të kënaqin një kondité të cilën do ta përfitojmë.

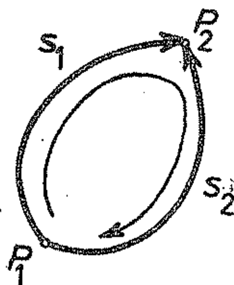


Fig. 5

Në fig. 5 pika fillestare P_1 dhe ajo e fundit P_2 janë të lidhura me rrugët s_1 dhe s_2. Nëse puna nuk varet prej formës së rrugës, atëherë mund të shkruajmë:

$$\int_{P_1(s_1)}^{P_2} \vec{f}\,\vec{dr} = \int_{P_1(s_2)}^{P_2} \vec{f}\,\vec{dr} \quad \text{ose} \quad \int_{P_1(s_1)}^{P_2} \vec{f}\,\vec{dr} + \int_{P_2(s_2)}^{P_1} \vec{f}\,\vec{dr} = 0$$

Këto integrale mund t'i bashkojmët në një. Fitojmë integralin nëpër vijë të lakuar të mbyllur. Pra,

$$\oint \vec{f}\,\vec{dr} = 0 \tag{2}$$

Shohim se puna e forcës konservative nëpër çfarëdo rruge të mbyllur është e barabartë me zero. Duke zbatuar teoremën e Stoksit, integralin vijor (2) e shndërrojmë në integralin sipërfaqësor:

$$\int rot \vec{f}\, d\vec{S} = 0$$

Formula e fundit duhet të vlejë për çfarëdo sipërfaqe të mundshme të rrethuar me vijën e integrimit si dhe për çfarëdo force konservative. Kjo do të jetë e mundur vetëm atëherë kur vlen:

$$rot\, \vec{f} = 0 \tag{3}$$

Shprehja e fundit tregon se fusha e forcës konservative është fushë joshtjellore.

E dijmë nga analiza vektoriale se fushat e këtilla mund të shprehen me ndihmën e gradientit të një funksioni skalar U

$$\vec{f} = -\, grad\, U \tag{4}$$

sepse $rot\ grad\ U = 0$. Funksioni skalar i paraqitur në këtë mënyrë quhet potencial i forcës $\vec{f}$.

Në rastin e veprimit të forcave konservative, ekuacioni i lëvizjes mund të integrohet një herë në formë të përgjithshme. Fillojmë nga ekuacioni i lëvizjes

$$\vec{f} = m\, \frac{d\vec{v}}{dt}$$

E shumëzojmë këtë ekuacion në mënyrë skalare me faktorin $d\vec{r} = \vec{v}dt$ dhe fitojmë:

$$\vec{f}\, d\vec{r} = m\, \frac{d\vec{v}}{dt}\, \vec{v}\, dt = m\, \vec{v}\, d\vec{v}$$

Për forca konservative duhet shfrytëzuar shprehja (4)

$$-\, grad\, U\, d\vec{r} = m\, \vec{v}\, d\vec{v}$$

Nga analiza vektoriale e dijmë se vlenë $d\vec{r} \cdot grad\, U = dU$, prandaj fitojmë:

$$m\, \vec{v}\, d\vec{v} = -\, dU$$

Integrojmë

$$m \int_{v_1}^{v_2} \vec{v}\, d\vec{v} = - \int_{U_1}^{U_2} dU$$

dhe fitojmë:

$$\frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} = U_1 - U_2$$

Shprehjen:

$$T = \frac{m v^2}{2} \tag{5}$$

e quajmë energji kinetike. Nga kjo fitojmë:

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2$$

ose

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1 \tag{6}$$

Kjo formulë tregon se te lëvizja në veprimin e forcës konservative shuma e energjisë kinetike dhe potenciale mbetet e pandryshuar. Ky është ligji i ruajtjes së energjisë mekanike. Shohim se ky ligj paraqet integralin e parë të ekuacionit të lëvizjes. Prandaj mund te zgjidhja e problemeve mekanike, ku veprojnë forcat konservative, mund të fillojmë nga ligji mbi ruajtjen e energjisë, në vend që të fillojmë nga ekuacioni i lëvizjes. Kësisoji njehsimi është shkurtuar për një integrim.

7. FORCAT QENDRORE

Forca, drejtimi i veprimit të së cilës është i përcaktuar me rreze vektorin e një pike të përforcuar, quhet forcë qendrore. Kjo pikë quhet qendër e forcës, ndërsa vetë forca përkufizohet në këtë formë të përgjithshme:

$$\vec{f} = f(r)\, \vec{r}_o = g(r)\, \vec{r}$$

ku është $g(r) = f(r)/r$ dhe si madhësi skalare mund të jenë pozitive apo negative në varshmëri prej faktit, a është dëbuese apo tërheqëse. Për lëvizje nën veprimin e forcës qendrore vlen ligji i sipërfaqeve të barabarta të cilin do ta përfitojmë në vazhdim.

Qendrën e forcës do ta marrim për fillim të vektorit të pozitës së grimcës. Ekuacionin e lëvizjes

$$\vec{f} = m\dot{\vec{v}}$$

do ta shumëzojmë nga ana e majtë me vektorin e pozitës në mënyrë vektoriale,

$$\vec{r} \times \vec{f} = m\left(\vec{r} \times \dot{\vec{v}}\right)$$

Te forcat qendrore vektori i forcës $\vec{f}$ është paralel me vektorin e pozitës $\vec{r}$, prandaj prodhimi i tyre vektorial është i barabartë me zero. Pra,

$$\vec{r} \times \dot{\vec{v}} = 0$$

Në anën tjetër vlen

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{v} = 0$$

I mbledhim këto dy formula

$$\vec{r} \times \dot{\vec{v}} + \dot{\vec{r}} \times \vec{v} = 0$$

ose

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{v}\right) = 0$$

E integrojmë këtë shprehje dhe fitojmë:

$$\vec{r} \times \vec{v} = 2\vec{C} \qquad (1)$$

ku $\vec{C}$ është një vektor konstant. Pra, te lëvizja nën veprimin e forcës qendrore prodhimi vektorial i vektorit të pozitës dhe i vektorit të shpejtësisë mbetet konstant. Meqë prodhimi vektorial qëndron normal në rrafshin të cilin e përcaktojnë vektorët $\vec{r}$ dhe $\vec{v}$ edhe ky rrafsh do të mbetet konstant. Kështu kemi arrijtur deri te përfundimi mjaft i rëndësishëm për forcat qendrore i cili tregon se rruga e pikës materiale e cila lëviz nën veprimin e forcës qendrore qëndron në një rrafsh.

E shumëzojmë fomulën (1) me masën e pikës materiale:

$$\vec{r} \times m\vec{v} = 2m\vec{C}$$

Në anën e majtë të shprehjes kemi fituar momentin e sasisë së lëvizjes:

$$\vec{L} = 2m\vec{C} \qquad (2)$$

Kuptojmë se te lëvizja nën veprimin e forcës qendrore momenti i sasisë së lëvizjes është konstant.

Do t'i japim një interpretim gjeometrik shprehjes (1). Këtë shprehje mund ta shkruajmë edhe në formën

$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \frac{\vec{dr}}{dt} = \frac{\vec{r} \times \vec{dr}}{dt}$$

ose

$$\frac{\vec{r} \times \vec{dr}}{2\,dt} = \vec{C}$$

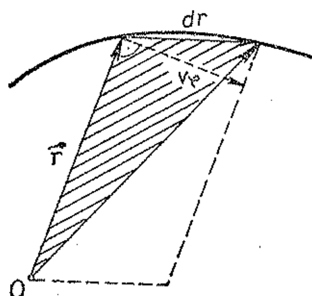


Fig. 6

Në fig. 6 është paraqitur sipërfaqja e paralelogramit e cila është e barabartë me intensitetin e prodhimit vektorial $\vec{r} \times \vec{dr}$. Vektori $\vec{dr}$ shumë pak dallohet nga rruga e kaluar e pikës materiale. Gjysma e kësaj sipërfaqeje është vijëzuar dhe tregon sipërfaqen të cilën e përshkruan vektori i pozitës në kohën dt. Kur këtë e pjsëtojmë me dt fitojmë sipërfaqen të cilën e përshkruan vektori i pozitës në njësi të kohës. Formula (1) tregon se kjo sipërfaqe është konstante. Kështu treguam se te lëvizjet qendrore rreze vektori në njësi kohe të barabartë përshkruan sipërfaqe të barabartë. Ky ligj vlen edhe për lëvizjen e planeteve rreth Diellit dhe njihet si ligji i dytë i Keplerit. Natyrisht se ka kuptim më të gjerë meqë vlen jo vetëm për lëvizje të planetëve, por për çfarëdo lëvizje nën veprimin e forcës qendrore.

8. LËVIZJA E PLANETËVE

a) Ligji i gravitacionit dhe potenciali gravitacional

Planetët lëvizin rreth Diellit nën veprimin e forcës së gravitacionit. Kjo forcë është e drejtuar kah qendra e Diellit dhe përcaktohet me ligjin e Njutnit për gravitacion

$$\vec{f} = -\vec{G}\,\frac{M\,m}{r^2}\,\vec{r}_o \qquad (1)$$

Në këtë shprehje janë: M — masa e Diellit apo në përgjithësi masa e trupit qendror, m — masa e planetit apo në përgjithësi masa e trupit i cili lëviz rreth trupit qendror, r — largësia në mes të qendrave të këtyre trupave. Ligji i Njutnit për gravitacion shpreh faktin se forca tërheqëse në mes të trupave është proporcionale me masat e tyre dhe proporcionale e zhdrejtë me katrorin e largësisë nga qendrat e tyre. Faktori i proporcionalitetit G quhet konstante universale e gravitacionit dhe në sistemin MKS ka vlerën $G = 6{,}664 \cdot 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$.

Shenja minus duhet të shkruhet sepse forca është tërheqëse, forcë e cila ka kah të kundër nga $\vec{r}_o$.

Së pari do të tregojmë se forca e gravitacionit është konservative. Për këtë arsye formulën (1) do ta shkruajmë në formën

$$\vec{f} = -\vec{G}\,\frac{Mm}{r^3}\,\vec{r}$$

Kërkojmë rotorin e kësaj force, duke shfrytëzuar formulën për rotorin e prodhimit të skalarit dhe vektorit. Fitojmë:

$$rot\,\vec{f} = -\vec{G}\,\frac{Mm}{r^3}\,rot\,\vec{r} - G\,Mm\,grad\,\frac{1}{r^3}\times\vec{r}$$

Anëtari i parë është i barabartë me zero, sepse $rot\,\vec{r} = 0$. Do të kemi:

$$rot\,\vec{f} = 3\,M\,m\,G\,\frac{1}{r^4}\,\vec{r}_o\times\vec{r}$$

prej nga

$$rot\,\vec{f} = 0$$

sepse prodhimi vektorial i vektorëve paralelë është i barabartë me zero. Meqë fusha e gravitacionit qenka fushë pa shtjella, atëherë kjo mund të shprehet me ndihmën e potencialit të vet sipas formulës

$$\vec{f} = -\,grad\,U$$

Pasi që forca e gravitacionit është edhe forcë qendrore gradientin mund ta shprehim si derivat në kah të r. Pra,

$$\vec{f} = -\,\frac{dU}{dr}\,\vec{r}_o$$

shumëzojmë me dr

$$\vec{f}\,dr = -\,dU\,\vec{r}_o$$

ose

$$dU = -\,f\,dr$$

Zëvendësojmë vlerën e forcës dhe fitojmë

$$U = GMm\int\frac{dr}{r^2}$$

d.m.th.

$$U = -\frac{GMm}{r} \tag{2}$$

Shprehja (2) tregon se potenciali i gravitacionit është proporcional i zhdrejtë me largësinë në mes të qendrave të trupave.

b) Përcaktimi i rrugës

Më parë treguam se forca e gravitacionit është konservative, prandaj për trup i cili lëviz rreth trupit qendror mund të shkruajmë ligjin mbi ruajtjen e energjisë mekanike. Energjinë totale do ta shënojmë me E.

$$\frac{mv^2}{2} + U = E \tag{3}$$

pjesëtomj me $\frac{m}{2}$

$$v^2 + \frac{2U}{m} = \frac{2E}{m} \tag{3'}$$

Njehsimin do ta kryejmë në koordinata polare të rrafshit. Katrorin e shpejtësisë do ta shprehim si shumë të katrorëve të komponenteve polare

$$v^2 = v_r^2 + v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

Këtë vlerë dhe (2) e zëvendësojmë në (3')

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{2GM}{r} = \frac{2E}{m}$$

Ne dëshirojmë të përcaktojmë rrugën e planetit apo të pikës materiale rreth trupit qendror, në të cilin ekuacioni r duhet të shprehet si funksion i φ. Prandaj do të tentojmë që në shprehje të paraqesim derivatin e r sipas φ. E kryejmë sipas rregullës së derivatit të funksionit të përbërë

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\,\dot{\varphi}$$

Zëvendësojmë:

$$\left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right]\dot{\varphi}^2 - \frac{2GM}{r} = \frac{2E}{m} \tag{4}$$

Nga (4) duhet të eliminohet $\dot{\varphi}$ e cila në vetveti përmban kohën t. E dijmë se lëvizja kryhet nën veprimin e forcës qendrore, prandaj duhet të vlejë ligji i shpejtësisë sipërfaqësore konstante. Pra,

$$\vec{r} \times \vec{v} = 2\vec{C}.$$

Gjithashtu e dijmë se

$$|\vec{r} \times \vec{v}| = r\, v_{\varphi} = r\, r\dot{\varphi} = r^2\dot{\varphi}$$

prej nga për $\dot{\varphi}$ fitojmë

$$\dot{\varphi} = \frac{2C}{r^2} \tag{5}$$

Këtë e zëvendësojmë në formulën (4)

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{GM}{2C^2 r} = \frac{E}{2mC^2}$$

Do të shënojmë shkurtimisht me

$$p = \frac{4C^2}{GM} \tag{6}$$

dhe

$$\frac{E}{2mC^2} = \frac{\varepsilon^2 - 1}{p^2} \tag{7}$$

do të fitojmë:

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{2}{pr} = \frac{\varepsilon^2 - 1}{p^2} \tag{8}$$

Paraqesim ndryshoren e re

$$\rho = \frac{1}{r} \tag{9}$$

dhe derivatin në anëtarin e parë të (8) e shprehim si derivat të funksionit të përbërë

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{d\rho}\,\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{1}{\rho^2}\,\frac{d\rho}{d\varphi}$$

Zëvendësojmë

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \rho^2 - \frac{2}{p}\rho = \frac{\varepsilon^2 - 1}{p^2} \tag{10}$$

dhe fitojmë

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(\rho - \frac{1}{p}\right)^2}$$

I ndajmë ndryshoret

$$d\varphi = \frac{d\rho}{\frac{\varepsilon}{p}\sqrt{1 - \frac{p^2}{\varepsilon^2}\left(\rho - \frac{1}{p}\right)^2}}$$

Integrojmë

$$\varphi + \varphi_o = \int \frac{p\left(\frac{p}{\varepsilon}\rho\right)}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{\varepsilon^2}\left(\rho - \frac{1}{p}\right)^2}} \tag{11}$$

dhe fitojmë:

$$\varphi + \varphi_o = arc \sin \frac{p}{\varepsilon}\left(\rho - \frac{1}{p}\right) \tag{12}$$

ose

$$p\rho = 1 + \varepsilon \sin(\varphi + \varphi_o) \tag{13}$$

Konstanten e integrimit e përcaktojmë nga konditat fillestare. Do të vendosim boshtin polar të sistemit koordinat kështu që të kalojë nëpër afel, nëpër atë pikë të rrugës e cila është më së largu nga qendra e forcës tërheqëse. Atëherë për $\varphi = 0$, r duhet të ketë vlerë maksimale, kurse ρ vlerë minimale. Vlera më e vogël e prodhimit $p\rho$ sipas formulës (13) është e barabartë me

$$p\rho_{min} = 1 - \varepsilon$$

Këtë vlerë do ta ketë shprehja (13) atëherë kur

$$\sin \varphi_o = -1$$

ose kur

$$\varphi_o = \frac{3\pi}{2}$$

Vlerën e fituar të konstantes së integrimit e zëvendësojmë në (13). Do të kemi:

$$p\rho = 1 + \varepsilon \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \varphi\right) = 1 - \varepsilon \cos\varphi$$

Shfrytëzojmë (9) dhe përfundimisht fitojmë:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi} \tag{14}$$

Ky është ekuacioni i rrugës të cilën e përshkruan trupi te lëvizja nën ndikimin e forcës tërheqëse. Nga gjeometria e dijmë se ekuacioni (14) mund të jetë elipsë, parabolë apo hiperbolë. Forma e lakores varet prej vlerës së ekscentricitetit numerik ε. Kur

$\varepsilon < 1$ do të kemi elipsë

$\varepsilon = 1$ parabolë

$\varepsilon > 1$ hiperbolë.

Qendra e forcës tërheqëse gjendet në njërën vatër të këtyre lakoreve.

Te planetët të cilët vazhdimisht qëndrojnë në afërsi të Diellit vjen në shprehje vetëm ajo lakore e cila nuk ka pika pambarim të larguara, e kjo është elipsa. Kështu përfituam ligjin e parë të Keplerit i cili vërteton se planetët lëvizin rreth Diellit nëpër rrugë eliptike në njërën vatër të së cilës gjendet Dielli. Ky ligj ka kuptim më të gjerë, sepse vlen edhe për lëvizjen e satelitëve rreth planetëve të vet, për lëvizje të satelitëve artificialë rreth Tokës apo për lëvizje të kometave. Vlen të ceket se kometat apo meteorët mund të kenë edhe rrugë parabolike apo hiperbolike.

Ekscentricitetin numerik ε të cilin e kemi paraqitur me formulën (7) tregon se forma e rrugës varet prej energjisë totale E. Kur është $E < 0$, rruga është elipsë, për $E = 0$ parabolë, kurse për $E > 0$ hiperbolë. Prandaj është e nevojshme të diskutohet mundësia e energjisë totale. Kjo është e barabartë me shumën e energjisë kinetike dhe potenciale në çfarëdo kohe, pra edhe në kohën $t = 0$ kur kemi filluar të shqyrtojmë lëvizjen. Nëse vlerat e veçanta në kohën $t = 0$ i shënojmë me indeksin zero do të kemi:

$$E = T_o + V_o$$

prej nga shohim se parashenja e energjisë totale varet nga kondita

$$T_o \lesseqqgtr - V_o$$

Shpejtësinë fillestare të trupit do ta shënojmë me v_o, kurse pozitën fillestare me r_o dhe për energji kinetike përkatësisht potencial do të kemi:

$$\frac{mv_o^2}{2} \lesseqgtr \frac{GMn}{r_o}$$

ose

$$v_o^2 \lesseqgtr \frac{2GM}{r_o} \tag{15}$$

Shohim se forma e rrugës varet prej shpejtësisë fillestare të trupit. Nëse ajo është më e vogël se vlera kritike në anën e djathtë të formulës (15) rruga do të jetë elipsë, nëse nuk është, rruga do të jetë parabolike apo hiperbolike. Në rastin e parë trupi do të lëvizë rreth qendrës tërheqëse, kurse në dy rastet tjera do t'i afrohet qendrës tërheqëse nga njëra anë dhe prapë do të largohet duke mos u kthyer kurrë më.

Nëse dëshirojmë që trupi i hedhur në lartësinë r_o të bëhet satelit i Tokës, atëherë duhet dhënë shpejtësi fillestare më të vogël se ajo kritike. Për Tokën kjo shpejtësi kritike ka vlerën 11,2 km/s. Për shpejtësi më të madhe se ajo kritike, trupi do të lëshojë fushën e tërheqjes së Tokës. Kjo shpejtësi kritike quhet Shpejtësi e dytë kozmike. Përveç saj ekziston edhe shpejtësia e parë kozmike. Trupi me këte shpejtësi bëhet satelit artificial i Tokës. Për Tokën e ka vlerën 7,9 km/s.

c) Ligji i tretë i Keplerit

Do të kufizohemi për lëvizje nëpër rrugë eliptike. Elipsa është lakore e mbyllur, prandaj mund të definojmë kohën e një rrotullimi të plotë. Do ta shënojmë me T. Meqë C është shpejtësi e sipërfaqes atëherë prodhimi CT paraqet sipërfaqen të cilën e përshkruan vektori i pozitës për kohën e një rrotullimi rreth qendrës tërheqëse. Kjo sipërfaqe, është sipërfaqja e elipsës. Pra duhet të vlejë

$$CT = ab\pi \tag{16}$$

ku me a dhe b kemi shënuar gjysmëboshtet e rrugës eliptike. E dijmë nga gjeometria se parametri i elipsës p është i lidhur me gjysmëboshtet e saj sipas formulës

$$p = \frac{b^2}{a}$$

Ngrisim në katror (16) dhe zëvendësojmë vlerën e fundit:

$$C^2T^2 = a^3p\pi^2$$

dhe sipas (6)

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \tag{17}$$

Shprehja e fundit njihet si ligji i tretë i Keplerit që thot: Katrorët e kohëve të rrotullimit të planetëve rreth Diellit janë proporcionalë me

kubet e largësive të tyre mesatare nga Dielli. Këtu merret në konsiderim fakti se gjysmëboshti i madh i elipsës është i barabartë me vlerën mesatare të pikave ekstremale të larguara nga njëra vatër e elipsës. Sipas përshkrimit të këtij ligji planetët më afër Diellit duhet të rrotullohen rreth tij për kohë më të shkurtër.

9. LËVIZJA E SATELITËVE E SHNDËRRUAR NË PROBLEM TË DY TRUPAVE

Do të shënojmë me m_1 masën e satelitit i cili rrotullohet rreth planetit me masë m, kurse me $\vec{r}_1$ dhe $\vec{R}$ vektorët e pozitave të tyre. Atëherë vektori i pozitës së satelitit ndaj planetit shprehet me vektorin

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{R} \tag{1}$$

Të gjithë satelitët e sistemit planetar të Diellit lëvizin në afërsi të planetëve, ashtu që intensiteti i vektorit (1) është shumë i vogël në krahasim me largësinë s të planetit nga Dielli. Për këtë arsye edhe largësinë e satelitit nga Dielli mund ta shënojmë me s. Gjithashtu mund të supozojmë se forcat tërheqëse në mes të Diellit dhe planetit përkatësisht në mes të Diellit dhe satelitit janë paralele. Nëse me $\vec{s}_o$ shënojmë vektorin unitar prej planetit kah Dielli, kurse me M masën e tij, forca tërheqëse do të jetë:

$$\vec{F} = G \frac{Mm}{s^2} \vec{s}_o$$

kurse për satelit

$$\vec{F}' = G \frac{Mm_1}{s^2} \vec{s}_o$$

Nëse nuk i përfillim forcat tërheqëse të trupave tjerë të sistemit Diellor, atëherë në planet përveç forcës $\vec{F}$ vepron edhe forca tërheqëse e satelitit:

$$\vec{F}_1 = G \frac{mm_1}{r^3} \vec{r}$$

Kurse në satelit përveç forcës $\vec{F}'$ edhe forca tërheqëse e planetit e shprehur në formën:

$$\vec{F}_1' = -\frac{Gmm_1}{r^3} \vec{r}$$

Ekuacionet diferenciale të lëvizjes së planetit dhe satelitit do të kenë formën:

$$m \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = G \frac{Mm}{s^2} \vec{s}_o + G \frac{mm_1}{r^3} \vec{r} \qquad (2)$$

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = G \frac{Mm_1}{s^2} \vec{s}_o - G \frac{mm_1}{r^3} \vec{r} \qquad (3)$$

Shuma e këtyre ekuacioneve është:

$$m \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = G \frac{M(m + m_1)}{s^2} \vec{s}_o$$

Nëse me A shënojmë qendrën e masave m dhe m_1, atëherë vektori i pozitës së kësaj pike shprehet me ekuacionin

$$(m + m_1) \vec{h} = m \vec{R} + m_1 \vec{r}_1$$

prej nga rrjedh

$$(m + m_1) \frac{d^2 \vec{h}}{dt^2} = \mathrm{m} \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2}$$

zëvendësojmë (2) dhe (3)

$$(m + m_1) \frac{d^2 \vec{h}}{dt^2} = G \frac{M(m + m_1)}{s^2} \vec{s}_o \qquad (4)$$

Ky është ekuacioni i lëvizjes së qendrës A të masave m dhe m_1. Kuptojmë se qendra e përbashkët e masës së planetit dhe satelitit lëviz rreth Diellit thuajse në të është e koncentruar masa $(m + m_1)$. Thjeshtojmë me m ekuacionin (2) dhe me m_1 ekuacionin (3), i zbresim dhe shfrytëzojmë (1). Do të kemi:

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

përkatësisht:

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - G \frac{m_1(m + m_1)}{r^3} \vec{r}$$

Ky është ekuacioni diferencial i lëvizjes së satelitit rreth planetit dhe na tregon se sateliti lëviz ashtu sikur planeti të ishte i palëvizshëm, të kishte masën $(m + m_1)$ dhe vetëm kjo do të tërhiqte satelitin. Kështu problemi i satelitit redukohet në problem të dy trupave.

Nëse kohën e rrotullimit të satelitit rreth planetit e shënojmë me T_1, kurse me a_1 gjysmëboshtin e madh të elipsës së tij, atëherë në mënyrë analoge sikurse në (17) të mësimit të kaluar do të kemi:

$$G(m + m_1) = \frac{4\pi^2 a_1^3}{T_1^2}.$$

Do të shënojmë me T kohën për të cilën planeti rrotullohet rreth Diellit, kurse me a gjysmëboshtin e rrugës së saj dhe fitojmë:

$$G(M + m + m_1) = 4\, \frac{\pi^2 a^3}{T^2}$$

Nga të dy ekuacionet e fundit kemi:

$$\frac{m + m_1}{M + m + m_1} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T_1}\right)^2$$

Zakonisht masa e satelitit është shumë e vogël në krahasim me masën e Diellit apo planetit, prandaj si e tillë është e papërfillshme. Duke u bazuar në këtë arsyetim formula e fundit reduktohet në

$$\frac{m}{M} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T_1}\right)^2$$

Me ndihmën e kësaj shprehje, duke njohur kohën e rrotullimit të satelitit rreth planetit (T_1), kohën e rrotullimit të planetit rreth Diellit (T) dhe gjysmëboshtet e mëdhenj të rrugëve të tyre a_1 dhe a mund të njehsojmë marrëdhënien e masës së planetit ndaj masës së Diellit. Në këtë mënyrë Njutni në „Principe" e ka njehsuar masën e Tokës, Jupiterit dhe Saturnit. Aso kohe Urani dhe Neptuni kanë qenë të panjohur sikurse edhe satelitët e Marsit.

10. PROBLEMI I „n" TRUPAVE

Gjatë shqyrtimit të lëvizjes së planetëve është e nevojshme që përveç forcës tërheqëse me të cilën vepron Dielli në to të merret në konsiderim edhe tërheqja e tyre reciproke. Ky problem njihet si problem i „n" trupave.

Që problemin ta shprehim në gjuhën e matematikës vektorët e pozitave të masave $m_1, m_2, m_3 \ldots r_n$. ndaj një pike O të sistemit koordinat të cilin do ta mendojmë të palëvizshëm do t'i shënojmë me $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3 \ldots \vec{r}_n$. Pozita relative e masës m_k ndaj masës m_i shprehet me vektorin:

$$\vec{r}_{ik} = \vec{r}_k - \vec{r}_i$$

Nëse me s_{ik} shënojmë intensitetin e vektorit $\vec{r}_{ik}$, atëherë herësi $\frac{r_{ik}}{s_{ik}}$ paraqet vektorin unitar nga masa m_i kah masa m_k. Meqë gjatësitë s_{ik} dhe s_{ki} gjithmonë janë pozitive, do të vlejë:

$$s_{ik} = s_{ki}$$

Nga kjo rrjedh se masa m_k vepron në masën m_i me forcën:

$$G \frac{m_i m_k}{s^2_{ik}} \frac{\vec{r}_{ik}}{s_{ik}} = G\, m_i m_k \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_i}{s^3_{ik}}$$

Forcat tërheqëse të masave tjera $m_1, m_2 \ldots m_n$ në masën m_i i fitojmë nëse në shprehjen e fundit indeksin k e zëvendësojmë me 1, 2, 3 . . . n. Nëse marrim në shqyrtim të gjitha forcat të cilat veprojnë në masën m_i atëherë fitohet ky ekuacion diferencial i lëvizjes së saj:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = G \sum_k m_i m_k \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_i}{s^3_{ik}}$$

Nën shenjë të shumës duhet të merren në konsiderim të gjitha masat e sistemit përveç masës m_i.

Ekuacioni i fundit në të njëjtën kohë na paraqet ekuacionin e lëvizjes së çfarëdo mase $m_1, m_2, m_3 \ldots m_n$ nëse në vend të indeksit „i" shkruajmë indeksit 1, 2, . . . n. Prandaj „n" ekuacionet vektoriale të shrehura në formën:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = G \sum_k m_i m_k \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_i}{s^3_{ik}} \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{1}$$

paraqesin ekuacionet diferenciale të lëvizjes së masave $m_1, m_2 \ldots m_n$. Të gjitha këto ekuacione diferenciale janë të rendit të dytë dhe se integrimi i tyre i plotë do të jepë $2n$ ekuacione vektoriale apo $6n$ ekuacione skalare, në të cilat vektorët e pozitës dhe vektorët e shpejtësive të „n" trupave do të shprehen si funksion të kohës t. Me aparat matematik është e mundur të përfitohen vetëm tri integrale vektoriale dhe një skalar nga të gjitha integralet pa marr parasysh numrin „n" të trupave qiellorë. Këto integrale njihen si integrale të përgjithshme të problemit të „n" trupave.

11. INTEGRALET E PËRGJITHSHME TË PROBLEMIT TË „n" TRUPAVE

Në ekuacionet (1) çdo kombinim i dy masave arbitrare m_i dhe m_k paraqitet dy herë. Këtë mund ta kuptojmë lehtë nga fakti se kur në anën e majtë të (1) gjendet shprehja:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r_i}}{dt^2}$$

atëherë në anën e djathtë paraqitet anëtari: $Gm_i m_k \frac{\vec{r_k} - \vec{r_i}}{s^3_{ik}}$ ndërsa, kur

në anën e majtë gjendet shprehja:

$$m_k \frac{d^2 \vec{r_i}}{dt^2}$$

në anën e djathtë do të kemi anëtarin: $Gm_i m_k \frac{\vec{r_i} - \vec{r_k}}{s^3_{ik}}$

Meqë $s_{ik} = s_{ki}$, atëherë të gjitha çiftet e anëtarëve prej të cilëve përbëhet ana e djathtë e ekuacioneve të larta paraqitet me këto çifte:

$$Gm_i m_k \frac{\vec{r_k} - \vec{r_i}}{s^3_{ik}} \text{ dhe } Gm_i m_k \frac{\vec{r_i} - \vec{r_k}}{s^3_{ik}}$$

Nëse kërkojmë shumën e n ekuacioneve (1), atëherë ana e djathtë mund të shndërrohet në çifte, kështu që çdonjëri prej tyre do të jetë i barabartë me:

$$Gm_i m_k \frac{\vec{r_k} - \vec{r_i}}{s^3_{ik}} + Gm_i m_k \frac{\vec{r_i} - \vec{r_k}}{s^3_{ik}} = 0$$

Në këtë mënyrë ana e djathtë e ekuacioneve (1) do të jetë e barabartë me zero. Fitojmë:

$$\sum m_i \frac{d^2 \vec{r_i}}{dt^2} = 0 \tag{2}$$

Do t'i shumëzojmë ekuacionet (1) me radhë me vektorët e pozitës $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \ldots \vec{r_n}$, në mënyrë vektoriale dhe i mbledhim. Në shumën e anës së djathtë çdo çift gjegjës i anëtarëve do të jepë:

$$G \frac{m_i m_k}{s^3_{ik}} [\vec{r}_i \times (\vec{r}_k - \vec{r}_i) + \vec{r}_k \times (\vec{r}_i - \vec{r}_k)] =$$

$$= G \frac{m_i m_k}{s^3_{ik}} [\vec{r}_i \times \vec{r}_k + \vec{r}_k \times \vec{r}_i] = 0$$

Duke u bazuar në këtë ana e djathtë e (1) do të jetë e barabartë me zero. Do të kemi:

$$\sum_i m_i \left(\vec{r}_i \times \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \right) = 0 \qquad (3)$$

Nëse ekuacionet (1) i shumëzojmë me radhë, në mënyrë skalare me $\vec{dr}_1, \vec{dr}_2 \ldots \vec{dr}_n$ dhe i mbledhim në shumën e anës së djathtë çiftet e përmendura do të jenë:

$$G \frac{m_i m_k}{s^3_{ik}} [(\vec{r}_k - \vec{r}_i) \vec{dr}_i + (\vec{r}_i - \vec{r}_k) \vec{dr}_k] =$$

$$= - G \frac{m_i m_k}{s^3_{ik}} (\vec{r}_k - \vec{r}_i) (\vec{dr}_k - \vec{dr}_i)$$

Meqë vlenë

$$(\vec{r}_k - \vec{r}_i) (\vec{dr}_k - \vec{dr}_i) = \vec{r}_{ik} \vec{dr}_{ik} = s_{ik} ds_{ik}$$

çiftet do të reduktohen në:

$$- G \frac{m_i m_k}{s^2_{ik}} ds_{ik}$$

dhe fitojmë:

$$\sum_i m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \vec{dr}_i = - G \sum_i \sum_k \frac{m_i m_k}{s^2_{ik}} ds_{ik} \qquad (4)$$

Në shumën e dyfishtë në anën e djathtë paraqitet çdo kombinim i masave m_i dhe m_k vetëm një herë, meqë çdonjëri prej çifteve të larta ka dhënë nga një anëtar.

Ekuacionet diferenciale të përfituara (2), (3) dhe (4), lehtë mund të integrohen. Fillojmë nga (2) i cili pas integrimit të parë do të ketë formën:

$$\sum_i m_i \frac{d\vec{r_i}}{dt} = \vec{B} \tag{5}$$

ku me $\vec{B}$ kemi shënuar një vektor konstant i cili nuk varet nga koha. E integrojmë edhe një herë shprehjen e fundit dhe fitojmë:

$$\sum_i m_i \vec{r_i} = \vec{D} + \vec{B}t \tag{6}$$

ku vektori $\vec{D}$ gjithashtu nuk varet nga koha.

Që të integrojmë (3) fillojmë nga shprehja:

$$\vec{r_i} \times \frac{d^2 \vec{r_i}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r_i} \times \frac{d\vec{r_i}}{dt}\right)$$

zëvendësojmë në (3)

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \left(\vec{r_i} \times \frac{d\vec{r_i}}{dt}\right) = 0$$

dhe integrojmë

$$\sum_i m_i \left(\vec{r_i} \times \frac{d\vec{r_i}}{dt}\right) = 2\vec{C} \tag{7}$$

ku $\vec{C}$ gjithashtu është vektor konstant.

Edhe ekuacioni (4) lehtë mund të integrohet. Në të vërtetë ana e djathtë e tij paraqet diferencialin e shprehjes skalare:

$$U = G \sum_i \sum_k \frac{m_i m_k}{s_{ik}} \tag{8}$$

në të cilin çdo kombinim i masave m_i dhe m_k paraqitet vetëm një herë. Skalari U quhet funksion i forcës së sistemit.

Meqë

$$\frac{dr_i}{dt} = \vec{v_i} \tag{9}$$

paraqet vektorin e shpejtësisë së masës m_i dhe pasi vlen

$$\frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \, d\vec{r}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt} \, d\vec{r}_i = \vec{v}_i \, d\vec{v}_i$$

ekuacioni (4) do të ketë formën:

$$m_i \vec{v}_i \, d\vec{v}_i = Ud$$

dhe pas integrimit fitojmë:

$$\frac{m_i v_i^2}{2} = U + h \qquad (10)$$

ku me h kemi shënuar konstanten e integrimit.

Integralet e fituara (5), (6), (7) dhe (10) të cilat së bashku mund të zëvendësohen me dhjetë integrale skalare quhen integralet e përgjithshme të problemit të „n" trupave.

Të dy integralet (5) dhe (6) quhen integralet e qendrës së masës. Vektori i pozitës S i qendrës së masave m_1, $m_2 \ldots m_n$ shprehet me ekuacionin vektorial:

$$\vec{S} \sum m_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \qquad (11)$$

Derivojmë dy herë sipas kohës dhe fitojmë:

$$\frac{d^2 \vec{S}}{dt^2} \sum_i m_i = \sum_i m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$$

shfrytëzojmë (2):

$$\frac{d^2 \vec{S}}{dt^2} = 0$$

Shprehja e fundit paraqet vektorin e nxitimit të qendrës së masës dhe pasi gjithmonë është i barabartë me zero, kjo qendër lëviz në mënyrë të njëtrajtshme drejtvizore. Nëse me $\vec{v}$ shënojmë vektorin e shpejtësisë së kësaj qendre, atëherë nga derivati i parë i (11) do të kemi:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} \sum_i m_i = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

ose

$$\vec{v} \sum_i m_i = \sum_i m_i \frac{d\vec{r_i}}{dt}$$

kurse nga (6) dhe (11) rrjedh:

$$\vec{S} \sum_i m_i = \vec{D} + \vec{B}t \tag{12}$$

Ky është ekuacioni i lëvizjes së njëtrajtshme drejtvizore të qendrës së sistemit, ku t luan rolin e parametrit.

Integrali vektorial (7) quhet integral i sipërfaqes. Sikurse edhe në problemin e dy trupave, prodhimi vektorial:

$$\vec{r_i} \times \frac{dr_i}{dt}$$

paraqet dyfishin e sipërfaqes të cilën e përshkruan vektori i pozitës $\vec{r_i}$ i masës m_i në njësi të kohës. Ekuacioni (7) tregon se shuma e sipërfaqeve e shumëzuar me masat gjegjëse të trupave është një vektor konstant.

II. OSHILIMET

1. OSHILIMET HARMONIKE

a) Oshilatori linear

Pika materiale e lidhur për një pikë të caktuar të hapësirës me forcë e cila është proporcionale me largësinë nga kjo pikë quhet oshilator. Pika e hapësirës ndaj së cilës tërhiqet pika materiale quhet pozitë e ekuilibrimit të oshilatorit. Kur kjo gjendet në pozitë të ekuilibrimit, atëherë në të nuk vepron forca. Largësia e pikës materiale nga pozita e ekuilibrimit quhet elongacion i oshilatorit. Nga veprimi i forcës e cila oshilatorin e lidhë me pozitë të ekuilibrimit, pika materiale mund të largohet deri te ndonjë pikë maksimale të cilën e quajmë amplitudë të oshilimit. Lëvizja të cilën e kryen oshilatori e quajmë oshilim.

Së pari do të shqyrtojmë rastin më të thjeshtë te e cila pika materiale mund të lëvizë vetëm nëpër një drejtim. Do të kemi oshilatorin linear. Për këtë oshilator do të përcaktojmë varshmërinë e elongacionit nga koha.

Do të vendosim qendrën e sistemit të koordinatave në pozitën e ekuilibrimit të oshilatorit me boshtin x në drejtim të oshilimit. Duke shqyrtuar lëkundjen në këtë sistem të koordinatave elongacioni do të jetë i barabartë me abshizën x. Sipas definicionit forca është proporcionale me elongacionin, prandaj mund të shkruajmë:

$$f = -kx \tag{1}$$

ku me k kemi shënuar një konstante proporcionaliteti e cila ka këtë kuptim fizik: Kjo është forcë kur pika materiale e ka elongacionin një njësi. Parashenja minus duhet të shkruhet, meqë forca gjithmonë vepron kah pozita e ekuilibrimit, kurse ky kah është i kundërt me elongacionin e oshilimit.

Sipas ligjit të Njutnit për forcë do të shkruajmë prodhimin e masës dhe e nxitimit:

$$m\dot{v} = -kx \tag{2}$$

Shënojmë shkurtimisht

$$\frac{k}{m} = \omega_o^2 \tag{3}$$

dhe nga (2) fitojmë

$$\dot{v} + \omega_o^2 x = 0 \tag{4}$$

Për të gjetur varshmërinë e elongacionit nga koha këtë ekuacion diferencial duhet ta integrojmë. Për këtë qëllim do ta shumëzojmë me $2v = 2\dot{x}$. Fitojmë:

$$2v\,\dot{v} + 2\omega_o^2 x\,\dot{x} = 0$$

Integrojmë:

$$v^2 + \omega_o^2 x^2 = A \tag{5}$$

ku me A kemi shënuar konstanten e integrimit. Këtë do ta zëvendësojmë me një konstante tjetër e cila ka kuptim fizik. Kur pika materiale gjendet në largësi maksimale nga pozita ekuilibruese, $x = a$ ajo do të ndalet për një kohë të shkurtër që të ndërrojë kahun e lëvizjes. Në këtë pozitë shpejtësia e saj është e barabartë me zero. Zëvendësojmë në (5) dhe fitojmë:

$$A = \omega_o^2 a^2$$

Vlerën e fituar e zëvendësojmë në (5) dhe shpejtësinë e shkruajmë si derivat të koordinatës sipas kohës:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \omega_o \left(a^2 - x^2\right)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = \omega_o \sqrt{a^2 - x^2}$$

I ndajmë ndryshoret:

$$\omega_o\, dt = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}}$$

dhe me integrim fitojmë:

$$\omega_o t + \delta = arc \sin \frac{x}{a}$$

ose

$$x = a \sin\left(\omega_o t + \delta\right) \tag{6}$$

Elongacioni ndërron sikurse funksioni sinus dhe do t'i ketë të gjitha vlerat prej — a deri në a, ku a është amplituda e lëkundjes. Kjo në shprehje është paraqitur si konstante e integrimit. Konstantja e dytë e integrimit δ quhet konstante e fazës.

Pika materiale kryen lëvizje rreth pozitës së ekuilibrimit. Elongacioni përshkruhet me funksion sinus. Këto lëkundje quhen lëkundje sinusoidale ose oshilime harmonike.

Për të caktuar kuptimin fizik të madhësisë ω_o të cilën formalisht e kemi paraqitur me (3) duhet theksuar se oshilimi është lëvizje periodike e cila përsëritet pas një kohe T. Kjo kohë quhet periodë e lëkundjes. Kur kohën t e zmadhojmë në $t + T$, duhet të fitojmë të njëjtin elongacion sikurse në kohën t. Pasi perioda e funksionit sinus është 2π, edhe argumentet e funksionit sinus duhet të ndryshojnë për 2π. Pra,

$$\omega_o (t + T) + \delta = \omega_o t + \delta + 2\pi$$

ose

$$\omega_o T = 2\pi$$

d.m.th.

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T} \tag{7}$$

Në vend të periodës T, mund të paraqesim vlerën e saj reciproke

$$\frac{1}{T} = \nu$$

Këte madhësi e quajmë frekuencë dhe është e barabartë me numrin e oshilimeve të kryera në një sekondë. Me ndihmën e frekuencës, (7) mund të shkruhet në formën:

$$\omega_o = 2\pi\nu \tag{8}$$

Kuptojmë se ω_o është numri i oshilimeve të kryera në 2π sekonda. Kjo madhësi quhet frekuencë rrethore apo ciklike. Tani mund ta njehsojmë periodën e lëkundjeve. Sipas (3) është:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

kurse sipas (7)

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

dhe për periodë fitojmë formulën:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (9)$$

Në zgjidhjen e përgjithshme (6) paraqiten edhe dy konstante të integrimit. Nga aspekti matematik ato janë plotësisht arbitrare. Që t'i përcaktojmë për lëvizje konkrete fizike, duhet të dijmë gjendjen fillestare të lëvizjes së pikës materiale. Të supozojmë se në fillim të lëvizjes pika materiale është nisur nga pozita ekuilibruese me shpejtësi të njohur v_o. Pra,

$$\text{për } t = 0,\ x = 0 \text{ dhe } \dot{x} = v_o \qquad (10)$$

Pasi të zëvendësojmë në (6) fitojmë:

$$0 = a \sin\delta$$

$$v_o = \omega_o a \cos\delta$$

Nga ekuacioni i parë fitojmë: $\delta = 0$, kurse nga i dyti: $a = \frac{v_o}{\omega_o}$ dhe përfundimisht fitojmë:

$$x = \frac{v_o}{\omega_o} \sin \omega_o t \qquad (11)$$

Zgjidhjen (6) do ta paraqesim edhe në një formë e cila është mjaft karakteristike. Për këtë arsye e zhvillojmë formulën (6):

$$x = a \sin \omega_o t \cos\delta + a \cos \omega_o t \sin\delta$$

Në vend të a dhe δ paraqesim dy konstante të reja me zëvendësim

$$A = a \cos\delta \qquad B = a \sin\delta$$

dhe zgjidhjen e fitojmë në formën:

$$x = A \sin \omega_o t + B \cos \omega_o t \qquad (12)$$

Shohim se oshilimet (6) mund të shprehen si superponim të dy oshilimeve harmonike, njërës të shprehur me funksionin sinus, kurse tjetrës me funksionin kosinus. Funksionet $\sin \omega_o t$ dhe $\cos \omega_o t$ e kënaqin ekuacionin diferencial të cilin mud ta shkruajmë në formën:

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0 \qquad (13)$$

Kët funksione quhen integrale partikulare të ekuacionit diferencial (13). Integrali i përgjithshëm (12) i ekuacionit diferencial (13) paraqitet si kombinim linear i këtyre integraleve partikulare. Kjo është rregull e përgjithshme matematike e cila vlen për të gjitha ekuacionet lineare diferenciale.

b) Mënyra e dytë e zgjidhjes së oshilatorit linear

Ekuacionin diferencial të oshilatorit linear

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

do ta zgjidhim në një mënyrë tjetër, e cila përdoret për zgjidhjen e problemeve të kësaj natyre. E derivojmë edhe një herë sipas kohës t

$$\dddot{x} + \omega_o^2 \dot{x} = 0$$

zëvendësojmë

$$y = \dot{x}$$

dhe fitojmë

$$\ddot{y} + \omega_o^2 y = 0$$

Kemi fituar të njëjtin ekuacion diferencial prej të cilit edhe kemi filluar. Shohim se funksioni $x(t)$ e kënaq të njëjtin ekuacion diferencial sikurse edhe derivati i tij y. Kjo është e mundur atëherë kur kemi të bëjmë me funksion eksponencial. Prandaj do të marrim si zgjidhje të ekuacionit diferencial funksionin eksponencial:

$$x = e^{\rho t}$$

Ka ngelur të përcaktojmë konstanten ρ. Zëvendësojmë funksionin e propozuar në ekuacion diferencial dhe pasi të thjeshtësojmë me faktorin eksponencial fitojmë ekuacionin karakteristik algjebrik:

$$\rho^2 + \omega_o^2 = 0$$

Zgjidhja e tij është:

$$\rho = \pm\, i\omega_o$$

kurse integralet partikulare:

$$x_1 = e^{i\omega_o t} \qquad x_2 = e^{-i\omega_o t}$$

Integrali i përgjithshëm fitohet si kombinim linear i integraleve partikulare:

$$x = C\, e^{i\omega_o t} + D\, e^{-i\omega_o t} \tag{14}$$

I përcaktojmë konstantet e integrimit duke shfrytëzuar konditat fillestare (10). Fitojmë:

$$O = C + D$$

$$v_o = i \cdot (C - D)$$

Nga ekuacioni i parë $C = - D$, kurse nga i dyti $C = \dfrac{v_o}{2i\omega_o}$

Zëvendësojmë në (14) dhe fitojmë:

$$x = \frac{v_o}{\omega_o} \, \frac{e^{i\omega_o t} + e^{-i\omega_o t}}{2i}$$

ose

$$x = \frac{v_o}{\omega_o} \sin \omega_o t \qquad (15)$$

Mund të paraqesim kondita tjera fillestare të lëvizjes dhe të fitojmë shprehje tjetër për elongacion. Le të jetë i zhvendosur oshilatori për a nga pozita ekuilibruese dhe është lëshuar pa shpejtësi fillestare. Pra,

$$\text{për } t = 0,\ x = a \text{ dhe } \dot{x} = 0$$

Nga (14) fitojmë

$$a = C + D$$

$$0 = i\,(C - D)$$

ose

$$C = D = \frac{a}{2}$$

dhe prapë zëvendësojmë në (14)

$$x = a\,\frac{e^{i\omega_o t} + e^{-i\omega_o t}}{2}$$

ose

$$x = a \cos \omega_o t \qquad (16)$$

Rezultati i fituar tregon se nga konditat fillestare të lëvizjes varet se a do të kryhet oshilimi sipas funksionit sinus apo kosinus. Kur oshilatori vihet në veprim asisoji që së pari të zhvendoset dhe pastaj të lëshohet pa shpejtësi fillestare, atëherë elongacioni përshkruhet me

funksion kosinusi, por kur në pozitën ekuilibruese i jipet një shpejtësi fillestare, atëherë elongacioni shprehet me funksionin sinusi. Nëse oshilatori vihet në veprim në çfarëdo mënyre tjetër, atëherë në shprehjen për elongacion paraqiten të dy funksionet.

c) Oshilatori tredimenzional

Lirohemi nga supizimi se oshilimi mund të kryhet vetëm në një drejtim. Tani supozojmë se ajo mund të ketë zhvendosje në çfarëdo kahu. Edhe në këtë rast forca e cila vepron në pikën materiale do të veprojë gjithmonë kah pozita ekuilibruese dhe do të jetë proporcionale me zhvendosjen nga kjo pozitë. Kësisoji kemi të bëjmë me oshilatorin tredimenzional. Si shembull të kësaj force mund t'i cekim forcat elastike. Kur në pikën materiale vepron forca elastike dhe kjo është zhvendosur nga pozita ekuilibruese, atëherë paraqitet lëvizja oshiluese e pikës materiale.

Për shqyrtim analitik të oshilatorit tredimenzional prapë do të vendosim qendrën e sistemit të koordinatave në pozitën ekuilibruese të tij. Elongacionin e përcakton vektori i pozitës së pikës materiale, kurse ligji i lëvizjes në këtë rast shprehet:

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} \tag{17}$$

Duke paraqitur konstanten ω_o sipas (3) fitojmë:

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_o^2\vec{r} = 0 \tag{18}$$

Ky ekuacion diferencial është identik me ekuacionin (13) vetëm se në këtë rast e panjohura është $\vec{r}$. Për këtë arsye fitojmë të njëjtën zgjidhje:

$$\vec{r} = \vec{A}\sin\omega_o t + \vec{B}\cos\omega_o t \tag{19}$$

Në anën e majtë gjendet madhësia vektoriale prandaj edhe anëtarët në anën e djathtë duhet të jenë vektorë. Meqë $\sin\omega_o t$ dhe $\cos\omega_o t$ janë skalarë e vetmja mundësi mbetet që A dhe B të jenë vektorë. Për këte arsye në zgjidhje A dhe B janë paraqitur të karakterit vektorial.

Shprehja (19) tregon se vektori i pozitës së pikës materiale mund të paraqitet si shumë e dy vektorëve: $\vec{A}\sin\omega_o t$ dhe $\vec{B}\cos\omega_o t$ të cilët kanë kahe konstante dhe vetëm gjatë kohës mund të ndërrojnë intensitetin e vet. E dijmë se kahet e dy vektorëve gjithmonë përcaktojnë një rrafsh dhe se shuma e tyre duhet të qëndrojë në të. Nga kjo rrjedh se vektori i pozitës $\vec{r}$ gjithmonë qëndron në një rrafsh çka tregon se edhe pika materiale duhet të lëvizë në një rrafsh. Kjo është në pajtim

me faktin se te lëvizjet oshiluese vepron një forcë qendrore, një forcë e drejtuar gjithmonë kah pozita ekuilibruese. Kemi treguar se lëvizja nën veprimin e forcës qendrore kryhet në një rrafsh e kështu ndodh edhe te oshilatori.

Që të përcaktojmë vijën të cilën e përshkruan pika materiale në këtë rrafsh duhet zgjedhur disi fillimin e matjes së kohës. Më së lehti është që kohën ta masim kur oshilatori kalon nëpër pikën më të largët nga pozita ekuilibruese. Për këtë arsye duhet përcaktuar maksimumin e katrorit të vektorit të pozitës. Intensitetin e largësisë së pikës materiale nga pozita ekuilibruese e përcakton $\sqrt{\vec{r}^2}$, prandaj mund të gjejmë maksimumin e r^2. Sipas (13) kemi:

$$r^2 = A^2 \sin^2\omega_o t + B^2 \cos^2\omega_o t + \vec{A}\vec{B} \sin^2\omega_o t$$

derivati i kësaj shprehje duhet të barazohet me zero:

$$2\omega_o \ [(A^2 - B^2) \sin 2\omega_o t + 2\vec{A}\vec{B} \cos 2\omega_o t] = 0$$

Kohën fillojmë ta masim nga kjo pozitë ekstremale e oshilatorit. Në këtë moment $t = 0$ kurse shprehja e mëparshme do të kënaqet për

$$\vec{A}\vec{B} = 0$$

E dijmë se prodhimi skalar i dy vektorëve është i barabartë me zero vetëm nëse ata qëndrojnë normal njëri ndaj tjetrit. Në kahe të këtyre vektorëve do të vendosim boshtet x dhe y të sistemit të koordinatave kënddrejta. Për këtë rast do të kemi:

$$\vec{A} = \vec{i} A$$

$$\vec{B} = \vec{j} B$$

ku me i dhe j kemi shënuar vektorët unitarë në kahe të boshteve. Fitojmë:

$$\vec{r} = \vec{i} A \sin\omega_o t + \vec{j} B \cos\omega_o t$$

Vektori $\vec{r}$ në këtë sistem të koordinatave do të ketë komponentet:

$$x = A \sin\omega_o t$$

$$y = B \cos\omega_o t \qquad (20)$$

Që të gjejmë lakoren nëpër të cilën lëviz pika materiale nga (20) duhet të eliminohet koha. Pasi të ngrisim në katror dhe t'i mbledhim anë për anë fitojmë:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \tag{21}$$

Pra pika materiale te oshilatori tredimenzional lëviz nëpër elipsë. Me fjalë të tjera oshilimet eliptike paraqesin formën më të përgjithshme të oshilimeve.

d) Zbërthimi i oshilimeve eliptike në komponente lineare

Do të marrim tani kondita të përgjithshme fillestare. Le të jetë në kohën $t = 0$, $\vec{r} = \vec{r}_o$ dhe shpejtësia fillestare $\dot{\vec{r}} = \vec{v}_o$. Zëvendësojmë në (19) dhe fitojmë:

$$\vec{r}_o = \vec{B} \qquad \vec{v}_o = \omega_o \vec{A}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_o \cos\omega_o t + \frac{\vec{v}_o}{\omega_o} \sin\omega_o t \tag{22}$$

Boshtin x e vendosim ashtu që të përputhet me $\vec{r}_o$. Atëherë mund të shkruajmë:

$$\vec{r}_o = \vec{i}\, x_o$$

Shpejtësia fillestare le të ketë çfarëdo kahu. Do ta zhvillojmë në komponente

$$\vec{v}_o = \vec{i}\, v_{ox} + \vec{j}\, v_{oy}$$

dhe zëvendësojmë në (22):

$$\vec{r} = \vec{i} \left(x_o \cos\omega_o t + \frac{v_{ox}}{\omega_o} \sin\omega_o t \right) + \vec{j}\, \frac{v_{oy}}{\omega_o} \sin\omega_o t$$

Shënojmë shkurtimisht:

$$\frac{v_{oy}}{\omega_o} = b$$

Do të paraqesim konstantet e reja a dhe δ me zëvendësim:

$$x_o = a \sin\delta \qquad \frac{v_{ox}}{\omega_o} = a \cos\delta$$

dhe shprehja në kllapa kalon në

$$a(\sin\delta \cos\omega_o t + \cos\delta \sin\omega_o t) = a \sin(\omega_o t + \delta)$$

Prandaj vlen

$$\vec{r} = \vec{i}\, a \sin(\omega_o t + \delta) + \vec{j}\, b \sin\omega_o t$$

prej nga vektori i pozitës i ka komponentet:

$$x = a \sin(\omega_o t + \delta)$$

$$y = b \sin\omega_o t \qquad (23)$$

Nga (23) shohim se oshilimi eliptik përbëhet nga dy oshilime lineare me frekuenca të njëjta, por me amplituda të ndryshme dhe me një ndryshim faze δ.

Nëse ndryshimi i fazës δ i ka vlerat O dhe π atëherë vlen:

$$x = \pm\, a \sin\omega_o t$$

dhe kur i pjesëtojmë:

$$\frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a}$$

fitojmë ekuacionin e drejtëzës. Pra, kur në mes të komponenteve nuk ka ndryshim faze ose ky ndryshim është π, atëherë lëkundja eliptike degjenerohet në lëkundje lineare.

Rast tjetër kemi kur $\delta = \frac{\pi}{2}$ dhe të dy amplitudat janë të njëjta $a = b$. Atëherë (23) kalon në:

$$x = a \cos\omega_o t \qquad (24)$$

$$y = a \sin\omega_o t$$

ose

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad (25)$$

Në këtë rast elipsa shndërrohet në rreth.

e) Energjia e lëvizjes oshiluese

Lëvizja oshiluese kryhet nën veprimin e një force konservative. Këtë do ta vërtetojmë së pari. Forca e cila e lidh pikën materiale me pozitën ekuilibruese është:

$$\vec{f} = -k\vec{r} \tag{26}$$

Rotori i saj është i barabartë me zero:

$$rot\,\vec{f} = -k\,rot\,\vec{r} = 0$$

meqë $rot\,\vec{r} = 0$

Meqë forca është konservative, kjo mund të shprehet me ndihmën e potencialit të saj. Që të përcaktojmë këtë potencial fillojmë nga formula e njohur:

$$\vec{f} = -grad\,U$$

zëvendësojmë në (26) dhe shumëzojmë me $\vec{dr}$

$$grad\,U\,\vec{dr} = k\vec{r}\,\vec{dr}$$

integrojmë duke dijtur se vlen $grad\,U\,\vec{dr} = dU$

$$U = \frac{1}{2}kr^2$$

Nëse zëvendësojmë vlerën për $k = m\,\omega_o^2$ mund të shkruajmë:

$$U = \frac{1}{2}m\,\omega_o^2 r^2 \tag{27}$$

Pika materiale e cila lëkundet e ka edhe energjinë e vet kinetike që shprehet me formulën:

$$T = \frac{1}{2}m\,\dot{r}^2 \tag{28}$$

Energjia totale e oshilatorit është:

$$E = T + U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \omega_o^2 r^2) \tag{29}$$

Për vektor të pozitës kemi shprehjen:

$$\vec{r} = \vec{A}\cos\omega_o t + \vec{B}\sin\omega_o t$$

Nga derivati sipas kohës fitojmë:

$$\dot{\vec{r}} = -\vec{A}\,\omega_o \sin\omega_o t + \vec{B}\,\omega_o \cos\omega_o t$$

prej nga fitojmë:

$$\dot{r}^2 + \omega_o^2 r^2 = \omega_o^2 (A^2 + B^2)$$

dhe për energji fitojmë:

$$E = \frac{m}{2}\,\omega_o^2 (A^2 + B^2)$$

Shohim se energjia e oshilatorit është konstante dhe proporcionale me katrorin e amplitudës së lëkundjes.

2. OSHILIMET E SHUARA

a) Zgjidhja e ekuacionit të lëvizjes

Deri më tani është supozuar se në pikë materiale e cila oshilon vepron vetëm forca që atë e lidh me pozitën ekuilibruese. Në këtë rast pika mund të oshilojë lirisht, prandaj oshilimet e këtilla quhen oshilime të lira. Por nëse oshilimet kryhen në ndonjë mjedis rezistues, ky mjedis do të veprojë në lëvizje të tij. Oshilatori vazhdimisht do të harxhojë një pjesë të energjisë së vet për zotërimin e rezistencës së mjedisit. Meqë energjia varet prej amplitudës së lëkundjes, në mjedis rezistues amplituda do të zvogëlohet vazhdimisht. Oshilimet në mjedis rezistues quhen oshilime të shuara, nëse në oshilator nuk vepron ndonjë forcë e jashtme.

E dijmë se forca e rezistencës së mjedisit është proporcionale me shpejtësinë e lëvizjes së trupit. Këtë forcë do ta shkruajmë në formën $\vec{f}_r = -\alpha v$, ku α është koeficient i rezistencës së mjedisit dhe paraqet forcën me të cilën mjedisi vepron në trup kur ky e ka shpejtësinë njënjësi.

Më parë kemi theksuar se çdo oshilim mund të përbëhet prej dy oshilimeve lineare, prandaj do të jetë e mjaftueshme të shqyrtojmë vetëm oshilimet lineare.

Boshtin x të sistemit koordinat e vendosim në kah të oshilimit me qendër në pozitën ekuilibruese të tij. Në oshilator veprojnë dy forca, forca e cila e lidh me pozitën ekuilibruese dhe forca e rezistencës së mjedisit. Sipas kësaj që u cek, ekuacioni i lëvizjes do jetë:

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$$

ose

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

do të shënojmë shkurtimisht me

$$\frac{k}{m} = \omega_o^2 \text{ dhe } \frac{\alpha}{m} = 2b \qquad (1)$$

dhe për lëvizje shkruajmë:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_o^2 x = 0 \qquad (2)$$

Ky është ekuacion linear diferencial i rendit të dytë me koeficient konstant. Zgjidhja e ka formën eksponenciale:

$$x = e^{\rho t}$$

Zëvendësojmë në (2) dhe thjeshtësojmë me faktorin eksponencial. Fitojmë ekuacionin karakteristik:

$$\rho^2 + 2b\rho + \omega_o^2 = 0 \qquad (3)$$

zgjidhja e tij është:

$$\rho_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_o^2} \qquad (4)$$

kurse integrali i përgjithshëm e ka formën:

$$x = C_1 e^{\rho_1 t} + C_2 e^{\rho_2 t} \qquad (5)$$

Këtu duhet dalluar dy raste të ndryshme, sipas natyrës së rrënjëve të (4), a janë reale apo komplekse.

b) Rasti periodik

Së pari do të marrim në shqyrtim rastin

$$b^2 < \omega_o^2$$

që sipas (1) do të thotë $\alpha < 2\sqrt{km}$. Atëherë madhësia nën rrënjë është negative dhe do të shkruajmë:

$$b^2 - \omega_o^2 = -\omega^2$$

dhe për rrënjët (4) kemi:

$$\rho_{1,2} = - b \pm i\omega$$

Zgjidhja ka formën:

$$x = C_1 e^{-bt} e^{i\omega t} + C_2 e^{-bt} e^{-i\omega t}$$

Në vend të konstanteve të integrimit do të paraqesim dy konstante të reja me zëvendësim:

$$C_1 = \frac{1}{2i} a e^{i\delta} \qquad C_2 = - \frac{1}{2i} a e^{-i\delta}$$

Dhe për zgjidhje do të kemi:

$$x = a e^{-bt} \frac{1}{2i} [e^{i(\omega t + \delta)} - e^{-i(\omega t + \delta)}]$$

Nga formula e Ojlerit fitojmë:

$$x = a e^{-bt} \sin (\omega t + \delta) \qquad (6)$$

Kjo formulë na tregon se pika materiale kryen oshilim me amplitudën

$$A = a e^{-bt}$$

Kjo amplitudë varet prej kohës dhe zvogëlohet sipas funksionit eksponencial. Kështu përfundojmë se në mjedisin rezistues oshilatorit i zvogëlohet amplituda vazhdimisht. Oshilogrami i kësaj lëvizje është paraqitur në fig. 7. Që ta vizatojmë ate së pari duhet vizatuar amplitudën $\pm a e^{-bt}$. Ky është funksion eksponencial zvogëlues që në mënyrë asimtotike i afrohet boshtit të abshisës. Pastaj duhet vizatuar sinusoidën ashtu që vlerat ekstremale të saj duhet të qëndrojnë në vijën e amplitudës.

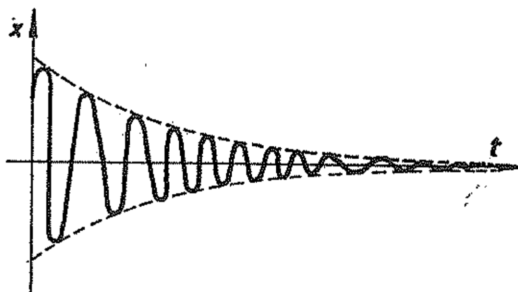


Fig. 7

Si masë për intesitetin e shuarjes mund të marrim marrëdhënien e dy amplitudave sukcesive. Nëse këto i shënojmë me A_1 dhe A_2 do të kemi:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{a e^{-bt}}{a e^{-bt} e^{-bT}} = e^{bT}$$

Si masë për shuarje të oshilimit definohet logaritmi natyror i dy amplitudave sukcesive:

$$\triangle = ln \frac{A_1}{A_2}$$

Këtë madhësi e quajmë dekrement logaritmik i shuarjes së oshilimit. Nga formula e fundit rrjedh se

$$\triangle = bT$$

ose nga (1)

$$\triangle = \frac{\alpha}{2m\nu} \tag{7}$$

Shohim se shuarja është më e madhe kur është më i madh koeficienti i rezistencës së mjedisit dhe kur masa e pikës materiale është e madhe.

Madhësia a dhe δ janë konstante të integrimit: a është amplituda në fillim të lëvizjes, kurse δ konstante e fazës. Këto duhet përcaktuar nga konditat fillestare të lëvizjes. Frekuenca rrethore e oshilimeve të shuara përcaktohet me madhësinë ω, të dhënur me formulën:

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - b^2} = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}} \tag{8}$$

Shprehja e fundit na tregon se frekuenca e oshilimeve të shuara është pak më e vogël se sa frekuenca e oshilimeve të lira. Pra,

$$\omega < \omega_o$$

Zvogëlimi i frekuencës varet nga koeficienti i rezistencës së mjedisit. Nëse ky koeficient është i vogël kështu që katrori i tij mund të mos përfillet, atëherë këto frekuenca nuk ndryshojnë ndërmjet veti.

Sipas rezultatit të fituar teorik oshilatori duhet të kthehet në pozitë ekuilibruese pas një kohe shumë të gjatë. Por nga përvoja e dijmë se oshilatori qetësohet në kohë të caktuar. Kjo shpjegohet me faktin se ligji i varshmërisë së forcës së rezistencës së mjedisit, të cilin e kemi shfrytëzuar për njehsimet tona është i kufizuar vetëm për shpejtësi të caktuar. Te shpejtësitë shumë të vogla, të cilat i arrin oshilatori, para se të shuhet oshilimi i tij vlen tjetër ligj i rezistencës së mjedisit dhe atëherë arrihet deri te qetësimi i plotë i oshilatorit.

c) Rasti aperiodik

Do të shqyrtojmë rastin kur përmbushet kondita $b^2 > \omega_o^2$. Atëherë (4) do të ketë vlerë reale dhe të dy rrënjët janë negative. Që të theksojmë këtë do të shkruajmë:

$$-b+\sqrt{b^2-\omega_o^2}=-\beta_1$$

$$-b-\sqrt{b^2-\omega_o^2}=-\beta_2$$

dhe zgjidhja ka formën

$$x=C_1\,e^{-\beta_1 t}+C_2\,e^{-\beta_2 t} \tag{9}$$

Në këtë rast nuk do të ketë fare lëvizje periodike, sepse elongacioni shprehet si kombinim i dy funksioneve eksponenciale. Themi se kemi rast aperiodik dhe paraqitet kur $\alpha > 2\sqrt{km}$.

Do të paraqesin këto kondita fillestare të lëvizjes

$$\text{në} \quad t=0, \quad x=x_o \quad \text{dhe} \quad \dot{x}=0$$

që shprehin faktin se oshilatori ka filluar oshilimin duke u zhvendosur nga pozita ekuilibruese për x_o dhe është lëshuar pa shpejtësi fillestare. Nga (9) do të kemi:

$$x_o=C_1+C_2$$

$$O=-\beta_1 C_1-\beta_2 C_2$$

prej nga vlerat e konstanteve janë:

$$C_1=\frac{\beta_2 x_o}{\beta_2-\beta_1}, \quad C_2=\frac{-\beta_1 x_o}{\beta_2-\beta_1}$$

Zgjidhjen (9) do ta paraqesim grafikisht. Së pari vizatojmë funksionet $C_1\,e^{-\beta_1 t}$ dhe $C_2\,e^{-\beta_2 t}$. Këto janë funksione eksponenciale rënëse. Meqë i kanë parashenjat e kundërta konstantet C_1 dhe C_2, njëra do të jetë mbi, kurse tjetra nën boshtin e abshisës. Meqë $|\beta_2| > |\beta_1|$ funksioni i dytë bie më shpejt se sa i pari. Paraqitjen grafike të varshmërisë së elongacionit nga koha e fitojmë duke zbritur për çdo vlerë të abshisës t vlerat gjegjëse të ordinatës x.

Këtu duhet dalluar dy raste të mundshme. I pari, kur $|C_1|>|C_2|$. Atëherë fitojmë lakoren e vizatuar në fig. 8. Nga vizatimi shohim se pika materiale afrohet ngadalë kah pozita ekuilibruese. Në rastin tjetër është $|C_1|<|C_2|$ dhe fitojmë lakoren e paraqitur në fig. 9. Shohim se në këtë rast pika materiale nga pozita fillestare shkon kah pozita ekuilibruese, kalon nëpër të, pastaj largohet pak nga ajo duke iu afruar më në fund kësaj pozite në mënyrë asimtotike.

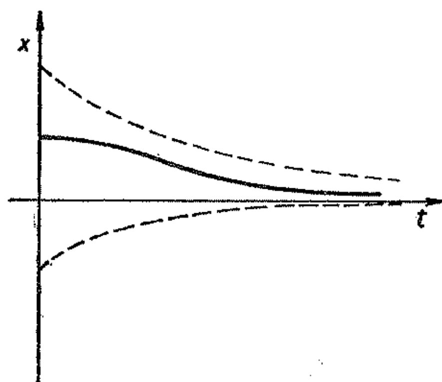


Fig. 8

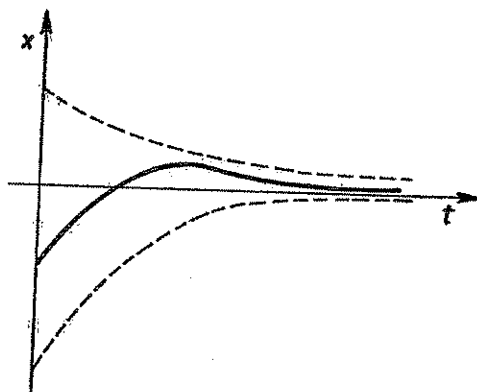


Fig. 9

Ka mbetur të diskutohet rasti $b = \omega_o$. Ekuacioni karakteristik do të ketë vetëm një zgjidhje $\rho = -b$. Sikurse mësohet në matematikë, në këtë rast integrali i përgjithshëm i ekuacionit diferencial do të ketë formën:

$$x = C_1 e^{-bt} + C_2 e^{-bt}$$

Edhe ky rast është aperiodik sepse kemi të bëjmë me funksione reale eksponenciale.

3. OSHILIMET E DETYRUARA PA SHUARJE

a) Zgjidhja matematike

Frekuenca rrethore e oshilimeve të lira $\omega_o^2 = k/m$ quhet frekuencë vetiake e oshilimit. Të mendojmë se në oshilator i cili oshilon me këtë frekuencë vepron një forcë e jashtme e cila gjithashtu ka karakter oshilues. Oshilimet e këtilla quhen oshilime të detyruara.

Së pari do të shqyrtojmë rastin e oshilimit nën veprimin e forcës së jashtme në boshllëk. Prapë njehsimin do ta kryejmë për oshilatorin linear.

Forca e jashtme e karakterit oshilues, varet prej kohës sipas funksionit:

$$f(t) = a \cos\omega t \tag{1}$$

ku: a është amplituda e forcës oshiluese, kurse ω frekuenca rrethore e saj. Kjo frekuencë është plotësisht e pavarur nga frekuenca vetiake e oshilimit.

Përveç forcës (1) në pikë materiale vepron edhe forca e cila atë e lidh me pozitë ekuilibruese, prandaj ekuacioni i lëvizjes do të ketë formën:

$$m\ddot{x} = -kx + a\cos\omega t$$

zëvendësojmë si më parë me:

$$\omega_o^2 = \frac{k}{m}$$

dhe fitojmë

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = \frac{a}{m}\cos\omega t \qquad (2)$$

Prapë kemi fituar ekuacion linear diferencial të rendit të dytë, por nuk është homogjen. Johomogjeniteti i tij qëndron në faktin se në anën e djathtë figuron anëtari $a\cos\omega t$ i cili nuk e përmban funksionin e panjohur x. Për integrim të tij shfrytëzojmë teoremën e njohur nga matematika e cila vërteton se integrali i përgjithshëm i ekuacionit johomogjen është i barabartë me shumën e integralit të përgjithshëm të pjesës gjegjëse homogjene dhe një integrali partikular të ekuacionit johomogjen.

Para se të kalojmë në zgjidhjen e ekuacionit do të njihemi me një operim matematik i cili shfrytëzohet shumë në shqyrtimin e lëvizjeve oshiluese. Shfrytëzojmë formulën:

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$$

Nga kjo shohim se funksioni $\cos\omega t$ është vetëm pjesa reale e funksionit kompleks eksponencial. Shkruajmë:

$$\cos\omega t = Re\, e^{i\omega t}$$

E dijmë se çdo funksion kompleks $z(t)$ mund ta shprehim si shumë të pjesës së tij reale dhe imagjinare:

$$z = x + iy$$

prej nga:

$$x = Re\, z$$

Me ndihmën e kësaj që u cek, ekuacionin diferencial (2) mund ta shkruajmë siç vijon:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_o^2\right) Re\, z = \frac{a}{m} Re\, e^{i\omega t}$$

prandaj mund ta zgjidhim ekuacionin:

$$\ddot{z} + \omega_o^2 z = \frac{a}{m} e^{i\omega t} \qquad (3)$$

Ekuacioni diferencial i fundit ka zgjidhje komplekse, por nga zgjidhja e tij duhet të marrim vetëm pjesën reale x. Në (3) vjen në shprehje funksioni eksponencial, kurse në (2) funksioni trigonometrik, por më lehtë është të njehsojmë me funksion eksponencial sesa trigonometrik.

Do të merremi vesh që në fillim se nuk do të shkruajmë shenjën për pjesën reale të funksionit kompleks, por gjithmonë nga zgjidhja komplekse do të marrim vetëm pjesën reale.

Që ta zgjidhim ekuacionin (3), së pari duhet të gjejmë një integral të tij partikular. Nga forma e tij shohim se (3) mund ta kënaqë vetëm funksioni eksponencial me eksponent $i\omega t$. Prandaj këtë integral do ta marrim në formën:

$$z = C\,e^{i\omega t} \tag{4}$$

Ka mbetur të përcaktojmë konstanten e integrimit C. Zëvendësojmë (4) në (3) dhe fitojmë:

$$(-C\omega^2 + C\omega_o^2)\,e^{i\omega t} = \frac{a}{m}\,e^{i\omega t}$$

prej nga:

$$C = \frac{a/m}{\omega_o^2 - \omega^2} \tag{5}$$

dhe integrali partikularë i ekuacionit (3) e ka formën:

$$z = \frac{a/m}{\omega_o^2 - \omega^2}\,e^{i\omega t}$$

Prej tij duhet të marrim vetëm pjesën reale:

$$x = \frac{a/m}{\omega_o^2 - \omega^2}\cos\omega t \tag{6}$$

Ekuacioni gjegjës homogjen i (2) është:

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

Këtë e kemi zgjidhur më parë dhe për integral të tij të përgjithshëm kemi fituar:

$$x = C_1 \cos\omega_o t + C_2 \sin\omega_o t$$

kurse integrali i përgjithshëm i (2) është:

$$x = \frac{a/m}{\omega_o^2 - \omega^2} \cos\omega t + C_1 \cos\omega_o t + C_2 \sin\omega_o t \qquad (7)$$

Konstantet e integrimit i gjejmë nga kondiitat fillestare. Supozojmë se në fillim të veprimit të forcës së jashtme oshilatori ishte në qetësi në pozitë të ekuilibrimit. Pra,

$$\text{në} \quad t = 0 \quad x = 0 \quad \text{dhe} \quad \dot{x} = 0$$

zëvendësojmë në (7) dhe fitojmë:

$$0 = \frac{a/m}{\omega_o^2 - \omega^2} + C_1 \qquad \text{dhe} \qquad C_2 = 0$$

prej nga:

$$C_1 = - \frac{a/m}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

dhe përfundimisht:

$$x = \frac{a/m}{\omega_o^2 - \omega^2} (\cos\omega t - \cos\omega_o t) \qquad (8)$$

b) Diskutimi i rezultatit

Shprehja (8) na tregon se kemi të bëjmë me lëvizje e cila përbëhet nga dy oshilime harmonike, njëra me frekuencë ω_o, me frekuencën vetiake të oshilatorit, kurse tjetra me frekuencën ω, me frekuencën e forcës së jashtme. Amplituda e këtyre oshilimeve varet prej frekuencës së forcës së jashtme. Në të vërtetë sipas (8) për amplitudë fitojmë:

$$A = \frac{a}{m(\omega_o^2 - \omega^2)}$$

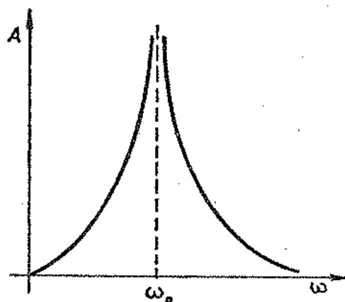


Fig. 10

Kjo formulë tregon se amplituda do të jetë e vogël nëse frekuenca e forcës së jashtme ndryshon shumë nga frekuenca vetiake e oshilatorit. Nëse $\omega = \omega_o$, atëherë amplituda të jetë pa mbarim e madhe. Ky rast është shumë i rëndësishëm dhe quhet rezonancë. Themi se oshilimi i detyruar është në rezonancë me lëkundjet vetiake të oshilatorit. Varshmëria e amplitudës prej frekuencës së forcës së jashtme është paraqitur në fig. 10. Shohim se lakorja e ka asimtotën paralele me boshtin e ordinatës në pikën e abshisës $\omega = \omega_o$.

Do të shqyrtojmë rrjedhjen e oshilimit në rast të rezonancës. Zgjidhjen (8) mund ta paraqesim edhe në formën:

$$x = \frac{a}{m} \frac{\cos\omega t - \cos\omega_o t}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

Në rast të rezonancës këtu duhet të zëvendësohet $\omega_o^2 = \omega^2$, por fitojmë shprehjen e formën 0/0. Sipas rregullës së zgjidhjes së shprehjeve të papërcaktuara, duhet derivuar emëruesin dhe numëruesin sipas ndryshores ω. Pra,

$$x = \frac{a}{m} \left[\frac{-t \sin t}{-2} \right]_{\omega = \omega_o} = \frac{a}{2\omega_o m} t \sin \omega_o t \qquad (9)$$

Kjo shprehje tregon oshilimin me frekuencën ω_o dhe amplitudë të ndryshuar:

$$A = \frac{at}{2m\omega_o}$$

e cila rritet gjatë kohës sikurse funksioni linear. Që të vizatojmë oshilogramin e këtij oshilimi, së pari duhet vizatuar drejtëzën $\frac{at}{2m\omega_o}$ e cila tregon varshmërinë e amplitudës nga koha. Kjo është vizatuar në fig. 11. Pastaj duhet vizatuar sinusoidën në mes të këtyre drejtëzave. Nga oshilogrami shohim se në fillim amplitudat janë të vogla, pastaj rriten me kohën dhe pas një kohe pa mbarim të gjatë bëhen pa mbarim të mëdha.

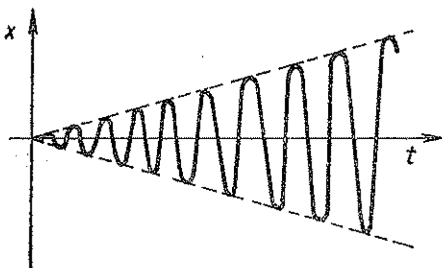


Fig. 11

Përveç rezonancës është mjaft i rëndësishëm edhe oshilimi i cili paraqitet kur frekuenca e forcës së jashtme shumë pak ndryshon nga frekuenca vetiake e oshilimit.

Do të shënojmë shkurtimisht me

$$\omega_o - \omega = 2\delta$$

Atëherë mund të shkruajmë:

$$\cos\omega t - \cos\omega_o t = 2 \sin \frac{\omega + \omega_o}{2} t \sin \frac{\omega_o - \omega}{2} t = 2 \sin\delta t \sin \frac{\omega + \omega_o}{2} t$$

Në këtë rast (8) kalon në:

$$x = \frac{2a}{m(\omega_o^2 - \omega^2)} \sin\delta t \sin \frac{\omega + \omega_o}{2} t \quad (10)$$

Shprehja (10 tregon oshilim harmonik me frekuencën rrethore $\frac{1}{2}(\omega + \omega_o)$ dhe me amplituudë të ndryshuar:

$$A = \frac{2a}{m(\omega_o^2 - \omega^2)} \sin\delta t$$

Edhe kjo amplitudë gjatë kohës ndryshon si një funksion oshilues. Frekuenca rrethore e oshilimit të amplitudës $\delta = \omega_o - \omega$ është shumë e vogël, prandaj perioda e ndërrimit të saj është e madhe. Oshilogrami i këtij oshilimi të detyruar është paraqitur në fig. 12. Së pari është vizatuar sinusoida e ndërrimit të amplitudës. Pastaj është vizatuar sinusoida me frekuencë të madhe e cila vlerat e veta ekstremale i ka në sinuosidën e amplitudës. Oshilogrami tregon se fitojmë lëkundje të cilat periodikisht e ndërrojnë amplitudën e vet, pra ajo periodikisht zmadhohet dhe dobësohet. Këto oshilime quhen oshilime të moduluara. Këto mjaft qartas shprehen te tingulli dhe atëherë dëgjojmë se si toni periodikisht zmadhohet dhe dobësohet.

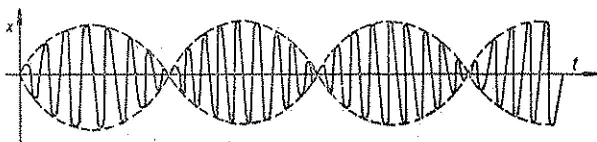


Fig. 12

4. OSHILIMET E DETYRUARA ME SHUARJE

Do të analizojmë oshilimet e detyruara në mjedis rezistues. Atëherë në pikë materiale veprojnë këto tri forca: Forca e cila pikën materiale e lidh me pozitën ekuilibruese — kx, forca e rezistencës së mjedisit — $\alpha\dot{x}$ dhe forca e jashtme oshiluese $a\cos\omega t$. Ekuacioni i lëvizjes do të ketë formën:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = a\cos\omega t$$

Përdorim zëvendësimet e mëparshme dhe shkruajmë ekuacionin për funksion kompleks:

$$\ddot{z} + 2b\dot{z} + \omega_o^2 z = \frac{a}{m} e^{i\omega t} \quad (1)$$

Integrali partikular i këtij ekuacioni e ka formën:

$$z_p = C\, e^{i\omega t}$$

Zëvendësojmë në (1) dhe fitojmë:

$$C(-\omega^2 + 2b\, i\omega + \omega_o^2) = a/m$$

prej nga:

$$C = \frac{a/m}{\omega_o^2 - \omega^2 + i\, 2b\,\omega} \tag{2}$$

kemi fituar konstante komplekse. E dijmë se çdo numër kompleks mund ta shprehim në formën $\rho e^{i\Psi}$, ku ρ është moduli, kurse ψ faza e tij. Kështu do ta shprehim edhe emëruesin e shprehjes (2):

$$\omega_o^2 - \omega^2 + i\, 2b\omega = \rho e^{i\Psi}$$

Në këtë mënyrë kemi paraqitur dy madhësi të reja ρ dhe ψ, por këto lehtë mund t'i shprehim me ndihmën e madhësive të njohura. Kështu katrori i modulit të numrit kompleks është i barabartë me shumën e katrorëve të pjesëve të tij reale dhe imagjinare:

$$\rho = \sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2} \tag{3}$$

Në anën tjetër tangensi i fazës së numrit kompleks është i barabartë me herësin e pjesës imagjinore dhe reale të tij:

$$\mathrm{tg}\psi = \frac{2b\omega}{\omega_o^2 - \omega^2} \tag{4}$$

Kur kësisoji e shprehim emëruesin e formulës (2) do të kemi:

$$C = \frac{a}{m\rho}\, e^{-i\Psi}$$

dhe integrali partikularë i ekuacionit (1) e ka formën:

$$z_p = \frac{a}{m\rho}\, e^{i(\omega t - \Psi)}$$

dhe pjesa e tij reale:

$$x_p = \frac{a\cos(\omega t - \psi)}{m\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \tag{5}$$

Kësaj zgjidhje duhet shtuar edhe integralin e përgjithshëm të ekuacionit homogjen. Ekuacioni homogjen i (1) është identik me ekuacionin diferencial të oshilimeve të shuara, prandaj mundemi menjëherë të shkruajmë zgjidhjen e tij:

$$x_h = a_o e^{-bt} \sin(\omega_1 t + \delta)$$

kurse integrali i përgjithshëm i ekuacionit (1) do të jetë:

$$x = a_o e^{-bt} \sin(\omega_1 t + \delta) + \frac{a}{mp} \cos(\omega t - \psi) \qquad (6)$$

Si rezultat kemi fituar superponimin e dy oshilimeve. Oshilimi i parë është i shuar dhe kryhet me frekuencën rrethore $\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - b^2}$ dhe paraqet frekuencën vetiake të oshilatorit. Oshilimi i dytë nuk është i shuar dhe kryhet me frekuencën e forcës së jashtme. Pas një intervali kohor oshilimi vetiak do të shuhet dhe do të ngelë vetëm oshilimi i detyruar (5) të cilin do ta shqyrtojmë.

Nga (5) shohim se amplituda e oshilimit të detyruar nuk varet nga koha, çka do të thotë se oshilimet nuk do të shuhen edhe pse kryhen në mjedis rezistues. Kjo është e mundur sepse forca e jashtme i jep aq energji oshilatorit, sa humb gjatë çdo periode për zotërimin e forcës së mjedisit.

Amplituda e oshilimeve të detyruara është faktori i cili në (5) qëndron para $\cos\omega t$,

$$A = \frac{a}{m\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \qquad (7)$$

dhe tregon se varet nga frekuenca e forcës së jashtme ω. Në rast të rezonancës $\omega = \omega_o$ amplituda nuk bëhet pa mbarim e madhe sepse në emërues të formulës (7) gjendet anëtari $4b^2\omega^2 = \alpha^2\omega^2/m^2$. Nga prezenca e këtij anëtari i cili varet nga koeficienti i rezistencës së mjedisit emëruesi nuk mund të jetë i barabartë me zero. Kur rezistenca e mjedisit është mjaft e vogël në momentin e rezonancës do të kemi amplitudë të madhe, por të kufizuar. Në mjedise me rezistencë të madhe amplituda mund të jetë mjaft e vogël.

Do të shqyrtojmë varshmërinë e amplitudës së oshilimeve të detyruara nga frekuenca e forcës së jashtme. Kur frekuenca e forcës së jashtme dhe ajo vetiake ndryshojnë shumë në mes veti, emëruesi në (7) është shumë i madh, kurse amplituda shumë e vogël. Këtë rast e fitojmë edhe kur $\omega \gg \omega_o$ edhe kur $\omega \ll \omega_o$. Për këtë arsye në mes tyre duhet të ekzistojë një maksimum, të cilin do ta përcaktojmë. Do të kërkojmë maksimumin e (7) që do të thotë se kërkojmë minimumin e madhësisë nën rrënjë. Pra kemi shprehjen:

$$(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2$$

Derivatin e kësaj shprehje sipas ω e barazojmë me zero. Fitojmë:

$$-4(\omega_o^2 - \omega^2)\omega + 8b^2\omega = 0$$

prej nga rrjedh se vlera ekstreme e amplitudës gjendet te frekuenca:

$$\omega^2_{max} = \omega_o^2 - 2b^2 = \omega_o^2 - \frac{\alpha^2}{2m^2}$$

Ky rezultat na tregon se maksimumi i amplitudës nuk gjindet plotësisht në $\omega = \omega_o$ por nuk është i zhvendosur kah frekuencat e vogla. Zhvendosja e këtij maksimumi varet prej koeficientit të rezistencës së mjedisit. Për intensitet në maksimum fitojmë shprehjen:

$$A_{max} = \frac{a/m}{2b\sqrt{\omega_o^2 - b^2}}$$

Shihet qartas se ky maksimum do të jetë më i madh, sa më i vogël të jetë rezistenca e mjedisit. Varshmërinë e amplitudës së oshilimeve të detyruara prej frekuencës e tregon fig. 13. Lakorja I i përgjigjet mjedisit me rezistencë shumë të vogël. Shohim se maksimumi është mjaft i theksuar dhe gjendet afër frekuencës $\omega = \omega_o$. Lakorja II tregon mjedisin me rezistencë mesatare. Ky maksimum është mjaft i gjerë dhe i dobët. Më në fund lakorja III i përgjigjet mjedisit me rezistencë mjaft të madhe. Në këtë rast maksimumi është shumë i ulët dhe mjaft i gjerë sa që vështirë mund të dallohet.

Nga formula (5) shihet se oshilimet e detyruara nuk lëkunden me të njëjtën fazë sikurse lëkundet forca e jashtme. Në mes të lëkundjeve të tyre ekziston një ndryshim faze ψ i cili përcaktohet me formulën

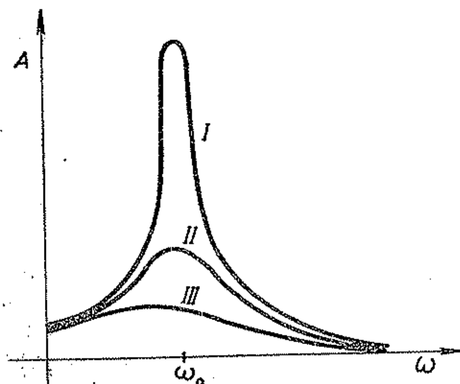


Fig. 13

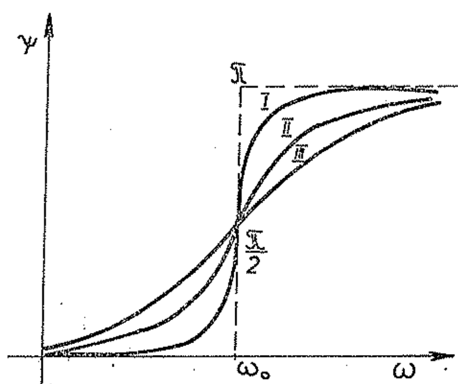


Fig. 14

(4). Ky ndryshim faze deri te $\omega = \omega_o$ është pozitiv, kurse për $\omega > \omega_o$ bëhet negativ. Vlera e tij varet jo vetëm prej frekuencës, por edhe nga rezistenca e mjedisit. Në fig. 14 është vizatuar varshmëria e ndryshimit të fazës nga frekuenca për tri mjedise të ndryshme. Lakoret i përgjigjen rezistencës së mjedisit në fig. 13. Shohim se të gjitha lakoret për $\omega = \omega_o$ e kanë të njëjtin ndryshim faze $\psi = \frac{\pi}{2}$. Vija e ndërprerë i përgjigjet rastit kur rezistenca e mjedisit nuk ekziston fare.

5. LAVJERRËSI MATEMATIK

Lavjerrësi matematik quajmë pikën materiale e cila nën ndikimin e forcës së rëndimit mund të lëvizë nëpër harkun e rrethit vertikal. Duke shfrytëzuar emërtimin në fig. 15 komponentja tangjentore e peshës së pikës materiale do të jetë:

$$f = - mg \sin\varphi$$

Parashenja minus duhet të shkruhet sepse forca f vepron në kah të kundërt të zmadhimit të këndit φ. Forcën do ta shprehim me ndihmën e masës dhe nxitimit:

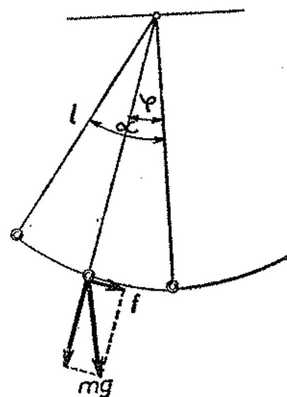


Fig. 15

$$f = m\ddot{s}$$

sepse rruga e kaluar është e barabartë me harkun s të rrethit. Zëvendësojmë dhe fitojmë ekuacionin e lëvizjes:

$$\ddot{s} = - g \sin\varphi$$

E shprehim gjatësinë e harkut me ndihmën e këndit qendror:

$$s = l\varphi$$

ku me l kemi shënuar gjatësinë e perit në të cilin është varë pika materiale. Fitojmë ekuacionin diferencial:

$$\ddot{\varphi} = - \frac{g}{l} \sin\varphi \qquad (1)$$

Shënojmë shkurtimisht me

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \qquad (2)$$

dhe e shumëzojmë ekuacionin diferencial me $2\dot{\varphi}$.

$$2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = - 2\omega^2 \sin\varphi\, \dot{\varphi}$$

integrojmë dhe fitojmë

$$\dot{\varphi}^2 = 2\omega^2 \cos\varphi + C \qquad (3)$$

Konstanten e integrimit e zëvendësojmë me një konstante të re e cila ka kuptim të caktuar fizik. Kur lavjerrësi e ka zhvendosjen maksimale $\varphi = \alpha$ për një çast do të ndalet për të ndërruar kahun e lëvizjes, prandaj në këtë pikë shpejtësia do të jetë e barabartë me zero, pra $\dot{\varphi} = 0$. Zëvendësojmë këto vlera në (3) dhe fitojmë:

$$0 = 2\omega^2 \cos\alpha + C$$

ose

$$C = -2\omega^2 \cos\alpha$$

dhe (3) kalon në

$$\dot{\varphi}^2 = 2\omega^2 (\cos\varphi - \cos\alpha)$$

Zëvendësojmë gjysmëkëndet me ndihmën e formulave trigonometrike.

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

dhe fitojmë:

$$\dot{\varphi}^2 = 4\omega^2 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)$$

ose

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\omega \sqrt{\left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)}$$

I ndajmë ndryshoret

$$\frac{d\,\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = \omega dt$$

dhe integrojmë sipas këndit φ nga 0 deri në α. Pjesa e lëvizjes së lavjerrësit në këta kufij i përgjigjet kohës së një të katërtës së periodës. Do të kemi:

$$\omega \int_0^{\frac{T}{4}} dt = \int_0^{\alpha} \frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

Do ta shënojmë shkurtimisht me K integralin në anën e djathtë:

$$K = \int_0^{\alpha} \frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \tag{4}$$

dhe kemi

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}}\, K \qquad (5)$$

K është integral eliptik i llojit të parë. Do ta shprehim në formën standarde me zëvendësimet:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = k \qquad \sin \frac{\varphi}{2} = k \sin v$$

rrjedh:

$$\cos \frac{\varphi}{2}\, d\, \frac{\varphi}{2} = k \cos v\, dv$$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}$$

dhe

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} = k^2 (1 - \sin^2 v) = k^2 \cos^2 v$$

I përcaktojmë kufijtë për ndryshoren e re

për $\varphi = 0,\ v = 0$

për $\varphi = \alpha,\ v = \frac{\pi}{2}$ sepse $\sin v = 1$

Fitojmë:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 v)^{-\frac{1}{2}}\, dv$$

E zhvillojmë funksionin nën integral në rend të binomit:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 v + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 v + \ldots\right) dv$$

Pasi rendi i binomit konvergjon në mënyrë të njëtrajtshme, mund të integrojmë anëtarë për anëtarë. Në çdo anëtarë paraqitet integrali i formës:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} v dv = \frac{1 \cdot 3 \ldots \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots \ldots 2n} \frac{\pi}{2}$$

zëvendësojmë dhe fitojmë:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \ldots\ldots \right]$$

ose

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \ldots\ldots \right] \qquad (6)$$

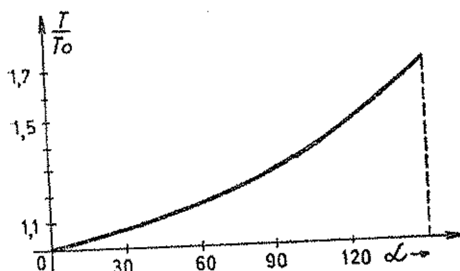


Fig. 16

Për amplituda të vogla të oshilimit mundemi në (6) të mos i përfillim të gjithë anëtarët përveç anëtarit të parë. Kësisoji fitojmë formulën e përafërt:

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (7)$$

Kjo është formula e njohur për periodë të lavjerrësit matematik. Kjo vlen për ato amplituda të vogla për të cilat $\sin^2\alpha/2$ mund të mospërfillet. Për amplituda më të mëdha në njehsim duhet të merren edhe anëtarët tjerë të rendit (6). Në fig. 16 është shprehur grafikisht varshmëria e periodës së lavjerrësit nga amplituda. Shohim se perioda, ndaj periodës për amplituda të vogla T_o rritet ngadalë me rritjen e amplitudave të oshilimit.

6. LAVJERRËSI I CIKLOIDËS

Lavjerrësi i cili lëviz nëpër harkun e rrethit vertikal nuk e ka të njëjtën periodë të oshilimit, për amplituda të ndryshme. Hajgensi ka treguar se lavjerrësi i cili lëviz harkun e cikloidës periodën e oshilimit e ka të pavarur nga amplituda. Këtë do ta tregojmë.

Ekuacioni i cikloidës analitikisht shprehet në formën parametrike:

$$\begin{aligned} x &= a\,(\varphi - \sin\varphi) \\ y &= a\,(1 - \cos\varphi) \end{aligned} \qquad (1)$$

Nga fig. 17 shohim se komponentja aktive e peshës së lavjerrësit është $mg \sin\alpha$. Nga trekëndëshi infinitezimal rrjedh:

$$\sin\alpha = \frac{dy}{ds}$$

kurse ekuacioni i lëvizjes ka formën:

$$\dot{v} = -g \sin\alpha = -g \frac{dy}{ds} \tag{2}$$

Nga ekuacioni i cikloidës gjejmë:

$$dx = a(1 - \cos\varphi)\, d\varphi = 2a \sin^2 \frac{\varphi}{2}\, d\varphi$$

$$dy = -a \sin\varphi\, d\varphi = -2a \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}\, d\varphi$$

dhe për element të gjatësisë së harkut kemi:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left(4a^2 \sin^4 \frac{\varphi}{2} + 4a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\, d\varphi^2$$

ose

$$ds = 2a \sin \frac{\varphi}{2}\, d\varphi$$

Ana e djathtë e (2) është:

$$\frac{dy}{ds} = -\cos \frac{\varphi}{2} \tag{3}$$

Sipas definicionit të shpejtësisë:

$$v = \frac{ds}{dt} = 2a \sin \frac{\varphi}{2} \frac{d\varphi}{dt} =$$

$$= 2a \sin \frac{\varphi}{2} \dot{\varphi} \tag{4}$$

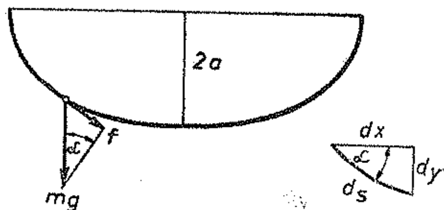


Fig. 17

Në vend të ndryshores φ do të paraqesim ndryshoren e re me zëvendësim

$$u = \cos \frac{\varphi}{2} \tag{5}$$

$$\dot{u} = - \frac{1}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \dot{\varphi}$$

prej nga

$$\sin \frac{\varphi}{2} \dot{\varphi} = - 2\dot{u}$$

Zëvendësojmë në (4)

$$v = - 4a \dot{u} \tag{6}$$

dhe

$$\dot{v} = - 4a \ddot{u}$$

Nga (3) rrjedh

$$\frac{dy}{ds} = - u$$

Zëvendësojmë në ekuacionin e lëvizjes dhe fitojmë:

$$- 4a \ddot{u} = gu$$

ose

$$\ddot{u} + \frac{g}{4a} u = 0$$

Shënojmë shkurtimisht me

$$\omega^2 = \frac{g}{4a} \tag{7}$$

dhe fitojmë ekuacionin diferencial:

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0$$

zgjidhja e të cilit është:

$$u = A \cos\omega t + B \sin\omega t \tag{8}$$

Shfrytëzojmë (5)

$$\cos\frac{\varphi}{2} = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{9}$$

Konstantet e integrimit i përcaktojmë nga kondităt fillestare të lëvizjes. Supozojmë se në kohën $t = 0$, lavjerrësi është zhvendosur nga pozita ekuilibruese për $\varphi = \varphi_o$ dhe është lëshuar pa shpejtësi fillestare $v = 0$. Nga këto kondita dhe (9) fitojmë:

$$A = \cos\frac{\varphi_o}{2}$$

Pastaj nga (6) kemi

$$-4a\dot{u} = 0 \text{ ose } \dot{u} = 0$$

kurse nga (8)

$$-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t = 0$$

dhe për $t = 0$, $B = 0$

Zëvendësojmë vlerat e fituara në (9) dhe fitojmë:

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \cos\frac{\varphi_o}{2}\cos\omega t \tag{10}$$

Shohim se ndryshorja φ e cila përcakton vendin në cikloidë ndërron në mënyrë oshiluese me frekuencën rrethore:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

dhe nga formula (7)

$$T = 2\pi\frac{4a}{g} \tag{11}$$

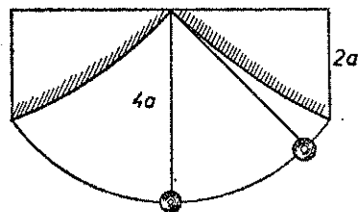


Fig. 18

Perioda e oshilimeve është konstante. Për $4a = l$ fitojmë të njëjtën formulë, sikurse te lavjerrësi matematik për amplituda të vogla. Por, formula për periodën e lavjerrësit të cikloidës është ekzakte. Fakti se kemi të bëjmë me cikloidë jep mundësinë që ky lavjerrës lehtë të ndërtohet. E dijmë nga matematika se evolventa e cikloidës është prapë cikloidë. Kështu duhet nga materiali i fortë të ndërtojmë dy gjysma të cikloidës dhe t'i bashkojmë sikurse në fig. 18. Në pikën e takimit varim lavjerrësin me gjatësi $4a$. Kur këtë lavjerrës e zhvendosim, atëherë një pjesë e perit mbështetet për murin e fortë të cikloidës, kurse pjesa tjetër paraqet tangjente në të. Kështu pika materiale gjendet plotësisht në evolventën e cikloidës. Kjo vlen për çfarëdo zhvendosje të lavjerrësit. Edhe me matje është vërtetuar se perioda e lavjerrësit të këtillë nuk varet nga amplituda.

7. OSHILIMET E LIDHURA

Supozojmë se kemi dy oshilatorë harmonikë. Këto janë dy pika materiale të lidhura me pozitat e veta të ekuilibrimit me forca proporcionale me elongacionin e çdonjërit oshilator. Do të supozojmë se oshilatorët mund të lëvizin vetëm në kahe të boshtit y i cili qëndron normal ndaj vijës e cila i bashkon pozitat ekuilibruese të tyre, siç tregon fig. 19. Për lehtësim shqyrtimi supozojmë se oshilatorët janë plotësisht të njëjtë. Kjo do të thotë se pikat materiale kanë të njëjtën masë m dhe me pozita të ekuilibrimit janë të lidhura me forca të cilat për elongacionin një njësi e kanë intensitetin k. Çdonjëri nga këta oshilatorë i zhvendosur nga pozita e ekuilibrimit oshilon me frekuencën vetiake

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{1}$$

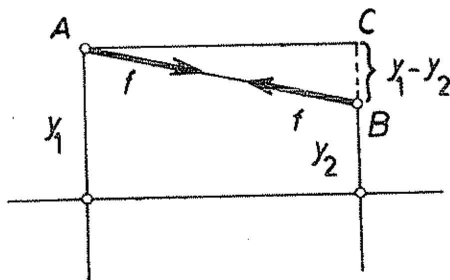


Fig. 19

Pastaj do të supozojmë se në mes të oshilatorëve veprojnë forcat reciproke f të cilat janë proporcionale me largësitë në mes tyre. Nga këto forca në çdonjërin oshilator vepron vetëm ajo komponente e cila e ka kahun e lëvizjes y. Nga fig. 19 shohim se kjo komponente është proporcionale me largësinë $BC = y_1 - y_2$ dhe këtë forcë mund ta shkruajmë $l(y_1 - y_2)$ ku l është faktor proporcionaliteti. Prandaj ekuacioni i lëvizjes së oshilatorit të parë është:

$$m\ddot{y}_1 = -ky_1 - l(y_1 - y_2)$$

kurse për oshilatorin e dytë

$$m\ddot{y}_2 = -ky_2 + l(y_1 - y_2)$$

Pjesëtojmë me masën m, shfrytëzojmë (1) dhe zëvendësojmë me $\alpha = \frac{l}{m}$. Do të kemi:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \omega^2 y_1 &= -\alpha(y_1 - y_2) \\ \ddot{y}_2 + \omega^2 y_2 &= \alpha(y_1 - y_2) \end{aligned} \tag{2}$$

Kemi fituar sistem të ekuacioneve diferenciale. Që të zgjidhim këtë sistem ekuacionet një herë do t'i mbledhim e një herë do t'i zbresim dhe do të paraqesim dy koordinata të reja:

$$u = y_1 + y_2$$
$$v = y_1 - y_2 \tag{3}$$

atëherë fitojmë:

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0$$

$$\ddot{v} + \omega^2 v = - 2\alpha v$$

Në këtë mënyrë, nga sistemi i ekuacioneve diferenciale kemi fituar dy ekuacione diferenciale të zakonshme:

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0$$

$$\ddot{v} + (\omega^2 + 2\alpha) v = 0$$

Quajmë koordinatë normale ato koordinata në të cilat ekuacionet e lëvizjes përshkruhen në formë të sistemit të ekuacioneve lineare diferenciale me koeficient konstant. Çdo ekuacion përmban vetëm një ndryshore. Oshilimet e përshkruara vetëm me një ndryshore quhen tip normal ose modë normale të oshilimit dhe karakterizohen me frekuencën vetiake normale.

Shënojmë shkurtimisht:

$$\omega_1{}^2 = \omega^2 + 2\alpha$$

ose

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 + 2\alpha} = \omega + \frac{\alpha}{\omega} \tag{4}$$

dhe ekuacioni i dytë do të ketë formën e ngjashme me të parin:

$$\ddot{v} + \omega_1{}^2 v = 0$$

Zgjidhja e përgjithshme e tyre do të jetë:

$$u = a_1 \cos\omega t + b_1 \sin\omega t$$
$$v = a_2 \cos\omega_1 t + b^2 \sin \omega_1 t \tag{5}$$

Për përcaktimin e konstanteve të integrimit duhet të dijmë kondital fillestare të lëvizjes. Supozojmë se në fillim të lëvizjes e kemi zhvendosur oshilatorin e parë për gjatësin $y_1 = c$, kurse i dyti qëndron në pozitë të ekuilibrimit $y_2 = 0$. Të dy oshilatorët fillojnë pa shpejtësi fillestare, $\dot{y}_1 = 0$ dhe $\dot{y}_2 = 0$. Këto kondita duhet t'i zbatojmë për funksione të reja. Sipas (3) rrjedh se në $t = 0$, $u = c$, $v = c$, $\dot{u} = 0$ dhe $\dot{v} = 0$. Zëvendësojmë në (5) dhe në derivatin e tij sipas kohës. Do të fitojmë:

$$a_1 = a_2 = c \text{ dhe } b_1 = b_2 = 0$$

Pra, do të vlejë:

$$u = c \cos\omega t$$

$$v = c \cos\omega_1 t$$

Nga (3) rrjedh:

$$y_1 = \frac{1}{2} (u + v)$$

$$y_2 = \frac{1}{2} (u - v)$$

dhe fitojmë:

$$y_1 = \frac{c}{2} (\cos\omega t + \cos\omega_1 t)$$

$$y_2 = \frac{c}{2} (\cos\omega t - \cos\omega_1 t)$$

I zhvillojmë shprehjet në kllapa:

$$y_1 = c \cos \frac{\omega_1 - \omega}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 + \omega}{2} t$$

$$y_2 = c \sin \frac{\omega_1 - \omega}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_1 + \omega}{2} t$$

Shrfytëzojmë formulën (4) dhe përfundimisht do të kemi:

$$\omega_1 - \omega = \frac{\alpha}{\omega}$$

$$y_1 = c \cos \frac{\alpha}{2\omega} t \cdot \cos \frac{\omega_1 + \omega}{2} t$$

$$y_2 = c \sin \frac{\alpha}{2\omega} t \cdot \sin \frac{\omega_1 + \omega}{2} t \qquad (6)$$

Shohim se të dy oshilatorët lëkunden me të njëjtën frekuencë $\frac{1}{2} (\omega_1 + \omega)$ e cila paraqet mesataren arithmetike të frekuencave ω_1 dhe ω. Kjo

frekuencë është e barabartë me $\omega + \frac{\alpha}{2\omega}$ dhe te lidhjet e dobëta, për α të vogël shumë pak ndryshon nga frekuenca vetiake e oshilatorit. Amplituda e këtyre oshilimeve nuk është konstante, por gjatë kohës ndryshon si funksioni kosinus apo sinus. Pasi α është e vogël, këto funksione kanë periodë të madhe. Oshilogramet e njërit dhe tjetrit oshilator i kemi vizatuar në fig. 20. Shohim se kemi fituar rrahje. Këto rrahje nuk paraqiten në të njëjtën kohë, por ashtu që, kur oshilatori i parë ka amplitudë maksimale, oshilatori i dytë qetësohet dhe anasjelltas. Energjia, të cilën ia japim sistemit, periodikisht përcillet nga njëri oshilator në tjetrin.

Sikurse kemi cekur në fillim, njehsimin e kemi bërë për dy oshilatorë të njëjtë. Mund të shqyrtohet rasti edhe për oshilatorë të ndryshëm. Prapë do të fitonim oshilime me amplituda të cilat gjatë kohës ndërrojnë në mënyrë periodike, por oshilatorët nuk ndalen si në rastin që e shqyrtuam. Amplituda e tyre do të kalojë nëpër një minimum i cili ndryshon nga zeroja.

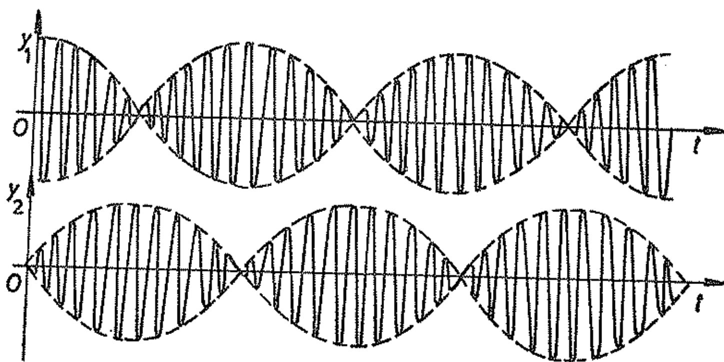


Fig. 20

Më në fund mund të përgjigjemi në pyetjen: për çfarë kondita fillestare nuk do të ketë rrahje, por të dy oshilatorët do të oshilojnë me amplituda konstante. Këto oshilime quhen oshilime fundamentale të sistemit.

Konditat fillestare për këto oshilime janë:

$$y_1 = c,\ y_2 = \pm c,\ \dot{y}_1 = 0 \text{ dhe } \dot{y}_2 = 0$$

Pra në fillim të dy oshilatorët duhet zhvendosur për gjatësinë c në të njëjtin kah apo në kah të kundërt dhe duhet lëshuar pa shpejtësi fillestare. Së pari le të zhvendosen në njërën anë, $y_2 = c$. Në kohën $t = 0$, nga (3) fitojmë:

$$u = 2c \text{ dhe } v = 0$$

fitojmë

$$a_1 = 2c, a_2 = 0, b_1 = b_2 = 0$$

kurse funksionet u dhe v janë:

$$u = c\cos\omega t, \; v = 0$$

ose

$$y_1 = c\cos\omega t \text{ dhe } y_2 = c\cos\omega t$$

Nëse në fillim të lëvizjes oshilatorët janë zhvendosur në kah të kundërt do të kemi:

$$\text{në } t = 0, y_2 = -c$$

atëherë

$$u = 0 \text{ dhe } v = 2c$$

fitojmë:

$$a_1 = 0, a_2 = 2c \text{ dhe } b_1 = b_2 = 0$$

ose

$$u = 0 \text{ dhe } v = 2c\cos\omega_1 t$$

dhe përfundimisht fitojmë

$$y_1 = c\cos\omega_1 t, \; y_2 = -\cos\omega_1 t$$

Shohim se me të vërtetë me këto kondita fillestare oshilimet kanë amplituda konstante.

III. VALËT

1. VARGU I OSHILATORËVE TË LIDHUR

Të mendojmë një varg të oshilatorëve të njëjtë harmonikë dhe njësoj të larguar ndërmjet veti. Do ta vendosim boshtin x të sistemit të koordinatave në kah të pozitës ekuilibruese të tyre. Kahu i lëkundjeve le të jetë normal ndaj këtij boshti. Do të vendosim boshtin y në këtë drejtim. Këto oshilime quhen oshilime transverzale. Çdo oshilator le të jetë i lidhur me oshilatorët fqinjë, me forca të njëjta të cilat janë proporcionale me zhvendosjet momentale të tyre. Atëherë për oshilatorin „n" vlen ekuacioni i lëvizjes:

$$m\ddot{y}_n = l(y_{n+1} - y_n) + l(y_{n-1} - y_n) \tag{1}$$

sepse në oshilatorin „n" veprojnë forcat tërheqëse nga oshilatorët $n+1$ në njërën anë dhe $n-1$ në anën tjetër.

Supozojmë se oshilatorin e parë e detyrojmë të kryejë oshilime harmonike me frekuencën rrethore ω. Meqë ata janë të lidhur në mes veti, duhet pritur se çdonjëri prej tyre duhet të oshilojë me këtë frekuencë. Prandaj, do të tentojmë që për zgjidhje të ekuacionit të marrim funksionin:

$$y_n = A_n e^{i\omega t} \tag{2}$$

Zëvendësojmë (2) në (1):

$$-m\omega^2 A_n = l(A_{n+1} + A_{n-1} - 2A_n)$$

dhe për amplitudë të oshilatorit „n" fitojmë formulën:

$$A_n = \frac{2l}{2l - m\omega^2} \cdot \frac{A_{n+1} + A_{n-1}}{2} \tag{3}$$

Do të tentojmë që këtë konditë ta kënaqim me funksionin:

$$A_n = C_1 e^{-in\varphi} + C_2 e^{in\varphi} \tag{4}$$

do të fitojmë:

$$\frac{A_{n+1}+A_{n-1}}{2} = \frac{C_1}{2}\,[e^{-i(n+1)\varphi}+e^{-i(n-1)\varphi}] +$$

$$+\frac{C_2}{2}\,[e^{i(n+1)\varphi}+e^{i(n-1)\varphi}] =$$

$$= \frac{1}{2}\,(C_1\,e^{-in\varphi}+C_2\,e^{in\varphi})\,(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}) = A_n\cos\varphi$$

Shohim se funksioni (4) kënaq konditën (3) vetëm nëse vlen

$$2l\cos\varphi = 2l - m\omega^2$$

prej nga rrjedh

$$\cos\varphi = 1 - \frac{m\omega^2}{2l} \tag{5}$$

Zëvendësojmë (4) në (2) dhe fitojmë zgjidhjen:

$$y_n = C_1\,e^{i(\omega t-n\varphi)} + C_2\,e^{i(\omega t+n\varphi)} \tag{6}$$

Në veçanti do të marrim se $C_2=0$ dhe vlera reale e (6) është:

$$y_n = C_1\cos(\omega t - n\varphi) \tag{7}$$

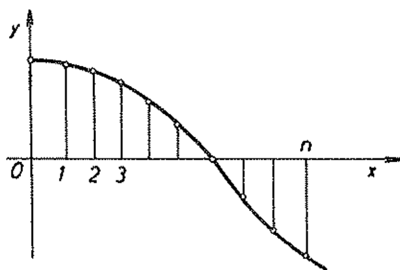


Fig. 21

Shohim se oshilatorët e ndryshëm lëkunden me faza të ndryshme. Në këtë mënyrë vija që bashkon këta oshilatorë për një kohë të caktuar e ka formën e funksionit cosinus sikurse në fig. 21. Do të shqyrtojmë vendin ku gjendet maksimumi i oshilimit. Kështu

$$\omega t - n\varphi = 0$$

tregon se ky maksimum gjendet te oshilatori me numër:

$$n = \frac{\omega}{\varphi}\,t \tag{8}$$

Shohim se pozita e këtij maksimumi gjatë kohës lëviz nëpër sistem të oshilatorëve dhe me radhë kalon nëpër oshilator me numër rendor më të madh.

Sikur në formulën (6) të merrnim vetëm anëtarin e dytë do të fitonim të njëjtin rezultat, por me parashenjë të kundërt, pra me kah tjetër të lëvizjes së maksimumit.

Jo vetëm maksimumi, por edhe çfarëdo faze tjetër e lëkundjes lëviz nëpër varg të oshilatorëve me të njëjtën shpejtësi. Të përcaktojmë shpejtësinë me të cilën lëviz çfarëdo faze. Të shënojmë me a largësinë në mes të dy oshilatorëve sukcesiv. Atëherë për shpejtësi fitojmë:

$$v = \frac{na}{t} = \frac{\omega a}{\varphi} \qquad (9)$$

Pra, kur njërin oshilator e detyrojmë të lëkundet me frekuencën rrethore ω, atëherë lëkundjet do të përhapen nëpër tërë vargun në të dy anët. Tërë vargu nuk lëkundet sikurse një tërësi e ngurtë, por në mes të oshilatorëve fqinjë paraqitet një ndryshim konstant i fazës. Në këtë mënyrë vargu i oshilatorëve deformohet në formë të lakores së funksionit kosinus dhe me shpejtësi konstante lëviz nëpër tërë vargun. Kjo lëvizje është karakteristike te valët.

2. VALËT NË MJEDIS NJËDIMENSIONAL

Mjedisin njëdimensional mund ta mendojmë si varg të vazhduar të pikave materiale të renditura në një vijë. Këtu pikat materiale, janë të lidhura ndërmjet veti me forca tërheqëse. Mund ta supozojmë se këto forca janë proporcionale me largësitë në mes të pikave materiale, që me të vërtetë është ashtu, nëse grimcat e mjedisit janë të lidhura me forca elastike, ashtu sikurse i gjejmë te trupat e ngurtë. Në këtë rast mjedisi njëdimensional nuk do të dallojë nga vargu i oshilatorëve, me përjashtim se në të oshilatorët janë të renditura në mënyrë të vazhduar.

Te vargu i oshilatorëve kemi fituar këtë formulë për lëkundje:

$$y = C \cos(\omega t - n\varphi) \qquad (1)$$

dhe për shpejtësi të lëvizjes së fazës:

$$v = \frac{\omega a}{\varphi} \qquad (2)$$

Që t'i zbatojmë për mjedis të vazhduar duhet të eliminojmë madhësitë n dhe a të cilat në këtë rast e humbin kuptimin. E dijmë se prodhimi $n \cdot a$ paraqet largësinë e oshilatorit n nga i pari. Këtë largësi mund ta mendojmë si abshisë x të oshilatorit të shqyrtuar. Pra,

$$x = n \cdot a \qquad (3)$$

Sipas kësaj në mjedisin e vazhduar shqyrtojmë ate pikë materiale e cila e ka abshisën x. Nga (2) rrjedh

$$\varphi = \frac{\omega a}{v}$$

kurse nga (3)

$$a = \frac{x}{n}$$

pra

$$n\varphi = \frac{\omega}{v} x \tag{4}$$

Zëvendësojmë në (1) dhe fitojmë:

$$y = C \cos\omega \left(t - \frac{x}{v}\right) \tag{5}$$

Kësisoji i kemi eliminuar të gjitha madhësitë karakteristike për vargun diskret të oshilatorëve, por jo edhe ato të cilat kanë kuptim për vargun e vazhduar.

Nga formula (5) kuptojmë se lëvizja e shqyrtuar tregon periodicitet edhe për nga koha edhe për nga abshisa x. Periodiciteti sipas kohës për çfarëdo x të zgjedhur tregon se grimca me abshisë x kryen oshilime harmonike me frekuencën rrethore ω. Në vazhdim do të shqyrtojmë vetëm periodicitetin hapësinor.

Në kohë të caktuar t grimcat me abshisa të ndryshme x i kanë elongacionet të cilat iu përgjigjen të gjitha fazave të mundshme të funksionit kosinus. Meqë ky është funksion periodik, pas gjatësisë së caktuar λ, arrijmë deri te faza fillestare dhe pastaj në gjatësinë tjetër λ do të përsëriten të gjitha fazat me të njëjtën radhë. Gjatësia λ quhet gjatësi valore e valës. Pra për $x = \lambda$ ndryshimi i fazës duhet të jetë 2π.

$$\omega \frac{\lambda}{v} = \pi$$

ose

$$\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Këtë madhësi do ta shënojmë me k dhe e quajmë numër të valës.

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{6}$$

kurse formulën për elongacion mund ta shkruajmë në formën:

$$y = C \cos (\omega t - kx) \tag{7}$$

Gjatësinë valore mund ta shprehim edhe me frekuencën e lëkundjes sepse nga (6):

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{\nu} \tag{8}$$

Do të përcaktojmë ekuacionin diferencial zgjidhja e të cilit është (7). E derivojmë (7) dy herë sipas x dhe dy herë sipas t.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = - k^2 y$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \omega^2 y$$

Eliminojmë y dhe fitojmë:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Shfrytëzojmë (6):

$$\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{v^2}$$

dhe përfundimisht fitojmë:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{9}$$

Shprehja (9) paraqet ekuacion diferencial parcial të rendit të dytë, kurse zgjidhja (7) prej së cilës kemi filluar paraqet vetëm një integral partikular të tij. Nga matematika e dijmë se zgjidhja e përgjithshme e tij përmban dy funksione arbitrare. Do të tregojmë se zgjidhja e përgjithshme e (9) shprehet në formën:

$$y = A\, f(\omega t - kx) + B\, g(\omega t + kx) \tag{10}$$

ku: f dhe g janë dy funksione arbitrare, kurse A dhe B janë konstante. Që të tregojmë se (10) është me të vërtetë zgjidhje e ekuacionit (9) njehsojmë derivatet parciale:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = k^2 A f'' + k^2 B g'' = k^2 (A f'' + B g'')$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = A f'' + B g'' = (A f'' + B g'')$$

dhe shohim se

$$\frac{1}{k^2}\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{\omega^2}\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Zgjidhja (7) është formë speciale e (10), për $B = 0$ dhe nëse në vend të f merret funksioni kosinus. Që të shpjegojmë përmbajtjen e shprehjes (10) së pari do të marrim $B = 0$. Do të ngelë:

$$y = A\, f(\omega t - kx)$$

Në kohën $t = 0$ dhe në vendin $x = 0$ elongacioni do të jetë:

$$y_o = A\, f(0)$$

Të njëjtin elongacion do ta gjejmë në kohën t në vendin për të cilin vlen:

$$kx - \omega t = 0$$

ose

$$x = \frac{\omega}{k}\, t$$

Pra ky elongacion lëviz me shpejtësi konstante

$$v = \frac{\omega}{k}$$

nëpër mjedis dhe në kah pozitiv të boshtit x.

Anëtarin e dytë të shprehjes (10) e fitojmë për $A = 0$. Me të njëjtën analogji gjejmë për shpejtësinë e fazës së oshilimit:

$$v = -\frac{\omega}{k}$$

pra në kahe negative të boshtit x. Nga kjo përfundojmë se anëtari i parë i (10) shpreh valën e cila përhapet në kahe pozitive, kurse anëtari i dytë valën në kahe negative.

Valët të cilat i përshkruam deri më tani quhen valë transverzale. Te këto valë lëkundja e grimcave ka kah normal ndaj kahut të përhapjes së tyre. Përveç këtyre ekzistojnë edhe valët longitudionale. Te këto valë lëkundja e grimcave kryhet në të njëjtin drejtim, në të cilin edhe përhapen. Dallime qenëse në mes tyre nuk ka. Nëse me ξ shënojmë elongacionin e valëve longitudionale, atëherë do të kemi:

$$\xi = C \cos\omega \left(t - \frac{x}{v}\right)$$

dhe formulat tjera analoge.

Te valët longitudionale dendësia e materialit të mjedisit oshilon sipas ligjit të ndërrimit të valëve.

3. KALIMI I VALËVE NGA NJË MJEDIS NJËDIMENSIONAL NË TJETRIN

Mjedisi njëdimensional është varg i vazhduar i pikave materiale të cilat ndërmjet veti janë të lidhura me forca tërheqëse. Prandaj mjediset e ndryshme njëdimensionale ndryshojnë ndërmjet veti për nga masat e pikave të veta materiale dhe për nga forcat tërheqëse të cilat veprojnë në mes tyre. Formula (III, 1.5) tregon se në valë, ndryshimi i fazës në mes të oshilatorëve fqinjë varet prej masës së grimcave dhe koeficientëve të forcave të lidhjes. Nga formula (III, 1.9) kuptojmë se edhe shpejtësia e valës varet nga këto elemente. Për këtë arsye valët në çdo mjedis njëdimensional përhapen me shpejtësi e cila është karakteristike për atë mjedis.

Të mendojmë dy mjedise të ndryshme njëdimensionale të lidhura në mes veti në një pikë. Supozojmë se në mjedisin e parë ekziston një burim valësh me frekuencë ω. Këto valë përhapen nëpër mjedisin e parë dhe arrijnë deri në skajin e tij, deri te pika ku mjediset janë të lidhura. Meqë pika e fundit e mjedisit të parë fillon të kryejë lëvizje oshiluese, këto oshilime do të përcillen edhe në pikën e parë të mjedisit të dytë, kështu që valët kalojnë dhe përhapen edhe nëpër këtë mjedis. Do ta shqyrtojmë këtë dukuri më detajisht.

Elongacioni i valës e cila përhapet nëpër mjedisin e parë shprehet me formulën:

$$y_1 = A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x) \tag{1}$$

kurse vala e cila përhapet nëpër mjedisin e dytë:

$$y_2 = A_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x) \tag{2}$$

Pika në të cilën lidhen dy mjediset le të ketë abshisë $x = \xi$. Kësisoji, mjedisi i parë gjendet për $x < \xi$, kurse mjedisi i dytë për $x > \xi$. Kjo është treguar në fig. 22, kështu që mjedisi i parë është vizatuar me vijë të trashë, kurse i dyti me vijë të hollë. Kur nëpër mjedis përhapet vala transverzale, që të dy mjediset do të deformohen në formë sinusoide dhe në kohë të caktuar t do të ketë formën sikurse në fig. 22. Pika e takimit $x = \xi$ do të ketë elongacionin y. Kjo do të jetë i përbashkët për të dy valët. Prandaj mund të shkruajmë për çfarëdo kohe t, në pikën $x = \xi$, $y_1 = y_2$. Kështu shprehëm njërën konditë kufitare për lidhjen e valëve në mjedise të ndryshme.

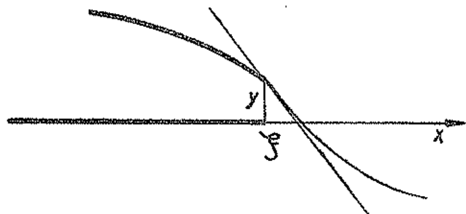


Fig. 22

Nga fig. 22 shohim se në të njëjtën pikë të dy sinusoidat e kanë tangjenten e përbashkët. Kjo konditë shprehet kësisoji:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{\partial y_2}{\partial x}$$

sepse $\frac{\partial y}{\partial x}$ është koeficienti i drejtimit të tangjentes në lakoren e varshmërisë së y nga x. Se kështu duhet të jetë, mund të bidemi duke supozuar se hipoteza e kundërt nuk mund të realizohet. Sikur të dy sinusoidët nuk do të kishin tangjente të përbashkët, atëherë derivatet në pikën ξ nga ana e majtë dhe nga ana e djathtë nuk do të ishin të barabarta, kurse derivati i dytë $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ në këtë pikë nuk do të ishte i pakëputur. Por, nga ekuacioni diferencial i valëve i cili duhet të vlejë për të dy mjediset, pra edhe për pikën $x = \xi$ rrjedh:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Meqë ana e djathtë e kësaj shprehje është funksion i pakëputur kështu duhet të jetë edhe ana e majtë. Që të mund të kënaqet kondita e pakëputshmërisë së derivatit të dytë, derivatet e para në të dy anët duhet të jenë të barabarta. Në bazë të gjithë asaj që u cek duhet të kënaqen këto kondita kufitare:

$$\text{për } x = \xi, \ y_1 = y_2 \text{ dhe } \frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{\partial y_2}{\partial x} \tag{3}$$

Zëvendësojmë në këto kondita kufitare funksionet (1) dhe (2). Fitojmë:

$$\begin{aligned} A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 \xi) &= A_2 \cos(\omega_2 t - k_2 \xi) \\ k_1 A_1 \sin(\omega_1 t - k_1 \xi) &= k_2 A_2 \sin(\omega_2 t - k_2 \xi) \end{aligned} \tag{4}$$

Që njehsimi të jetë më i lehtë e bartim fillimin e sistemit të koordinatave në pikën kufitare. Atëherë në sistemin e ri $\xi = 0$ dhe konditat kufitare thjeshtësohen në:

$$\begin{aligned} A_1 \cos\omega_1 t &= A_2 \cos\omega_2 t \\ k_1 A_1 \sin\omega_1 t &= k_2 A_2 \sin\omega_2 t \end{aligned} \tag{5}$$

Që të jenë të kënaqura këto shprehje në çfarëdo kohe t duhet të jetë:

$$\omega_1 = \omega_2 \tag{6}$$

Pra gjatë kalimit të valës nga një mjedis në tjetrin frekuenca nuk ndryshon. Shfrytëzojmë (5) dhe (6):

$$A_1 = A_2$$

$$k_1A_1 = k_2A_2$$

dhe fitojmë

$$k_1 = k_2$$

E dijmë se

$$k = \frac{\omega}{v}$$

dhe kondita e fundit kalon në:

$$\frac{\omega}{v_1} = \frac{\omega}{v_2}$$

prej nga rrjedh

$$v_1 = v_2$$

Është e qartë se shprehja e fundit nuk është e saktë, sepse shpejtësia e përhapjes së valëve në çdo mjedis është e ndryshme. Nga kjo rrjedh se përfundimet tona janë nxjerrë nga hipotezat e gabuara. Ku është gabimi? Më parë kemi supozuar se kemi dy valë, valën rënëse e cila vjen nga ana e majtë deri në pikën e takimit dhe valën depërtuese e cila vazhdon nga kjo pikë djathtas. Mirëpo, pika e takimit gjithashtu lëkundet dhe nga ajo mund të dalin dy valë, njëra kalon në mjedisin e dytë, kurse tjetra kthehet prapa dhe vazhdon nëpër mjedis nga edhe ka ardhur. Do ta quajmë valë të reflektuar. Pra, gjatë kalimit të valëve nga një mjedis në tjetrin përveç valës depërtuese paraqitet edhe një valë reflektuese në vendin ku mjediset lidhen në mes veti.

Tani do të përsërisim njehsimin e mëparshëm duke marrë në konsiderim edhe valën e reflektuar. Për elongacion të valës së reflektuar vlen formula:

$$y_o = A_o \cos(\omega_1 t + k_1 x) \qquad (7)$$

Në shprehjen (7) parashenja plus tregon se në kahun negativ të boshtit x përhapet vala.

Derivati i këtij funksioni është:

$$\frac{\partial y_o}{\partial x} = - k_1 A_o \sin(\omega_1 t + k_1 x) \qquad (8)$$

Në konditat kufitare, në anën e majtë duhet të merret shuma e të dhënave për valën rënëse dhe të reflektuar. Do të kemi:

$$y_1 + y_o = y_2$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial y_o}{\partial x} = \frac{\partial y_2}{\partial x}$$

dhe për $x = \xi = 0$ kemi:

$$A_1 \cos\omega_1 t + A_o \cos\omega_1 t = A_2 \cos\omega_2 t$$

$$k_1 A_1 \sin\omega_1 t - k_1 A_o \sin\omega_1 t = k_2 A_2 \sin\omega_2 t$$

Shohim se edhe këto shprehje mund të kënaqen në çfarëdo kohe nëse është

$$\omega_1 = \omega_2$$

që tregon se frekuencat e lëkundjeve janë të njëjta në të tri valët. Pasi t'i barazojmë frekuencat, konditat kufitare reduktohen në:

$$A_1 + A_o = A_2 \qquad\qquad (9)$$

$$k_1(A_1 - A_o) = k_2 A_2$$

prej nga rrjedh se k_1 dhe k_2 nuk janë të njëjtë.I shprehim me ndihmën e shpejtësisë së përhapjes

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1} \text{ dhe } k_2 = \frac{\omega}{v_2} \qquad (10)$$

dhe fitojmë:

$$A_1 + A_o = A_2$$

$$v_2(A_1 - A_o) = v_1 A_2$$

Ky është sistem i dy ekuacioneve lineare. Nga ky mund të njehsojmë amplitudat e valëve depërtuese dhe të reflektuar, duke njohur amplitudën A_1 të valëve rënëse.

E shumëzojmë ekuacionin e parë me v_2 dhe i mbledhim:

$$A_2 = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} A_1 \qquad (11)$$

kur zëvendësojmë vlerën e fituar në ekuacionin e parë të (9) fitojmë:

$$A_o = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} A_1 \qquad (12)$$

Në mjediset e dendura njëdimensionale, shpejtësia e fazës së valëve është më e vogël se sa në mjediset më të rralla. Kur vala kalon nga mjedisi i dendur në atë të rrallë: $v_1 < v_2$ dhe nga (12) kuptojmë se

amplituda e valës së reflektuar ka të njëjtën parashenjë sikurse amplituda e valës rënëse. Kjo tregon se vala e reflektuar kthehet me të njëjtën fazë të lëkundjes me të cilën ka ardhur vala rënëse deri te kufiri i mjediseve. Mirëpo, kur kalon nga një mjedis i rrallë në mjedis të dendur, atëherë $v_1 > v_2$ dhe sipas (12) amplituda e valës së reflektuar ka shenjë të kundërt nga amplituda e valës rënëse. Kjo do të thotë se vala e reflektuar në këtë rast kthehet me fazë të kundërt nga ajo e valës rënëse. Pra, te reflektimi i valëve në mjedise të dendura arrihet deri te kërcimi i fazës për gjysmë gjatësie valore.

4. VALËT E PËRQËNDRUARA

Valët e përqëndruara janë lloj i veçantë i valëve dhe paraqiten kur bashkohen dy valë të njëjta të cilat përhapen në kahe të kundërta. Do të shkruajmë elongacionin e këtyre valëve në formën eksponenciale:

$$y_1 = a\, e^{i(\omega t - kx)}$$
$$y_2 = a\, e^{i(\omega t + kx)} \qquad (1)$$

Si rezultat të bashkimit të tyre fitojmë valën me elongacion:

$$y = y_1 + y_2 = a\, e^{i\omega t} \; (e^{ikx} + e^{-ikx})$$

ose

$$y = 2a \cos kx e^{i\omega t}$$

kurse pjesa reale e këtij funksioni është:

$$y = 2a \cos kx \cdot \cos\omega t \qquad (2)$$

Shohim se në këtë valë të gjitha pikat lëkunden me të njëjtën fazë ωt, që do të thotë se faza e lëkundjes nuk lëviz nëpër mjedis prej nga edhe marrin emrin.

Vala e shqyrtuar nuk ka amplitudë konstante, por ajo i ndërron si funksion periodik i x.

$$A = |2a \cos kx|$$

Kështu do të kemi lëkundjet me amplitudë maksimale

$$A_{maks} = 2a$$

në vendet ku është:

$$kx = n\pi \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ose

$$x = n \frac{\lambda}{2} \qquad (3)$$

Këto pika të lëkundjeve maksimale, të larguara ndërmjet veti për gjysmë gjatësie valore quhen barqe të valëve të përqëndruara.

$$A_{min} = 0$$

gjenden në vendin ku është:

$$kx = \frac{1}{2}(2n + 1)\pi$$

ose

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \qquad (4)$$

Në këto vende, të cilat gjenden në mes të barqeve, pika materiale nuk lëkundet fare. Këto pika i quajmë nyje të valëve të përqëndruara. Nyjet dhe barqet janë veti karakteristike e valëve të përqëndruara. Këto lehtë mund të vërehen dhe matja e largësive ndërmjet nyjeve shpesh përdoret për përcaktimin e gjatësisë valore.

5. SHPEJTËSIA E GRUPIT TË VALËVE

Vala e një frekuence të caktuar rrallë paraqitet në natyrë. Zakonisht në natyrë takojmë përzierje të shumë valëve frekuencat e të cilave nuk ndryshojnë shumë. Kjo përzierje e valëve quhet grup valësh. Shpejtësia me të cilën lëviz maksimumi i amplitudës së këtij grupi quhet shpejtësi grupi. Kjo shpejtësi në përgjithësi ndryshon nga shpejtësia e fazës së valëve.

Do të përcaktojmë shpejtësinë e grupit për grupin më të thjeshtë të valëve i cili përbëhet vetëm prej dy valëve, frekuencat e të cilave ndryshojnë shumë pak. Këtë ndryshim do ta shënojmë me $2d\omega$ dhe do të marrim se njëra prej tyre e ka frekuencën $\omega - d\omega$, kurse tjetra frekuencën $\omega + d\omega$. Natyrisht se edhe numrat e valëve do të ndryshojnë. Këtë ndryshim do ta shënojmë me $2dk$, ashtu që njëra valë e ka numrin e valës $k - dk$, kurse tjetra $k + dk$. Elongacionet e tyre i shënojmë kësisoji:

$$y_1 = a\, e^{i\left[(\omega - d\omega)t - (k - dk)x\right]}$$

$$y_1 = a\, e^{i\left[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x\right]}$$

Rezultati i mbledhjes së tyre është:

$$y = y_1 + y_2 = a\, e^{i(\omega t - kx)} \left[e^{i(td\omega - xdk)} + e^{-i(td\omega - xdk)} \right]$$

ose

$$y = 2a\, e^{i(\omega t - kx)} \cos (td\omega - xdk)$$

kurse vetëm pjesa reale:

$$x = 2a \cos (td\omega - xdk) \cdot \cos (\omega t - kx) \qquad (1)$$

Amplituda e kësaj vale:

$$A = 2a \cos (td\omega - xdk)$$

nuk është konstante.
Kjo ka vlerën maksimale:

$$A_{maks} = 2a$$

aty ku vlen

$$td\omega - xdk = 0$$

pra në vendin

$$x = \frac{d\omega}{dk}\, t \qquad (2)$$

Shohim se ky vend lëviz gjatë kohës njëtrajtësisht me shpejtësinë

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \qquad (3)$$

dhe paraqet shpejtësinë e grupit të valëve. E dijmë se $\omega = kv$ prandaj

$$v_g = v + k\, \frac{dv}{dk} \qquad (4)$$

Zakonisht kjo formulë shprehet me ndihmën e gjatësisë valore, sepse nga:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$\frac{d\lambda}{dk} = - \frac{2\pi}{k^2} = - \frac{\lambda}{k}$$

kurse

$$\frac{dv}{dk}=\frac{dv}{d\lambda}\;\frac{d\lambda}{dk}=-\frac{\lambda}{k}\;\frac{dv}{d\lambda}$$

dhe pasi të zëvendësojmë në (4) fitojmë:

$$v_g=v-\lambda\;\frac{dv}{d\lambda} \tag{5}$$

Nga formula e fundit shohim se shpejtësia e grupit është e barabartë me shpejtësinë e fazës, vetëm kur $\frac{dv}{d\lambda}=0$, me fjalë tjera kur shpejtësia e fazës nuk varet prej gjatësisë valore. Atëherë valët e të gjitha gjatësive valore përhapen me të njëjtën shpejtësi. Themi se në atë mjedis nuk ka disperzion. Nëse shpejtësia e fazës $v=(\lambda)$, varet prej gjatësisë valore themi se mjedisi tregon disperzion. Në atë mjedis ndryshojnë shpejtësia e grupit dhe e fazës.

6. VALËT NË TEL TË PËRFORCUAR NË SKAJE

Të mendojmë telin e hollë të përforcuar në dy skajet. Ky tel paraqet mjedis njëdimensional. Kur ndonjë pikë e tij zhvendoset nga pozita e ekuilibrimit, ajo do të lëkundet dhe do të tërheq me vete edhe pikat tjera, pra edhe ato i detyron të lëkundën. Nëpër tel formohen valët, por me ndryshim nga rastet të cilat i kemi shqyrtuar sepse teli është i kufizuar në dy skaje, kufizim ky i cili do të ndikojë edhe në valë.

Për valët në tel vlen ekuacioni diferencial:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=v^2\;\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{1}$$

Do të kërkojmë zgjidhjen e këtij ekuacioni për këto kondita kufitare:

$$y=0 \text{ për } x=0 \text{ dhe } x=l \tag{2}$$

sepse pikat $x=0$ dhe $x=l$ shprehin skajet e telit të cilat janë të përforcuara.

Ekuacioni diferencial (1) e zgjidhim me metodën e ndarjes së ndryshoreve. Supozojmë se funksioni i panjohur y mund të zbërthehet në dy faktor, prej të cilëve çdonjëri varet vetëm nga një ndryshore:

$$y(x,t)=f(x)\cdot g(t) \tag{3}$$

Zëvendësojmë në (1)

$$fg'' = v^2 g f''$$

ose

$$\frac{g''}{g} = v^2 \frac{f''}{f} \tag{4}$$

Ana e majtë varet vetëm prej ndryshores t dhe është e barabartë me një funksion i cili fare nuk varet prej t. Kjo është e mundur vetëm nëse të dy anët janë të barabarta me të njëjtën konstante. Do të shënojmë me $-\omega^2$. Kështu ekuacioni zbërthehet në

$$\begin{aligned} g'' + \omega^2 g &= 0 \\ f'' + \frac{\omega^2}{v^2} f &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

por meqë $\frac{\omega}{v} = k$, ekuacioni i dytë e ka formën:

$$f'' + k^2 f = 0 \tag{6}$$

Zgjidhja e ekuacionit të parë të sistemit (5) është:

$$g(t) = A \cos\omega t + B \sin\omega t \tag{7}$$

kurse zgjidhja e (6)

$$f(x) = \sin(kx + \delta) \tag{8}$$

Tani duhet t'i shfrytëzojmë konditat kufitare. Për $x = 0$, $y = 0$ fitojmë

$$0 = g \sin\delta$$

prej nga rrjedh: $\delta = 0$, kurse (3) do të ketë formën

$$y = g(t) \sin kx$$

Shfrytëzojmë konditën tjetër kufitare $y = 0$ për $x = l$

$$0 = g(t) \sin kl$$

kjo është e mundur vetëm nëse vlen

$$kl = n\pi \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

ose

$$k = \frac{n\pi}{l} \tag{9}$$

Meqë

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

fitojmë

$$\lambda = \frac{2l}{n} \tag{10}$$

Shohim se nëpër tel mund të formohen vetëm valët gjatësitë valore të të cilave shprehen me (10). Kjo në të njejtën kohë e kufizon edhe frekuencën e tyre

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2l} n \tag{11}$$

Pra teli mund të lëkundet me frekuencën themelore $\nu_o = \frac{v}{2l}$ ose me çfarëdo frekuence harmonike të saj të lartë. Frekuenca rrethore e një lëkundje të mundshme është:

$$\omega_n = 2\pi\nu = \frac{\pi v}{l} n \tag{12}$$

Zëvendësojmë (9) në (8) dhe (12) në (7) dhe fitojmë zgjidhjen partikulare:

$$y_n = \sin \frac{n\pi}{l} x(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t) \tag{13}$$

Integralin e përgjithshëm e fitojmë duke i mbledhur (13) sipas n

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t) \tag{14}$$

Kur prodhojmë ton me ndihmën e telit të ngrehur, ai do të ketë frekuencën themelore ν_n dhe me të të përzier harmonikët e lartë $n\nu_o$. Me çfarë intensiteti marrin pjesë në përzierje harmonikët e lartë varet prej amplitudave të tyre A_n dhe B_n. Meqë këto janë konstante të integrimit duhet t'i përcaktojmë nga konditat fillestare. Për këtë nevojitet të dijmë shpërndarjen e shpejtësive fillestare dhe elongacioneve në kohën $t = 0$. Do të supozojmë se

$$\text{për } t = 0,\ y = F(x) \text{ dhe } \dot{y} = G(x) \tag{15}$$

janë funksione të njohura. E derivojmë (14) sipas kohës:

$$\dot{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x(-A_n\omega_n \sin\omega_n t + B_n\omega_n \cos\omega_n t) \tag{16}$$

Zëvendësojmë në (14) dhe (16) kondităt (15):

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{17}$$

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{18}$$

Që të përcaktojmë A_n e shumëzojmë (17) me sin $m\pi x/l \cdot dx$ dhe e integrojmë për gjatësinë e telit:

$$\int_0^l F(x) \sin \frac{m\pi}{l} x dx = \sum_{u=1}^{n} A_n \int_0^l \sin \frac{m\pi}{l} x \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

Integralin në anën e djathtë e zhvillojmë në formën:

$$\int_0^l \sin \frac{m\pi}{l} x \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\cos \frac{(n-m)\pi}{l} x - \cos \frac{(n+m)\pi}{l} x\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{l}{(n-m)\pi} \sin \frac{(n-m)\pi}{l} x - \frac{l}{(n+m)\pi} \sin \frac{(n+m)\pi}{l} x\right] = \begin{cases} 0 \\ \frac{l}{2} \end{cases}$$

Meqë n dhe m janë numra të plotë shprehja e fundit është e barabartë me zero për çdo $n \neq m$. Përjashtim bën anëtari për të cilin $m = n$, sepse atëherë anëtari i dytë është i barabartë me zero, por i pari do të ketë formën e pacaktuar 0/0. Vlerën e këtij anëtari e njehsojmë duke shfrytëzuar rregullën e L'Hospitalit. E derivojmë numëruesin dhe emëruesin sipas ndryshores $(n - m)$ për $x = l$

$$\frac{\sin(n-m)\pi}{\frac{2(n-m)\pi}{l}} = \lim_{n=m} \frac{\pi \cos(n-m)\pi}{2 \frac{\pi}{l}} = \frac{l}{2}$$

Për A_n fitojmë

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

Duke ndjekur të njëjtën analogji nga formula (18) fitojmë:

$$B_n = \frac{2}{\omega_n l} \int_0 G(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

dhe kështu i kemi caktuar të gjitha konstantet. Seria (14) quhet seri e Furieut, kurse A_n dhe B_n koeficientët e Furieut.

Si shembull do të cekim lëkundjet e telit, nëse zhvendoset në pikën $x = x_o$ me një shpejtësi v_o. Do të kemi këto kondita:

$$\text{për } t = 0, \quad y = F(x) = 0$$

$$\dot{y} = G(x) = \begin{cases} 0 \text{ për } x \neq x_o \\ v_o \text{ për } x = x_o \end{cases}$$

Kuptojmë se $A_n = 0$ kurse për B_n fitojmë:

$$B_n = \frac{1}{\pi l \nu_n} v_o \sin \frac{n\pi x_o}{l}$$

nëse me ν shënojmë frekuencën themelore, atëherë $\nu_n = \nu n$ dhe për B_n fitojmë:

$$B_n = \frac{v_o}{\pi l n \nu} \sin \frac{n\pi x_o}{l}$$

kurse për lëkundjet e telit:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_o}{\pi l n \nu} \sin \frac{\pi n x_o}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} \sin 2\pi n \nu t$$

7. VALËT TRIDIMENSIONALE

a) Valetët e rrafshta

Mjedisi njëdimensional është abstraksion. Në jetën e përditshme operojmë në hapësirën tridimensionale, prandaj do të zgjerojmë njohuritë tona për këto mjedise.

Së pari do të shqyrtojmë valët e rrafshta. Këto janë valë të cilat përhapen në kah të caktuar. Sipërfaqet e fazave të njëjta janë rrafshe normale në kah të përhapjes së valëve. Do të vendosim boshtin ξ të një sistemi koordinatesh kënddrejta në kah të përhapjes së valëve. Atëherë

$$\xi = \text{const}$$

paraqet ekuacionin e rrafshit në të cilin qëndrojnë të gjitha pikat të cilat i kanë fazat e njëjta. Do ta shënojmë elongacionin e valës me u dhe për të mund të shkruajmë formulën:

$$u = A\,f(\omega t - k\xi) + B\,g(\omega t + k\xi) \qquad (1)$$

Kjo formulë është identike me formulën gjegjëse te valët në mjedisin njëdimensional, me ndryshim se këtu ξ është njëra koordinatë e pikës në të cilën e përcaktojmë elongacionin. Meqë e njëjta fazë gjendet në tërë rrafshin $\xi = \text{const}$, mund të marrin për dy koordinate tjera vlera arbitrare.

Shpeshherë nuk jemi në gjendje që të vendosim sistemin e koordinatave në kah të përhapjes së valëve, por ai sistem përcaktohet me kondita tjera fizike. Prandaj formulën (1) duhet ta transformojmë për rastin kur sistemi i koordinatave ka pozitë arbitrare ndaj kahut të përhapjes së valëve.

Do të marrim sistemin e koordinatave $0(x, y, z)$. Kahu i përhapjes së valëve përcaktohet me vektorin unitar $\vec{n}_o$. Do ta vendosim boshtin ξ të një sistemi ndihmës koordinat në kah të përhapjes së valëve. Në këtë sistem elongacioni i valës përcaktohet me formulën (1). Që të fitojmë valën në sistemin e dhënë të koordinateve duhet të kryejmë transformimin e koordinatave. Do të përcaktojmë ξ në sistemin e dhënë.

Në fig. 23 është vizatuar një rrafsh i fazave të njëjta. Vektori i pozitës i cilësdo pikë të këtij rrafshi është $\vec{r}$. Kur e projektojmë në kahun e $\vec{n}_o$, për të gjitha pikat e rrafshit të fazave të njëjta fitojmë të njëjtën gjatësi të projeksionit ξ. E dijmë se projeksioni i vektorit në kah të dhënë është i barabartë me prodhimin skalar të atij vektori dhe vektorit unitar në kah të projektimit. Prandaj shkruajmë

$$\xi = \vec{r} \cdot \vec{n}_o$$

Kësisoji kemi kryer transformimin sepse koordinata ξ është shprehur me ndihmën e koordinatave x, y, z, koordinata këto të vektorit të pozitës $\vec{r}$. Zëvendësojmë në (1):

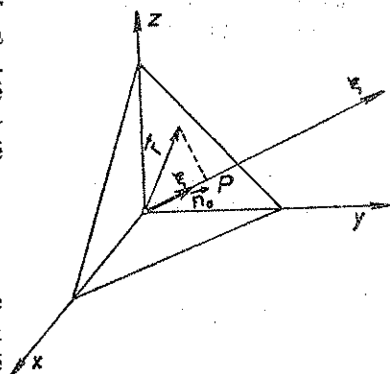


Fig. 23

$$u = A\,f(\omega t - k\,\vec{n}_o\vec{r}) + B\,g(\omega t + k\,\vec{n}_o\vec{r})$$

Do ta definojmë vektorin e valës $\vec{k}$ i cili ka kah të përhapjes së valëve. Pra,

$$\vec{k} = \vec{n}_o\,k \tag{2}$$

kurse formulën për valë e shkruajmë kësisoji:

$$u = Af(\omega t - \vec{k}\vec{r}) + Bg(\omega t + \vec{k}\vec{r}) \tag{3}$$

Kjo është formula e kërkuar e valës së rrafshtë. Anëtari i parë tregon valën e cila përhapet në kah të vektorit $\vec{k}$, kurse anëtari i dytë valën e cila përhapet në kahun $-\vec{k}$. Do të përcaktojmë ekuacionin diferencial të cilin e kënaq funksioni u. Derivati i dytë sipas kohës është i barabartë me:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 (Af'' + Bg'')$$

dhe kërkojmë

$$grad\;u = (-Af' + Bg')\;grad\;(\vec{k}\vec{r}) = \vec{k}(-Af' + Bg')$$

kërkojmë ende

$$div\;grad\;u = \Delta u = \vec{k}\;grad\;(-Af' + Bg') = k^2(Af'' + Bg'')$$

sepse $div\,\vec{k} = 0$ pasi $\vec{k}$ është vektor konstant. Zëvendësojmë shprehjen në kllapa nga derivati sipas kohës:

$$\Delta u = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \text{ku:} \quad \frac{k}{\omega} = \frac{1}{v} \tag{4}$$

Ky është ekuacioni diferencial i valëve në mjedisin tredimensional. Shohim se është zgjerim natyror i ekuacionit të mjediseve njëdimensionale.

b) Valët sferike

Ekuacioni (4) përmban edhe një zgjidhje e cila në fizikë përdoret shpesh. Ky është rasti i valëve sferike. Në të vërtetë, nëse burimi i valëve është i koncentruar në një pjesë të vogël të hapësirës, teorikisht

në një pikë, atëherë nga ajo valët përhapen në të gjitha kahet. Në mjedis homogjen sipërfaqet e fazave të njëjta të këtyre valëve e kanë formën e sferave koncentrike të përshkruara rreth burimit të valëve. Këto valë quhen valë sferike.

Për këtë rast operatorin e Laplasit $\triangle$ e shprehim në koordinata polare me qendër në burim të valëve. Atëherë funksioni u varet vetëm prej koordinatës r e jo edhe nga dy koordinatat tjera ϑ dhe φ. Do të kemi:

$$u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial u}{\partial r} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial u}{\partial r} + u \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (ru)$$

Zëvendësojmë në (4)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (ru) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

shumëzojmë me r dhe e shënojmë nën derivatin sipas kohës:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (ru) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (ru) \tag{5}$$

Kemi fituar të njëjtin ekuacion diferencial sikurse te valët njëdimensionale, me ndryshim se në vend të x këtu figuron r dhe në vend të funksionit të panjohur qëndron prodhimi ru. Prandaj do ta shkruajmë zgjidhjen e cekur me ndërrimin e simboleve:

$$ru = Af(\omega t - kr) + Bg(\omega t + kr)$$

ose

$$u = \frac{A}{r} f(\omega t - kr) + \frac{B}{r} g(\omega t + kr) \tag{6}$$

Kjo është formula për elongacion në valën sferike. Anëtari i parë shpreh valën e cila përhapet në kah të $+r$, kurse anëtari i dytë valën e cila përhapet në kahun e $-r$. Vala e parë është divergjente, valë e cila del nga burimi, ndërsa vala e dytë është konvergjente. Kjo është vala e cila shkon kah burimi. Në problemet e zakonshme ekziston vetëm vala divergjente dhe duhet të merret $B = 0$.

Për valën divergjente është karakteristike se amplituda e saj varet nga largësia prej burimit të valëve. Formula (6) na tregon se amplituda është proporcionale e zhdrejtë me largësinë nga burimi. Kësisoji lëkundjet në këto valë janë më të dobëta, sa më larg gjenden nga burimi.

Te lëvizjet valore duhet definuar edhe intensitetin e valëve. Me intensitet të valës kuptojmë energjinë të cilën e bart vala në njësi të kohës nëpër njësi të sipërfaqes së vendosur normal në kah të përhapjes së saj.

Kemi vërejtur te oshilimet se energjia e lëvizjeve oshiluese është proporcionale me katrorin e amplitudës së lëkundjes. Prandaj edhe energjia të cilën e bart vala është proporcionale me katrorin e amplitudës së saj, pra me madhësinë $\frac{A^2}{r^2}$. Shohim se intensiteti i valëve sferike divergjente është proporcional i zhdrejtë me katrorin e largësisë nga burimi.

8. PËRHAPJA E VALËVE NË MEMBRANË KATËRKËNDËSHI

Do të shqyrtojmë valët të cilat përhapen nëpër membranë të formës së katërkëndëshit. Ajo le të jetë e përforcuar në skajet e veta. Dimensionet e saj janë a dhe b. Nëpër dy skajet e membranës do t'i vendosim boshtet e një sistemi të koordinateve kanddrejta. Në këtë sistem pozitën e pikës në membranë e përcaktojnë koordinatat e saj x dhe y kurse elongacionin e valës transverzale e përcakton koordinata e tretë z. Konditat kufitare të problemit i shkruajmë kësisoji:

$z = 0$ për $x = 0$ dhe $x = a$ dhe për $y = 0$ dhe $y = b$.

Ekuacioni diferencial i valëve në membranë e cila paraqet mjedis dydimensional shprehet në formën:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

E zgjidhim këtë ekuacion diferencial me metodën e ndarjes së ndryshoreve. Paraqesim zëvendësimin

$$z(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot T(t) \tag{2}$$

Zëvendësojmë në ekuacion:

$$XYT'' = v^2(YTX'' + XTY'')$$

pjesëtojmë me XYT dhe fitojmë:

$$\frac{T''}{T} = v^2 \left(\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}\right)$$

Anën e majtë e zëvendësojmë me ω^2 dhe fitojmë ekuacionin:

$$T'' + \omega^2 T = 0$$

zgjidhja e të cilit është:

$$T(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{3}$$

Ka ngelur:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\frac{\omega^2}{v^2} \tag{4}$$

Me të njëjtin përfundim sikurse te lëkundjet e telit të përforcuar në dy skaje në mënyrë që shuma e (4) të jetë konstante duhet që çdonjëri prej tyre të jetë konstant. Shkruajmë:

$$\frac{X''}{X} = -k_1^2 \qquad \frac{Y''}{Y} = -k_2^2$$

dhe fitojmë ekuacionet diferenciale:

$$X'' + k_1^2X = 0 \tag{5}$$

$$Y'' + k_2^2Y = 0$$

kurse parametrat e ndarjes i lidh kondita

$$k_1^2 + k_2^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \tag{6}$$

Zgjidhja e ekuacioneve (5) është:

$$X = \sin(k_1x + \delta_1) \tag{7}$$

$$Y = \sin(k_2y + \delta_2)$$

Që të kënaqen konditat kufitare duhet të marrim

$$X = 0 \text{ për } x = 0 \text{ dhe } x = a$$

kondita e parë na jep:

$$0 = \sin\delta_1 \text{ prej nga } \delta_1 = 0$$

kurse kondita e dytë:

$$0 = \sin k_1a$$

ose

$$k_1a = n_1\pi$$

prej nga

$$k_1 = \frac{n_1 \pi}{a}$$

Kondita kufitare për y na jep gjithashtu

$$\delta_2 = 0$$

dhe

$$k_2 b = n_2 \pi$$

ose

$$k_2 = \frac{n_2 \pi}{b}$$

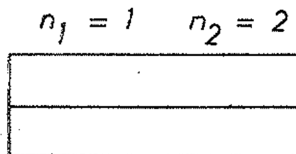
ku me n_1 dhe n_2 i kemi shënuar dy numra të plotë. Zëvendësojmë vlerat për k_1 dhe k_2 në (6):

$$\frac{4\pi^2 \nu^2}{v^2} = \frac{n_1^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n_2^2 \pi^2}{b^2}$$

dhe për frekuencë fitojmë vlerën:

$$\nu = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}}$$

Numrat e plotë n_1 dhe n_2 janë numra rendorë të frekuencave vetiake dhe na tregojnë sa barqe i ka vala e përqëndruar në kah të koordinatës gjegjëse. Frekuenca themelore fitohet për $n_1 = n_2 = 1$. Atëherë në mes të membranës gjendet vetëm një bark, kurse nyjet janë në skaje. Dy frekuencat e para të larta i kemi për



dhe

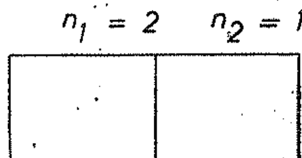


Fig. 24

Në mes të membranës paraqitet edhe një vijë nyjore. Fig. 24 tregon se gjendet në drejtim i cili e përgjysmon membranën.

Frekuencat tjera të larta paraqiten me kombinimin e numrave rendorë

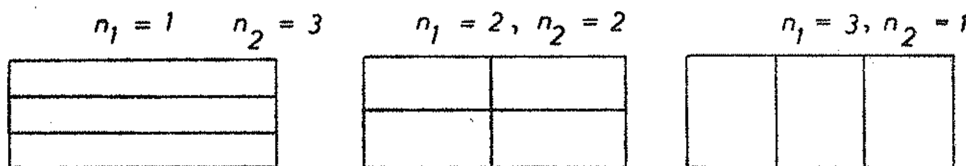


Fig. 25

Fig. 25 tregon vijat nyjore për këta numra rendorë. Në mënyrë analoge mund të vazhdojmë edhe për frekuenca tjera.

Zgjidhja e përgjithshme e ekuacionit (1) është:

$$z = \sum_{n_1} \sum_{n_2} (A_{n_1 n_2} \cos\omega t + B_{n_1 n_2} \sin\omega t) \sin \frac{n_1 \pi x}{a} \sin \frac{n_2 \pi y}{b} \qquad (8)$$

Amplitudat e frekuencave të caktuara duhet njehsuar me ndihmën e konditave fillestare, të cilat varen prej mënyrës se si e kemi vendosur membranën në lëvizje oshiluese.

9. VALËT NË MEMBRANË RRETHORE

Le të jetë e përforcuar membrana në skajet e rrethit me rreze R. Do të vendosim koordinatat polare r dhe φ me qendër, në qendër të rrethit. Zhvendosja e pikave të membranës u shprehet si funksion i koordinatave polare r dhe φ dhe kohës t

$$u = u(r, \varphi, t)$$

Operatori i Laplasit në koordinata polare e ka formën:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

kurse ekuacioni:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \Delta u$$

shndërrohet në:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right) \qquad (1)$$

Konditat kufitare shprehen në formën

$$u = 0 \text{ për } r = R \tag{2}$$

kurse ato fillestare

$$\text{për } t = 0,\ u = f(r, \varphi) \text{ dhe } \frac{\partial u}{\partial t} = F(r, \varphi) \tag{3}$$

Ne do të shqyrtojmë lëkundjet simetrike boshtore që do të thotë se funksionet $f(r, \varphi)$ dhe $F(r, \varphi)$ nuk varen nga këndi φ. Duke u bazuar në këtë edhe elogancioni do të ketë formën $u = u(r, t)$. Kjo do të thotë se në t të caktuar forma e membranës oshiluese do të jetë sipërfaqe rrotulluese. Nga ky thjeshtësim ekuacioni (1) thjeshtësohet në:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \tag{4}$$

Sikurse edhe në rastet e mëparshme duke e zbatuar metodën e Furieut do të shkruajmë:

$$u(r, t) = U(r) \cdot T(t) \tag{5}$$

Pasi të derivojmë (5) dhe të zëvendësojmë në (4) ndryshoret mund t'i ndajmë siç vijon:

$$\frac{T''}{v^2 T} = \frac{U'' + \frac{1}{r} U'}{U} = -S^2 \tag{6}$$

Konstantja $-S^2$ e paraqitur në (6) arsyetohet sikurse te lëkundjet e telit apo të membranës katërkëndëshe.

Nga (6) fitojmë dy ekuacione diferenciale:

$$T'' + S^2 V^2 T = 0 \tag{7}$$

$$U'' + \frac{1}{r} U' + S^2 U = 0 \tag{8}$$

Ekuacioni diferencial (8) quhet ekuacion i Beselit dhe njëri integral partikular i tij e ka formën:

$$U(r) = J_o(Sr)$$

ku me J_o kemi shënuar funksionin e Beselit të rendit zero. Integralin tjetër partikular nuk do ta marrim, sepse në qendër të membranës, për $r = 0$ tenton në pambarim dhe si i tillë nuk shpreh gjendje fizike. Shfrytëzojmë konditën (2) dhe fitojmë:

$$J_o(SR) = 0 \text{ sepse } U = 0 \text{ për } r = R$$

prej nga

$$S_k = \frac{\mu_k}{R} \tag{9}$$

ku μ_k janë rrënjët e funksionit të Beselit $J_o(x)$. Nga kjo zgjidhja (7) është:

$$T_k(t) = A_o \cos S_k vt + B_k \sin S_k vt$$

kurse (5) do të jetë:

$$u_k(r, t) = A_k \cos S_k vt + B_k \sin S_k vt) J_o(S_k r) \tag{10}$$

Shohim se te lëkundjet e membranës rrethore nuk paraqiten vetëm funksionet trigonometrike sikurse në rastet e mëparshme, por edhe funksionet e Beselit. Integralin e përgjithshëm e fitojmë duke i mbledhur integralet (10) sipak k. Fitojmë:

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos S_k vt + B_k \sin S_k vt) J_o(S_k r) \tag{11}$$

Për përcaktimin e koeficientëve A_k dhe B_k duhet shfrytëzuar konditat fillestare të lëkundjes. Nga (3) dhe arsyetimi i dhënë në fillim do të kemi:

$$\text{për } t = 0 \; u = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_o \left(\mu_k \frac{r}{R} \right) = f(r)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v\mu_k}{R} B_k J_o \left(\mu_k \frac{r}{R} \right) = F(r)$$

Paraqesim ndryshoren e re $r = Rx$ dhe shprehjet e fundit marrin formën

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k J_o(\mu_k x) = f(Rx) \tag{12}$$

$$\frac{v}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k B_k J_o(\mu_k x) = F(Rx) \tag{13}$$

I shumëzojmë të dy anët e (12) dhe të (13) me $xJ_o(\mu_n x)$ dhe i integrojmë në intervalin prej 0 deri më 1. Atëherë në anën e majtë do të kemi vetëm një anëtarë, për $k = n$

$$A_n \cdot \frac{1}{2} J_1^2(\mu_n) = \int_0^1 xJ_o(\mu_n x)\, f(Rx)dx$$

dhe

$$\frac{v\mu_n}{R} B_n \frac{1}{2} J_1^2(\mu_n) = \int_0^1 xJ_o(\mu_n x)\, F(Rx)dx$$

Për integrimin e shprehjeve të mëparshme është përdorur integrali i njohur nga teoria e funksioneve të Beselit:

$$xJ_o^2(\mu_k x)dx = \frac{1}{2} J_1^2(\mu_k)$$

Prej nga për koeficientët A_k dhe B_k fitojmë shprehjet, $n = k$

$$A_k = \frac{2}{J_1^2(\mu_k)} \int_0^1 xJ_o(\mu_k x)\, f(Rx)dx$$

$$B_k = \frac{2R}{v\mu_k J_1^2(\mu_k)} \int_0^1 xJ_o(\mu_k x)\, F(Rx)dx$$

Sikurse edhe në rastet e mëparshme funksioni $u_k(r, t)$ i përcaktuar me (10) shpreh valë të përqëndruara. Vijat e barqeve dhe të nyjeve paraqesin rrathë koncentrikë. Rrathët e nyjeve fitohen për ato vlera të r, për të cilat

$$J_o(S_k r) = J_o \frac{\mu_k r}{R} = 0$$

Këta përcaktohen me

$$\frac{\mu_k r}{R} = \mu_1,\ \frac{\mu_k r}{R} = \mu_2, \ldots \frac{\mu_k r}{R} = \mu_{k-1}$$

d.m.th.

$$r_1 = \frac{\mu_1}{\mu_k} R, \; r_2 = \frac{\mu_2}{\mu_k} R, \ldots r_{k-1} = \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k} R$$

duke njehsuar vlerën $r = R$. Kuptohet se nuk ka kuptim të merret

$$\frac{\mu_k r}{R} = \mu_{k+1} \text{ sepse atëherë } r = \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} R > R.$$

Kuptojmë se vala e përqëndruar $u_k(r, t)$ i ka k rrathë të nyjeve. Në mes tyre gjenden rrathët e barqeve, të cilët fitohen për ato vlera të r për të cilat funksioni $J_o \frac{\mu_k r}{R}$ *do* të ketë vlerë maksimale apo minimale. Këto janë rrënjët e funksionit $J_1 \frac{\mu_k r}{R} = 0$.

IV. LËVIZJA ME MASË TË NDRYSHUAR

1. EKUACIONI I MESHÇERSKIT

Në disa probleme të mekanikës, gjatë lëvizjes së trupit ndërron edhe masa e tij. Kështu, p.sh., gjatë lëvizjes së raketës e cila nxitohet duket hedhur gazet në kah të kundërt, masa e saj vazhdimisht zvogëlohet. Pastaj, gjatë rënies së pikave të shiut nëpër atmosferë të ngopur me avuj uji, masa e tyre rritet deri në kufij të caktuar.

Në përgjithësi mund të rritet apo të zvogëlohet masa e trupit. Quajmë trup themelor trupin të cilit i shkëputen apo i ngjiten grimcat tjera. Do të supozojmë se trupi themelor mund të mendohet si grimcë, kështu që lëvizjet e brendshme mund të mos përfillen dhe se procesi i shkëputjes apo i ngjitjes kryhet në mënyrë të vazhduar. Me rëndësi të veçantë është shqyrtimi i lëvizjes së trupit themelor, por në këtë rast nuk mund të zbatohet ekuacioni themelor i dinamikës i formës (I.3.5). Shqyrtimin do ta fillojmë nga fakti se në sistemin e tërësishëm të përbërë nga trupi themelor dhe grimcat të cilat shkëputen apo ngjiten mund të zbatohet ligji mbi ruajtjen e impulsit.

Le të ketë trupi themelor në kohë t masën m dhe shpejtësinë $\vec{v}$. Gjatë intervalit kohor t, $t + dt$ le t'i ngjitet grimca me masë dm_1 e cila e ka shpejtësinë $\vec{u}_1$. Pas ngjitjes trupi themelor do të ketë masën $m + dm_1$ dhe do të lëviz me shpejtësi $\vec{v} + \vec{dv}_1$. Në këtë rast $\vec{dv}_1$ paraqet ndërrimin e shpejtësisë së trupit themelor pas ngjitjes së grimcës. Kjo grimcë dhe trupi themelor paraqesin sistem të izoluar dhe mund të zbatojmë ligjin e ruajtjes së impulsit. Do të kemi në kohën t këtë gjendje:

$$p(t) = m\vec{v} + dm_1\vec{u}_1 \tag{1}$$

kurse në kohën $t + dt$

$$p(t + dt) = (m + dm_1)(\vec{v} + \vec{dv}_1) \tag{2}$$

Nga ligji mbi ruajtjen e impulsit fitojmë:

$$(m + dm_1)(\vec{v} + \vec{dv}_1) = m\vec{v} + dm_1\vec{u}_1 \tag{3}$$

prej nga fitojmë:

$$m\,\vec{dv_1} + \vec{v}\,dm_1 + dm_1\,\vec{dv_1} = dm_1\,\vec{u_1}$$

Duke mos përfillur prodhimin $dm_1\,\vec{dv_1}$ si madhësi pa mbarim të vogël të rendit të dytë, fitojmë ndërrimin e shpejtësisë së trupit themelor, kur atij i ngjitet grimca:

$$\vec{dv_1} = \frac{dm_1}{m}\,(\vec{u_1} - \vec{v}) \qquad (4)$$

Supozojmë se paralelisht me ngjitjen e grimcave, paraqitet edhe shkëputja e tyre nga trupi themelor. Në kohën t, $t + dt$ le të shkëputet grimca me masë $|dm_2| = - dm_2$ me shpejtësi $\vec{u_2}$. Pas kësaj ndarje trupi themelor do të ketë masën $m - |dm_2|$ dhe do të lëvizë me shpejtësi $\vec{v} + \vec{dv_2}$. Nga këto të dhëna impulsi i këtij sistemi në kohën t do të jetë:

$$\vec{p_k}(t) = m\,\vec{v} \qquad (5)$$

ku me indeks k kemi shënuar gjendjen e shkëputjes. Në kohën $t + dt$ impulsi do të jetë:

$$\vec{p_k}(t + dt) = (m - |dm_2|)\,(\vec{v} + \vec{dv_2}) + \vec{u_2}\,|dm_2| \qquad (6)$$

Ndërsa ligji mbi ruajtjen e impulsit na jep:

$$(m - |dm_2|)\,(\vec{v} + \vec{dv_2}) + \vec{u_2}\,|dm_2| = m\,\vec{v} \qquad (7)$$

Prej nga:

$$m\,\vec{dv_2} - |dm_2|\,\vec{v} - |dm_2|\,\vec{dv_2} + \vec{u_2}\,|dm_2| = 0$$

Duke mos përfilluar edhe në këtë rast prodhimin $|dm_2|\,\vec{dv_2}$ fitojmë ndërrimin e shpejtësisë së trupit themelor pas shkëputjes së grimcës:

$$\vec{dv_2} = -\frac{|dm_2|}{m}\,(\vec{u_2} - \vec{v}) = \frac{dm_2}{m}\,(\vec{u_2} - \vec{v}) \qquad (8)$$

Më në fund nëse në trup themelor vepron edhe forca $\vec{F}$ ajo do t'i jepë një nxitim $\vec{a}$. Nëse nuk e përfillim veprimin e ndërrimit të masës së trupit themelor në këtë nxitim, atëherë mund të shkruajmë:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_3}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{9}$$

Nga shprehja e fundit mund të njehsojmë ndërrimin e shpejtësisë së trupit themelor nga veprimi i kësaj force

$$d\vec{v}_3 = \frac{\vec{F}}{m}\, dt \tag{10}$$

Ndërrimin e tërësishëm të lëvizjes së trupit themelor e gjejmë duke mbledhur shprehjet (4), (8) dhe (10). Fitojmë:

$$d\vec{v} = d\vec{v}_1 + d\vec{v}_2 + d\vec{v}_3$$

përkatësisht:

$$d\vec{v} = \frac{dm_1}{m}\,(\vec{u}_1 - \vec{v}) + \frac{dm_2}{m}\,(\vec{u}_2 - \vec{v}) + \frac{\vec{F}}{m}\, dt \tag{11}$$

E shumëzojmë (11) me $\frac{m}{dt}$ dhe fitojmë ekuacionin e kërkuar diferencial:

$$m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm_1}{dt}\,(\vec{u}_1 - \vec{v}) + \frac{dm_2}{dt}\,(\vec{u}_2 - \vec{v}) \tag{12}$$

Duke shprehur shpejtësitë relative të ngjitjes d.m.th. të shkëputjes ndaj trupit themelor, në formën:

$$\vec{u}_1{}' = \vec{u}_1 - \vec{v}$$

dhe (13)

$$\vec{u}_2{}' = \vec{u}_2 - \vec{v}$$

ekuacioni (12) mund ta shkruajmë kësisoji:

$$m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm_1}{dt}\,\vec{u}_1{}' + \frac{dm_2}{dt}\,\vec{u}_2{}' \tag{14}$$

Ekuacioni (12) respektivisht (14) quhet ekuacion i Meshçerskit dhe shpreh lëvizjen e trupit themelor kur nga ai shkëputet apo ngjitet grimca me shpejtësi të dhënë. Ndërrimi i masës së trupit themelor në njësi të kohës është:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_1}{dt} + \frac{dm_2}{dt}$$

E integrojmë dhe fitojmë:

$$m(t) = m(0) + \int_0^t \left(\frac{dm_1}{dt} + \frac{dm_2}{dt} \right) dt \tag{15}$$

ku me $m(0)$ kemi shënuar masën e trupit para shkëputjes d.m.th. para ngjitjes së grimcave.

Nëse kemi vetëm njërin proces, procesin e ngjitjes apo të shkëputjes, atëherë në ekuacionin e Meshçerskit do të bjerë njëri prej dy anëtarëve në të cilët vjen në shprehje ndërrimi i masës gjatë kohës. Mund të shkruajmë:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} \vec{u}'$$

Në shprehjen e fundit, nëse kemi të bëjmë me procesin e ngjitjes $dm > 0$, kurse për procesin e shkëputjes nga trupi themelor $dm < 0$.

2. SHQYRTIMI I EKUACIONIT TË MESHÇERSKIT

Ekuacioni i Meshçerskit (14) ndryshon nga ekuacioni (I.3.5), sepse në të përveç forcës $\vec{F}$ figurojnë edhe dy anëtarë plotësues. Nëse këta anëtarë i shënojmë me $\vec{R}$ do të kemi:

$$\vec{R} = \frac{dm_1}{dt} \vec{u}_1' + \frac{dm_2}{dt} \vec{u}_2' \tag{1}$$

Duke shfrytëzuar (1) shprehjen (14) mund ta shkruajmë:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{R} \tag{2}$$

Madhësia $\vec{R}$ e cila karakterizon ndikimin e ngjitjes dhe të shkëputjes së grimcave në lëvizje të trupit themelor quhet forcë reaktive. Nga shprehjet (1) dhe (2) kuptojmë se ekuacioni i Meshçerskit reduktohet në ekuacion të lëvizjes me masë konstante nëse forca reaktive është e barabartë me zero.

Për njohjen e forcës reaktive (1) është e nevojshme njohja e madhësive:

$$\frac{dm_1}{dt} \text{ dhe } \frac{dm_2}{dt}$$

si dhe shpejtësitë relative të grimcave të cilat ngjiten apo shkëputen nga trupi themelor $\vec{u}_1'$ dhe $\vec{u}_2'$. Duke njohur forcën reaktive dhe forcën $\vec{F}$ mund të zgjidhim problemin e lëvizjes së trupit me masë të ndryshuar.

Do të shqyrtojmë se si forca reaktive ndikon në lëvizje të trupit themelor. Do të supozojmë se shpejtësitë relative të ngjitjes dhe shkëputjes e kanë kahun e lëvizjes së trupit themelor. Meqë është:

$$\frac{dm_1}{dt} > 0$$

atëherë kahu i komponentes së parë të (1), $\frac{dm_1}{dt}\vec{u}_1'$ është i njëjtë me kahun e shpejtësisë relative $\vec{u}_1'$. Nëse shpejtësia $\vec{u}_1'$ e ka kahun e lëvizjes së trupit themelor, kjo komponente e forcë $\vec{R}$ do të shkaktojë zmadhimin e shpejtësisë së trupit themelor. Në anën tjetër, pasi $\frac{dm_2}{dt} < 0$ kahu i komponentes së dytë të (1) është i kundërt me kahun i shpejtësisë relative $\vec{u}_2'$, atëherë kjo komponente do të nxitojë trupin themelor nëse shpejtësia relative e ka kahun e kundërt ndaj kahut të lëvizjes. Pra, mund të themi se: Ngjitja e grimcave e nxiton trupin themelor nëse këto ngjiten në kahe të lëvizjes, kurse shkëputja e grimcave e nxiton atë nëse grimcat hudhen në kahe të kundërta të lëvizjes. Të shqyrtojmë rastin kur zmadhimi i masës së trupit themelor nga ngjitja e grimcave është i barabartë me zvogëlimin e shkaktuar nga shkëputja. Në këtë rast vlen:

$$\frac{dm_2}{dt} = -\frac{dm_1}{dt}$$

kurse ekuacioni i Meshçerskit (14) do të ketë formën:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm_1}{dt}(\vec{u}_1' - \vec{u}_2').$$

Ekuacioni i fundit tregon se edhe kur masa totale e trupit themelor nuk ndërron gjatë kohës, ekuacioni i lëvizjes së tij ndryshon nga ekuacioni i lëvizjes me masë të pandryshuar (I.3.5).

Më në fund nëse shpejtësitë relative të grimcave gjatë ngjitjes apo shkëputjes janë të barabarta me zero:

$$\vec{u_1}' = 0 \quad \text{dhe} \quad \vec{u_2}' = 0$$

atëherë në (14) nuk ekziston forca reaktive dhe do të ngelë

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

por këtu duhet konsideruar se masa është funksion i kohës.

3. PROBLEMI I CIOLKOVSKIT

Si shembull të lëvizjes me masë të ndryshuar do të shqyrtojmë problemin e lëvizjes së raketës i cili njihet si problem i Ciolkovskit. Le të hedhet raketa në drejtim vertikal nga sipërfaqja e Tokës me shpejtësi fillestare $\vec{v}_o$. Nga rrjedhja e gazeve me shpejtësi konstante relative $\vec{u}_o$ në kah të kundërt të lëvizjes së saj masa do t'i zvogëlohet vazhdimisht. Supozojmë se ky ligj i ndërrimit të masës $m = m_o f(t)$ është i njohur. Supozojmë se lëvizja e raketës kryhet në afërsi të sipërfaqes së Tokës, kështu që forca e rëndësimit tokësor $m\vec{g}$ është konstante. Mendojmë se rezistenca e ajrit është e papërfillshme. Nëse në drejtim të lëvizjes së raketës e vendosim boshtin y me fillim në pikën e lansimit, atëherë ekuacioni i lëvizjes së saj sipas ekuacionit (14) është:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \frac{dm}{dt} \vec{u}_o \tag{1}$$

kurse ekuacioni skalar përkatës i cili i përgjigjet boshtit y është:

$$m \frac{dv}{dt} = - mg - u_o \frac{dm}{dt}$$

prej nga fitojmë:

$$\frac{dv}{dt} = - g - u_o \frac{d \ln m}{dt}$$

dhe për shpejtësi të sajë fitojmë:

$$v = - gt - u_o \ln m + C \tag{2}$$

Konstanten e integrimit e përcaktojmë nga konditat fillestare të lëvizjes. Në kohën $t = 0$, $v = v_o$ dhe $m = m_o$

$$C = v_o + u_o \ln m_o$$

kurse (2) merr formën:

$$v = v_o - gt + u_o \ln \frac{m_o}{m} \qquad (3)$$

Nga (3) shohim se shpejtësia e raketës nuk varet prej ligjit të ndërrimit të masës, por vetëm prej marrëdhënies së masës fillestare dhe masës në moment të dhënë. Kjo shpejtësi gjithashtu varet prej shpejtësisë relative të hedhjes së gazeve.

Që të gjejmë rrugën e kaluar e integrojmë edhe një herë ekuacionin (3)

$$y = v_o t - \frac{1}{2} gt^2 + u_o \int_0^t \ln \frac{m_o}{m(t)} dt \qquad (4)$$

konstantja e dytë e integrimit është e barabartë me zero sepse $y = 0$ në kohën $t = 0$. Shprehja (4) nuk mund të integrohet, pra edhe rruga nuk mund të dihet nëse nuk e dijmë ligjin e ndërrimit të masës gjatë kohës. Shohim se rruga e raketës varet prej këtij ligji.

Ne do të supozojmë se masa e raketës gjatë kohës zvogëlohet sikurse funksioni eksponencial:

$$m = m_o e^{-\alpha t}$$

atëherë,

$$\ln \frac{m_o}{m} \ln e^{\alpha t} = \alpha t$$

dhe integrali (4) e ka vlerën

$$\int_0^t \ln \frac{m_o}{m} dt = \int_0^t \alpha t dt = \frac{1}{2} t^2$$

dhe për rrugë të raketës fitojmë:

$$y = v_o t - \frac{1}{2} gt^2 + \frac{1}{2} u_o \alpha t^2$$

ose

$$y = v_o t + \frac{1}{2} (\alpha u_o - g) t^2 \qquad (5)$$

Shprehja (5) e fituar nga supozimi i ndërrimit të masës sipas kohës në formë të funksionit eksponencial tregon se lëvizja e raketës është njëtrajtësisht e nxituar nëse $\alpha u_o > g$, do të jetë njëtrajtësisht e ngadalësuar për $\alpha u_o < g$ dhe e njëtrajtshme për $\alpha u_o = g$.

Në rastin që e shqyrtuam kemi supozuar se lëvizja e raketës kryhet në afërsi të sipërfaqes së Tokës dhe se rezistenca e ajrit është e papërfillshme. Në rast të përgjithëm forcën e rëndimit tokësor duhet zëvendësuar me forcën e Njutnit për gravitacion të formës (I.8.1). Pastaj duhet të merret në konsiderim forca e rezistencës së ajrit e cila përafërsisht mund të shkruhet: $-kv^2\vec{v}_o$. Atëherë në vend të ekuacionit (1) do të kemi:

$$m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = -G\,\frac{mM}{r^2}\,\vec{r}_o - kv^2\vec{v}_o + \frac{dm}{dt}\,\vec{u}_o \qquad (6)$$

ku janë: m-masa e raketës, M-masa e Tokës $\vec{v}_o$ vektori unitar në kah të shpejtësië. Ekuacioni përkatës skalar i (6) është:

$$m\,\frac{dv}{dt} = -G\,\frac{mM}{y^2} - kv^2 - \frac{dm}{dt}\,u_o \qquad (7)$$

ku me y kemi shënuar largësinë nga raketa deri në qendër të Tokës, kurse me u_o shpejtësinë relative të rrjedhjes së gazeve. Ekuacioni (7) zgjidhet në mënyrë të ngjashme si në rastin e mëparshëm, por zgjidhja e tij nuk mund të shprehet me ndihmën e funksioneve elementare.

V. LËVIZJA NË SISTEM RROTULLUES

1. FORCA INERCIALE

Në sistem koordinatash i cili lëviz me shpejtësi të ndryshuar paraqitet një formë e veçantë e forcës. E quajmë forcë inerciale.

Të mendojmë një sistem të koordinatave O' *i* cili lëviz me shpejtësi $\vec{v}_s$ ndaj sistemit tjetër të koordinatave O. Nga fig. 26 shohim se shpejtësia në sistemin lëvizës $\vec{v}'$ përbëhet nga shpejtësia në sistemin e palëvizshëm $\vec{v}$ dhe shpejtësisë së lëvizjes së sistemit $\vec{v}_s$. Nga figura shohim se vlen formula

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_s \qquad (1)$$

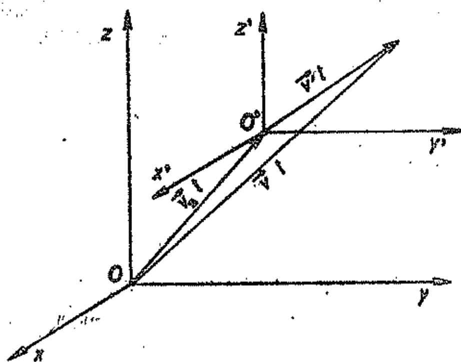


Fig. 26

Duhet theksuar se formula e këtillë vlen vetëm nëse shpejtësitë janë të vogla në krahasim me shpej-tësinë e dritës. Për shpejtësi të mëdha duhet shfrytëzuar formulat e teorisë së relativitetit për të cilat do të bëhet fjalë në fund të këtij libri. E derivojmë formulën (1) sipas kohës dhe fitojmë për nxitim:

$$\vec{u}' = \vec{u} - \frac{d\vec{v}_s}{dt} \qquad (2)$$

E shumë zojmë (2) me masën e pikës materiale dhe fitojmë shprehjen për forcë:

$$\vec{f}' = \vec{f} - m\,\frac{d\vec{v}_s}{dt} \qquad (3)$$

Shohim se forca në sistem lëvizës ndryshon nga forca në sistem të palëvizshëm për anëtarin:

$$\vec{f_i} = -m \frac{d\vec{v_s}}{dt} \tag{4}$$

Kjo është gjithashtu një forcë. E quajmë forcë inerciale. Shohim se ajo ka kah të kundërt nga kahu i ndërrimit të shpejtësisë së sistemit lëvizës. Pra, nëse sistemi lëvizës, lëviz në mënyrë të nxituar forca inerciale vepron në kah të kundërt të nxitimit të sistemit. Nëse sistemi lëvizës lëviz në mënyrë të ngadalësuar, atëherë forca inerciale vepron në kah të lëvizjes së sistemit.

Forcën inerciale e diktojmë në çdo mjet komunikacioni gjatë ndërrimit të shpejtësisë së tij. Gjatë nxitimit ndjejmë presionin në ulëse, kurse gjatë frenimit forcën e cila na hedh në kah të lëvizjes. Gjithashtu forcën inerciale e përjetojmë në ashensor. Kur ashensori lëviz përpjetë në mënyrë të nxituar, atëherë ndjejmë presion në dysheme, na duket se na është rritur pesha. Në rast kur ashensori lëviz teposhtë në mënyrë të nxituar, ndjejmë presion më të vogël në dysheme, na duket thuajse na është zvogëluar pesha. Kjo përshkruhet me formulën (3). Në të vërtetë te ky shembull $\vec{f'}$ është pesha jonë në sistem lëvizës, kjo është ajo peshë të cilën e ndjejmë në ashensor. Pesha në sistem të palëvizshëm është $\vec{f}$. Te lëvizja nga poshtë-lart nxitimi i sistemit $\dot{\vec{v_s}}$ ka kah të kundërt nga veprimi i rëndimit dhe meqë forca inerciale është negative, kjo forcë do të ketë të njëjtin kah me peshën, gjë që ne e ndjejmë rritjen e saj. Por te lëvizja e nxituar nga lart-poshtë nxitimi i sistemit e ka kahun e rëndimit dhe meqë forca inerciale ka kah të kundërt na duket se pesha është zvogëluar.

Sikur ashensori të bjerë me nxitim $\vec{g}$, forca inerciale do të jetë e barabartë me rëndimin, por me kah të kundërt. Në ketë ashensor të gjithë trupat do të gjenden në gjendje të pa peshë.

Nëse shpejtësia e sistemit lëvizës është konsante

$$\vec{v_s} = const.$$

atëherë

$\frac{d\vec{v_s}}{dt} = 0$ dhe nuk do të ketë forcë inerciale. Pra, $\vec{f_i} = 0$. Në këtë rast

$$\vec{f'} = \vec{f}$$

çka do të thotë se forcat në të dy sistemet janë të barabarta. Kur gjendemi në mjet komunikacioni, gjatë kohës së lëvizjes me shpejtësi konstante nuk ndjejmë veten sikurse në sistem të palëvizshëm.

2. LËVIZJA NË SISTEM I CILI RROTULLOHET

E dimë se Toka rrotullohet rreth boshtit të vet prandaj të gjitha sistemet koordinative të lidhura me Tokën rrotullohen ndaj sistemeve të lidhura me yje të palëvizshme. Pasi sistemet tona laboratorike gjithmonë duhet t'i lidhim me Tokën, vazhdimisht punojmë në sisteme rrotulluese koordinative. Do të njihemi me vetitë e dukurive në këto sisteme.

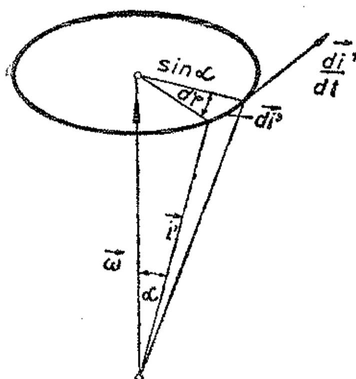


Fig. 27

Së pari do t'i krahasojmë vektorët unitarë të kaheve të boshteve të koordinatave në sistemin e palëvizshëm me ato në sistemin rrotullues. Do të theksojmë se madhësitë në sistemin rrotullues do t'i shënojmë me një vizë pranë simbolit apostrof), kurse ato zakonisht në sistem të palëvizshëm. Do të supozojmë se të dy sistemet e kanë qendrën e përbashkët. Le të rrotullohet sitemi lëvizës me shpejtësi këndore ω. Shpejtësinë këndore e shprehim si vektor i cili e ka drejtimin e pozitës momentale të boshtit të rrotullimit dhe kahun e shoqëruar me rrotullimin djathtas rreth atij boshti.

Do të shqyrtojmë vektorin unitar $\vec{i}'$. Në fig. 27 është paraqitur pozita e këtij vektori në kohën t. Në intervalin e kohës dt ky vektor e ndërron pozitën e vet. Ndërrimi i pozitës së këtij vektori përcaktohet me vektorin $\vec{di}'$. Figura tregon se intensiteti i këtij ndërrimi është:

$$di' = \sin\alpha \cdot d\varphi$$

Këtu me α kemi shënuar këndin të cilin e mbyll vektori i' me shpejtësinë këndore, kurse me $d\varphi$ këndin e rrotullimit për kohën dt. E pjesëtojmë këtë formulë me dt. Fitojmë:

$$\frac{di'}{dt} = \sin\alpha \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \sin\alpha \cdot \omega$$

sepse $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$

Rezultati i fituar paraqet intensitetin e prodhimit vektorial të vektorit $\vec{\omega}$ dhe vektorit unitar $\vec{i}'$. Meqë vektori $\vec{di}'$ është normal edhe në ω edhe në i' mund të shkruajmë:

$$\frac{\vec{di}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}' \tag{1}$$

Kjo është shprehja për derivatin kohor të vektorit unitar $\vec{i}'$. Në mënyrë të ngjashme i gjejmë derivatet e vektorëve tjerë unitar:

$$\frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}' \qquad \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}'$$

I gjejmë edhe derivatet e dyta të tyre sipas kohës:

$$\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{i}') = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{i}'}{dt}$$

Zëvendësojmë derivatin e parë nga (1):

$$\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{i}') \tag{2}$$

Në mënyrë të ngjashme njehsohen edhe derivatet për dy vektorët tjerë unitarë.

Pasi të dy sistemet e kanë një qendër të përbashkët, atëherë vektorët e pozitave të ndonjë pike materiale janë të barabartë

$$\vec{r} = \vec{r}'$$

por ndryshojnë komponentet e tyre. Vektori i pozitës në sistemin O' i ka komponentet:

$$\vec{r}' = \vec{i}'x' + \vec{j}'y' + \vec{k}'z'$$

Që të fitojmë shpejtësinë duhet derivuar sipas kohës:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' = \vec{i}' \frac{dx'}{dt} + \vec{j}' \frac{dy'}{dt} + \vec{k}' \frac{dz'}{dt} + x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt}$$

sepse duhet marrë në konsiderim se vektorët unitarë nuk janë konstantë. Meqë $dx'/dt = v_x$ dhe ngjashëm, për tre anëtarët e formulës fitojmë:

$$\vec{i}'v_x' + \vec{j}'v_y' + \vec{k}'v_z' = \vec{v}'$$

Këta anëtarë japin shpejtësinë në sistemin lëvizës. Për tre anëtarët e dytë duhet shfrytëzuar formulën (1) dhe formulat e ngjashme.

Fitojmë:

$$\vec{\omega} \times \vec{i}'x' + \vec{\omega} \times \vec{j}'y' + \vec{\omega} \times \vec{k}'z' = \vec{\omega} \times (\vec{i}'x' + \vec{j}'y' + \vec{k}'z') = \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Kur t'i shkruajmë të gjithë anëtarët fitojmë për shpejtësi:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \qquad (3)$$

Shohim se shpejtësia në sistem O është e barabartë me shumën e shpejtësisë në sistem rrotullues dhe shpejtësisë të cilën e fiton pika materiale nga rrotullimi. Këtë shpejtësi e shënojmë në formën:

$$\vec{v}_r = \vec{\omega} \times \vec{r}' \qquad (4)$$

Do të përcaktojmë edhe nxitimin e pikës materiale:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' = \vec{i}' \frac{d^2x'}{dt^2} + \vec{j}' \frac{d^2y'}{dt^2} + \vec{k}' \frac{d^2z'}{dt^2} + 2\left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\frac{dx'}{dt} + \right.$$

$$\left. + \frac{d\vec{j}'}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{d\vec{k}'}{dt}\frac{dz'}{dt}\right) + \frac{d^2\vec{i}'}{dt^2}x' + \frac{d^2\vec{j}'}{dt^2}y' + \frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}z'$$

Tre anëtarët e parë të kësaj formule janë:

$$\vec{i}'a_x' + \vec{j}'a_y' + \vec{k}'a_z' = \vec{a}'$$

nxitimi në sistemin rrotullues. Tre anëtarët e dytë japin:

$$\vec{\omega} \times \vec{i}'v_x' + \vec{\omega} \times \vec{j}'v_y' + \vec{\omega} \times \vec{k}'v_z' = \vec{\omega} \times (\vec{i}'v_x' + \vec{j}'v_y' + \vec{k}'v_z') = \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Në tre anëtarët e tretë paraqiten derivatet e dyta të vektorëve unitar. Shfrytëzojmë formulën (2) dhe të ngjashme. Fitojmë:

$$\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{i}'x' + \vec{j}'y' + \vec{k}'z')] = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

I zëvendësojmë të tre anëtarët në formulën për nxitim:

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

prej nga për nxitim në sistem rrotullues fitojmë:

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \qquad (5)$$

E shumëzojmë (5) me masën e pikës materiale që të fitojmë forcën:

$$\vec{f'} = \vec{f} - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v'}) - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{6}$$

Formula e fituar tregon se në sistem rrotullues paraqiten dy forca të reja. Këto janë: forca e Koriolisit

$$\vec{f_c} = - 2m(\vec{\omega} \times v') \tag{7}$$

dhe forca centrifugale

$$\vec{f_{cf}} = - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{8}$$

Forca (8) quhet centrifugale sepse vepron në kah radial prej boshtit të rrotullimit. Në fig. 28 janë paraqitur vektorët $\vec{\omega}$ dhe $\vec{r}$. Shohim se prodhimi i tyre vektorial e ka kahun e tangjentes në rreth të cilin e përshkruan pika materiale gjatë rrotullimit të sistemit. Këtë prodhim vektorial duhet shumëzuar edhe një herë në mënyrë vektoriale me $\vec{\omega}$. Nga figura shohim se ky vektor ka kah radial. Pasi në formulë për forcë centrifugale gjendet parashenja minus, kjo forcë e ka kahun prej boshtit gjë që kështu arsyetohet emri i saj. Do të përcaktojmë edhe intensitetin e kësaj force. Intensiteti i prodhimit vektorial është:

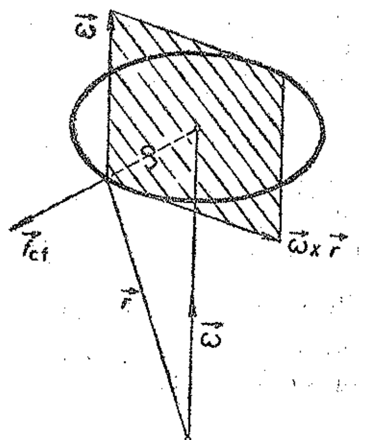


Fig. 28

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega\rho$$

ku me ρ kemi shënuar largësinë e pikës materiale nga boshti i rrotullimit. Pasi $\vec{f_{cf}}$ është normale në këtë vektor këte intensitet duhet shumëzuar me ωm. Pra,

$$|\vec{f_{cf}}| = m\omega^2\rho$$

por pasi është

$$\omega = \frac{v}{\rho}$$

gjejmë përfundimisht:

$$|\vec{f_{cf}}| = \frac{mv^2}{\rho} \tag{9}$$

Kjo është formula e njohur për forcën centrifugale.

Nga formula për forcë të Koriolisit kuptojmë se ajo ekziston vetëm kur pika materiale lëviz relativisht ndaj sistemit rrotullues. Në të vërtetë, kur pika materiale nuk lëviz në sistem rrotullues atëherë $\vec{v} = 0$ dhe forca e Koriolisit është e barabartë me zero. Kahu i forcës së Koriolisit është normale në rrafshin të cilin e përcakton boshti i rrotullimit dhe shpejtësisa relative. Intensiteti i kësaj force është:

$$|\vec{f_c}| = 2m\omega v' \sin (\widehat{\omega v'}) \qquad (10)$$

Forcën e Koriolisit e diktojmë kur e lëshojmë të lëvizë sfera e vogël në kah radial të pllakës rrethore e cila rrotullohet rreth boshtit të vet. Atëherë mund të vërejmë se sfera e lëshon kahun radial të lëvizjes dhe mënjanohet djathtas kur shikohet në kah të lëvizjes së saj. Ky mënjanim është rezultat i veprimit të forcës së Koriolisit.

3. TEOREMA E LARMORIT

Nga forca e Koriolisit mund të përfitojmë teoremën e cila luan një rol të rëndësisishëm në fizikën atomike. Të mendojmë se në grumbull të elektroneve i cili lëviz shpejt rreth ndonjë bërthame vepron fusha konstante magnetike. $\vec{H}$. Ekuacioni i lëvizjes së ndonjë elektroni nën veprimin e forcës së brendshfe $\vec{f}$ dhe fushës së jashtme magnetike shprehet në formën:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} + e\,(\vec{v} \times \vec{H}) \qquad (1)$$

E krahasojmë këtë formulë me ekuacionin e lëvizjes në sistem koordinat i cili rrotullohet me shpejtësi konstante $\vec{\omega}$, pra me formulën (V.2.6):

$$m \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{f} - 2m\,(\vec{\omega} \times \vec{v}') - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \qquad (2)$$

Nëse shpejtësia e elektroneve $\vec{v}$ është e madhe ndaj shpejtësisë $r\omega$ mund të mos e përfillim forcën centrifugale dhe për ekuacion të lëvizjes fitojmë përafërsisht, $v' = v$ në anëtarin e dytë

$$m \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{f} - 2m\,(\vec{\omega} \times \vec{v}) \qquad (3)$$

Këtë ekuacion mund ta lidhim me ekuacionin e lëvizjes së grumbullit të elektroneve në fushë konstante magnetike. Shohim se është e mundur të zgjedhim aso sistemi rrotullues në të cilin forca e Koriolisit anulohet me forcën e Lorencit:

$$m \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{f} + 2m\,(\vec{v} \times \vec{\omega}) + e\,(\vec{v} \times \vec{H}) = \vec{f}$$

prej nga rrjedh se shpejtësia këndore duhet të jetë e barabartë me:

$$\vec{\omega}_L = -\frac{e}{2m} H \qquad (4)$$

Nëse pas vendosjes së fushës magnetike shikojmë grumbullin e elektroneve nga sistemi rrotullues nuk vërejmë kurrfarë ndryshimi në lëvizjen e elektroneve. Kjo do të thotë se vetë sistemi i elektroneve ka fituar rrotullim të njëtrajtshëm rreth fushës magnetike me shpejtësi këndore e cila i përgjigjet teoremës së fituar. Nga përfitimi i formulës (4) kuptojmë se teorema e Larmorit vlen vetëm për fusha magnetike jo shumë të fuqishme, sepse në të kundërtën forca centrifugale nuk mund të mos përfillet.

4. NDIKIMI I RROTULLIMIT TË TOKËS

a) Ndikimi i forcës centrifugale në nxitimin e rënies

Në sipërfaqen e Tokës e cila rrotullohet paraqitet forca centrifugale e cila së bashku me rëndimin e trupit e jep një forcë rezultuese. Do të përcaktojmë se si forca centrifugale ndikon në rëndimin e trupave. Për këtë arsye mjafton që t'i shqyrtojmë vetëm nxitimet. Nxitimi i rëndimit tokësor $\vec{g}$ e ka kahun kah qendra e Tokës, sepse është rezultat i forcës tërheqëse të masës së Tokës e kjo forcë zotëron thuajse masa e Tokës është e koncentruar në qendrën e saj. Meqë Toka rrotullohet, në sipërfaqe të saj vepron edhe forca centrifugale në kah prej boshtit të rrotullimit. Në fig. 29 janë vizatuar nxitimet e këtyre dy forcave. Rezultanten e tyre do ta shënojmë me $\vec{g}'$. Kjo rezultante paraqet nxitimin në sistemin rrotullues, madhësi kjo të cilën dëshirojmë ta përcaktojmë. Nga figura shohim se vlen:

$$\vec{g}' = \vec{g} + \vec{a}_{cf} = \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \qquad (1)$$

Së pari do të gjejmë intensitetin e këtij nxitimi, prandaj formulën (1) e ngrisim në katror:

$$g'^2 = g^2 - 2\vec{g}\,[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] + [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times r)]^2$$

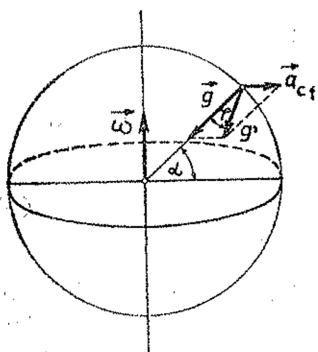


Fig. 29

Duke njohur periodën e rrotullimit të Tokës $T = 1$ ditë ose 86164 s, mund të njehsojmë shpejtësinë këndore të rrotullimit të saj. Do të kemi:

$$\omega = \frac{2\pi}{96164} = 7{,}29 \cdot 10^{-5}\, s^{-1}.$$

Shohim se vlera e saj është mjaft e vogël dhe për $g = 9{,}82\ \frac{m}{s^2}$, $r = 6{,}37 \cdot 10^6\ m$ anëtarin e tretë mund të mos e përfillim. Atëherë, ngel

$$g'^2 = g^2 - 2\vec{g}\,[\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}\,\omega^2]$$

E dijmë se $\vec{g}$ e ka kahun kah qendra e Tokës, prandaj mund të shkruajmë:

$$\vec{g} = -\,g\,\vec{r}_o = -\,g\,\frac{\vec{r}}{r} \tag{2}$$

dhe fitojmë:

$$g'^2 = g^2 + \frac{2g}{r}\,[(\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2 - r^2\omega^2]$$

Nga figura 29 shohim se këndi në mes të vektorëve $\vec{\omega}$ dhe $\vec{r}$ është $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ku α është gjerësia gjeografike e vendit në të cilin e masin nxitim g'. Fitojmë:

$$(\vec{\omega}\,\vec{r})^2 = \omega^2 r^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \omega^2 r^2 \sin^2\alpha$$

Vlerën e fundit e zëvendësojmë në shprehjen (2):

$$g'^2 = g^2 - 2g\, r\omega^2 \cos^2\alpha \tag{3}$$

Pra, nxitimi i forcës së rëndimit është i zvogëluar për anëtarin $r\omega^2 \cos^2\alpha$. Shohim se ky nxitim varet prej gjerësisë gjeografike. Faktori $r\omega^2$ e ka vlerën 0,034. Me ndihmën e tij mund të njehsojmë nxitimin e rëndimit në çfarëdo gjërësie gjeografike. Vlera më e madhe e tij gjendet në pole $g' = g = 9{,}82\ m/s^2$, kurse ajo më e vogël në ekuator $g' = g - r\omega^2 = 9{,}83 - 0{,}034 = 9{,}786\ m/s^2$.

Përveç kësaj, nga forca centrifugale edhe kahu i rëndimit është e zhvendosur për një kënd të vogël φ nga qendra e Tokës. Kjo zhvendosje njehsohet kësisoji:

$$\varphi \approx \text{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{|\vec{g}' \times \vec{g}|}{\vec{g}'\,\vec{g}}$$

Supozojmë se në emërues përafërsisht $\vec{g}' \approx \vec{g}$ dhe për të fitojmë g^2. Do të njehsojmë edhe numëruesin:

$$|\vec{g}' \times \vec{g}| = |[\vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \times \vec{g}| = - \left|[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \left(-\frac{g}{r}\vec{r}\right)\right| =$$

$$= \frac{g}{r}\ |[\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}\,\omega^2] \times \vec{r}| = \frac{g}{r}\ (\vec{\omega}\,\vec{r})\,|(\vec{\omega} \times \vec{r})|$$

Meqë vlen:

$$\vec{\omega}\,\vec{r} = \omega r \sin\alpha \quad \text{dhe} \quad |\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \cos \cos\alpha$$

rrjedh:

$$\varphi = \frac{g\omega^2 r^2}{r g^2} \sin\alpha \cos\alpha$$

ose:

$$\varphi = \frac{\omega^2 r}{2g} \sin 2\alpha \qquad (4)$$

Vlera e koeficientit të shprehjes së fundit është:

$$\frac{\omega^2 r}{2g} = 0{,}0017$$

Formula (4) tregon se vlera e kahut së zhvendosjes së rëndimit prej qendrës së Tokës varet prej gjerësisë gjeografike. Kjo vlerë në pole është e barabartë me zero, sikurse edhe në ekuator, por ka vlerë maksimale në gjërësitë gjeografike $\alpha = 45°$. Në këto gjerësi kjo vlerë është: $\varphi = 0{,}0017$.

b) Ndikimi i forcës së Koriolisit në rënie

Nxitimi në sipërfaqen e Tokës e cila rrotullohet, përcaktohet me formulën (V.2.5.):

$$\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{g}' + 2\frac{d\vec{r}'}{dt} \times \vec{\omega} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \qquad (5)$$

Nxitimin centrifugal sipas formulës (1) do ta zëvendësojmë në (5). Do të kemi:

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} = g' + 2\frac{dr'}{dt} \times \vec{\omega} \text{ sepse } \vec{g}' = \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Këtë mund ta integrojmë menjëherë:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{g}'\,t + 2\,\vec{r}' \times \vec{\omega}$$

Këtu duhet shënuar edhe konstanten e integrimit e cila ka kuptim të shpejtësisë fillestare, por te rënia ajo është e barabartë me zero. Vlerën e shpejtësisë e zëvendësojmë në shprehjen e parafundit:

$$\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{g}' + 2\,(\vec{g}'\,t + 2\,\vec{r}' \times \vec{\omega}) \times \vec{\omega} = \vec{g}' + 2\,(\vec{g}' \times \vec{\omega})t$$

këtu nuk e kemi marrë në konsiderim anëtarin në të cilin paraqitet ω^2. E integrojmë edhe dy herë:

$$\frac{d\,\vec{r}'}{dt} = \vec{g}'t + (\vec{g}' \times \vec{\omega})t^2 \qquad (6)$$

$$\vec{r}' = \frac{1}{2}\,\vec{g}'\,t^2 + \frac{1}{3}\,(\vec{g}' \times \vec{\omega})t^3 + \vec{r}_o{}' \qquad (7)$$

Për shpejtësi të rënies dhe për rrugën e kaluar kemi fituar formula të cilat përveç anëtarëve te rënia në sistem të palëvizshëm përmbajnë edhe anëtarë në të cilët paraqitet shpejtësia këndore e rrotullimit të Tokës. Nga mënyra e përfitimit të tyre shohim se rrjedhin nga forca e Koriolisit. Prandaj mund të përfundojmë se te rënia në Tokë e cila rrotullohet vepron edhe forca e Koriolisit.

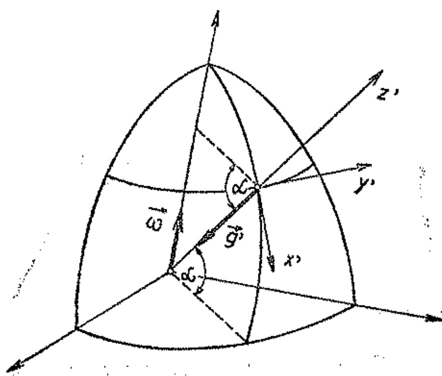


Fig. 30

Do ta vendosim sistemin e koordinatave në sipërfaqe të Tokës kështu që boshti z' le të ketë kah vertikal përpjetë sikurse tregon fig. 30. Boshtin x' do ta vendosim në kah të meridianit të orientuar kah ekuatori, kurse boshti y' duhet të jetë në kah të paraleles në sipërfaqe të saj në drejtim të lindjes. Duke zgjedhur sistemin koordinat në mënyrë të këtillë do të kemi:

$$\vec{g}' = -\vec{k}'\,g'$$

Nga figura shohim se prodhimi vektorial $\vec{g}' \times \vec{\omega}$ e ka kahun e boshtit y'. Intensiteti i këtij prodhimi është:

$$g'\omega \sin \frac{\pi}{2} + \alpha = g'\omega \cos\alpha$$

prandaj shkruajmë:

$$\vec{g}' \times \vec{\omega} = \vec{j}' \, g' \, \omega \cos\alpha$$

Supozojmë se pika materiale në fillim të rënies është e ngritur për h mbi sipërfaqe të Tokës, prandaj vlen

$$\vec{r}_o{}' = \vec{k}' \, h$$

I zëvendësojmë këto vlera në (7):

$$\vec{r}' = \vec{k}' \left(h - \frac{1}{2} g' \, t^2 \right) + \vec{j}' \, \frac{1}{3} \, g'\omega \cos\alpha \cdot t^3$$

Shprehja e fundit tregon se pika materiale jo vetëm që bie sipas vertikales, në kah të vektorit $\vec{k}'$, por e ka edhe një zhvendosje në kah të $\vec{j}'$, pra zhvendosje kah lindja. Edhe kjo zhvendosje është rezultat i veprimit të forcës së Koriolisit. Zhvendosja kah lindja e ka vlerën:

$$y' = \frac{1}{3} \, g'\omega \cos\alpha \cdot t^3 \qquad (8)$$

Vlera e (8) është shumë e vogël, prandaj mund të vërehet te rëniet nga lartësitë e mëdha. Eksperimentet janë kryer në xeherore dhe te rënia në thellësi prej 500 m vlera e saj është disa cm. Matjet eksperimentale përputhen me formulën (8).

5. LAVJERRËSI I FUKOS

Forca e Koriolisit vepron edhe në lavjerrës i cili lëkundet në sipërfaqe të Tokës. Lavjerrësi në sistem i cili rrotullohet do të mënjanohet nga rrafshi fillestar i lëkundjes. Fuko më 1851 bëri eksperimentin e tij të famshëm dhe tregoi se gjendemi në sistem i cili rrotullohet. Ky eksperiment shërben si një prej argumenteve se Toka rrotullohet rreth boshtit të vet. Ne do të njehsojmë veprimin e forcës së Koriolisit në lavjerrës.

Supozojmë se lavjerrësi matematik lëkundet me amplituda të vogla, kështu që mund të marrim se kryen oshilime harmonike. Do të vendosim sistemin e koordinatave në sipërfaqe të Tokës sikurse në problemin e mëparshëm të paraqitur në fig. 30. Peshën e lavjerrësit e zbërthejmë në dy komponente. Në kahun e boshtit x' e kemi komponenten $mg \sin\gamma$, kurse në kahun e boshtit y' komponenten $mg \sin\beta$. Nga lë-

kundjet e vogla të lavjerrësit përafërsisht mund të shkruajmë $\sin\gamma = \frac{x'}{l}$ dhe $\sin\beta = \frac{y'}{l}$ ku l është gjatësia e lavjerrësit. Sipas kësaj pesha i jep lavjerrësit nxitim të cilin mund ta zbërthejmë në komponente:

$$a_x' = -\frac{g}{l}x' \qquad a_y' = -\frac{g}{l}y' \tag{1}$$

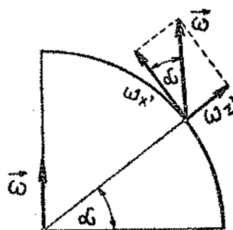


Fig. 31

Përveç peshës në lavjerrës vepron edhe forca e Koriolisit. Nxitimin e kësaj force e përcaktojmë sipas formulës $2\vec{v}' \times \vec{\omega}$. Vektori i shpejtësisë le të ketë komponentet $\dot{x}'$, $\dot{y}'$, 0. Komponenten e tretë e kemi marrë të barabartë me zero, sepse kemi supozuar se lavjerrësi lëkundet me amplituda të vogla, kështu që mund të mendojmë se lëvizja kryhet në rrafshin $x'\,y'$. Tani duhet që shpejtësinë këndore të rrotullimit të Tokës ta zbërthejmë në komponente. Sipas fig. 31 shohim se komponentet e saj janë:

$-\omega\cos\alpha$, 0, $\omega\sin\alpha$. Prandaj vlen

$$2\vec{v}' \times \vec{\omega} = 2\begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ \dot{x}' & \dot{y}' & 0 \\ -\omega\cos\alpha & 0 & \omega\sin\alpha \end{vmatrix}$$

prej nga:

$$2\vec{v}' \times \vec{\omega} = \vec{i}'\,2\dot{y}'\,\omega\sin\alpha - \vec{j}'\,\dot{x}'\,\omega\sin\alpha + \vec{k}'\,\dot{y}'\,\omega\cos\alpha \tag{2}$$

Nga (2) dhe (1) mund të ndërtojmë komponentet horizontale të nxitimit të lavjerrësit:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}' &= -\frac{g}{l}x' + 2\dot{y}'\,\omega\sin\alpha \\ \ddot{y}' &= -\frac{g}{l}y' - 2\dot{x}'\,\omega\sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Do të shënojmë shkurtimisht me

$$u = \omega\sin\alpha \tag{4}$$

dhe fitojmë:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}' - 2u\dot{y}' + \frac{g}{l}\,x' = 0 \\ \ddot{y}' + 2u\dot{x}' + \frac{g}{l}\,y' = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Ekuacionin e dytë të sistemit (5) e shumëzojmë me njësi imagjinare dhe i mbledhim. Shënojmë shkurtimisht me:

$$q = x' + iy' \qquad (6)$$

dhe fitojmë ekuacionin diferencial:

$$\ddot{q} + i\,2u\dot{q} + \frac{g}{l}\,q = 0 \qquad (7)$$

Ky është ekuacion diferencial me koeficient konstante dhe zgjidhjen e tij do ta kërkojmë në formën:

$$q = e^{i\alpha t} \qquad (8)$$

Pasi të zëvendësojmë (8) në (7) dhe të thjeshtësojmë me eksponencial fitojmë ekuacionin karakteristik:

$$\alpha^2 + 2u\,\alpha - \frac{g}{l} = 0$$

i cili i ka dy zgjidhje:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 = -u + \sqrt{u^2 + \frac{g}{l}} \\ \alpha_2 = -u - \sqrt{u^2 + \frac{g}{l}} \end{aligned}\right. \qquad (9)$$

Zgjidhja e përgjithshme e ekuacionit diferencial është:

$$q = A_1\,e^{i\alpha_1 t} + A_2\,e^{i\alpha_2 t} \qquad (10)$$

Për përcaktimin e konstanteve të integrimit paraqesim konditat fillestare të lëvizjes:

$$\text{për } t = 0 \;\; x' = a,\; y' = 0,\; \dot{x}' = \dot{y}' = 0$$

Këto kondita tregojnë se në fillim lavjerrësin e kemi zhvendosur nga pozita ekuilibruese për gjatësinë a kah jugu dhe e kemi lëshuar të lëkundet pa shpejtësi fillestare. Këto kondita duhet t'i zbatojmë për ndryshoren e re q. Fitojmë:

$$q = a,\ \dot{q} = 0 \text{ për } t = 0$$

Zëvendësojmë në zgjidhjen (10) dhe fitojmë:

$$a = A_1 + A_2 \quad \text{dhe} \quad 0 = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$$

Zgjidhja e këtij sistemi është:

$$A_1 = \frac{\alpha_2 a}{\alpha_2 - \alpha_1} \qquad A_2 = -\frac{\alpha_1 a}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

Për diskutim të rezultateve është e preferuar që të njehsojmë $\dot{q}$:

$$\dot{q} = i\alpha_1 A_1\, e^{i\alpha_1 t} + i\alpha_2 A_2\, e^{i\alpha_2 t}$$

Zëvendësojmë në këtë shprehje vlerat për konstante A_1 dhe A_2.

$$\dot{q} = i\,\frac{\alpha_1\alpha_2 a}{\alpha_2 - \alpha_1}\, e^{-iut}\,(e^{i\sqrt{u^2 + g/l}\,t} - e^{-i\sqrt{u^2 + g/l}\,t})$$

Meqë është:

$$\alpha_1\alpha_2 = -\frac{g}{l} \text{ dhe } \alpha_2 - \alpha_1 = -2\sqrt{u^2 + g/l}$$

fitojmë:

$$\dot{q} = -a\,\frac{g/l}{\sqrt{u^2 + g/l}}\, e^{-iut} \sin(t\sqrt{u^2 + g/l}) \tag{11}$$

Kur lavjerrësi gjendet në pozitën e zhvendosjes maksimale shpejtësia e tij është e barabartë me zero. Pra $\dot{x}' = 0$ dhe $\dot{y}' = 0$ prej nga $\dot{q} = 0$. Do ta shënojmë me τ kohën kur lavjerrësi gjendet në pikën e zhvendosjes maksimale. Atëherë nga (11) shohim se $\dot{q} = 0$ kur është:

$$\tau\sqrt{u^2 + g/l} = n\pi \text{ për } n = 1, 2, 3, \ldots$$

prej nga rrjedh:

$$\tau = \frac{n\pi}{\sqrt{u^2 + g/l}}$$

Për një lëkundje të plotë duhet zëvendësuar $n = 2$ dhe do të kemi:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{u^2 + g/l}} \tag{12}$$

Mund të përcaktojmë vlerën e q në këtë kohë

$$q(T) = A_1 e^{-iuT+2\pi i} + A_2 e^{-iuT-2\pi i} =$$
$$= (A_1 + A_2) e^{-iuT} = a e^{-iuT}$$

Kemi fituar q kompleks me pjesët x' dhe dhe y'. Kjo do të thotë se q shpreh pozitën e lavjerrësit në rrafshin kompleks në kohën T. Shohim se ky numër kompleks e ka vlerën absolute a e cila paraqet zhvendosjen fillestare. Por përveç kësaj shohim se ekziston edhe zhvendosja për këndin

$$\varphi = uT = 2\pi u / \sqrt{u^2 + g/l} \qquad (13)$$

Mëqe shpejtësia këndore e rrotullimit të Tokës është e vogël u^2 mund të mos përfillet. Fitojmë:

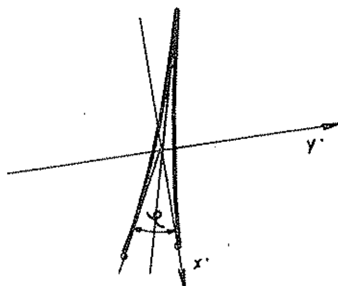


Fig. 32

$$\varphi = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}\ \omega \sin\alpha \qquad (14)$$

Ky është këndi për të cilin rrotullohet rrafshi i lavjerrësit për kohën e një periode të oshilimit. Sikurse shihet nga formula (14) ky rrotullim varet jo vetëm prej shpejtësisë këndore të rrotullimit të Tokës rreth boshtit, por edhe prej gjerësisë gjeografike të vendit ku kryhet eksperimenti. Ky kënd është më i madh në pole, kurse në ekuator fare nuk ekziston. Në fig. 32 është paraqitur rruga e lavjerrësit gjatë kohës së një periode. Nga pozitat ekstremale të zhvendosjes pika materiale kalon nëpër rrugë të lakuar siç tregon edhe figura.

VI. MEKANIKA E SISTEMIT TË PIKAVE MATERIALE

1. LËVIZJA E QENDRËS SË MASËS

Le të jetë dhënë sistemi i pikave materiale me masa $m_1, m_2 \ldots m_n$. Pozitat e këtyre pikave materiale i përcaktojnë vektorët e pozitave $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots \vec{r}_n$. Për këtë sistem të pikave mund të definojmë një pikë të veçantë të hapësirës C me vektorin e pozitës $\vec{r}_c$ të përcaktuar me formulën:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{1}$$

Këtë pikë do ta quajmë qendër të masës së sistemit. Sipas formulës së definicionit (1) shohim se qendra e masës së pikave materiale varet vetëm prej shpërndarjes së masave të sistemit.

Do ta shënojmë me M masën e tërësishme të sistemit. Pra,

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i \tag{2}$$

atëherë formulën (1) mund ta shkruajmë në formën:

$$M \vec{r}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \tag{3}$$

E derivojmë këte shprehje dy herë sipas kohës:

$$M \ddot{\vec{r}}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{r}}_i \tag{4}$$

Në anën e djathtë gjendet prodhimi i masës dhe i nxitimit të pikave materiale. E dijmë se këto paraqesin forca, prandaj,

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i$$

dhe nga (4) kemi

$$M\ddot{\vec{r}}_c = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_c \qquad (5)$$

Kjo shprehje paraqet ekuacionin e lëvizjes së qendrës së masës. Kuptojmë se qendra e masës së sistemit të shqyrtuar lëviz asisoji thuajse në të është e koncentruar tërë masa e sistemit të shqyrtuar dhe thuajse në atë pikë veprojnë të gjitha forcat. Kësisoji kemi vërtetuar këtë teoremë:

Sistemi i pikave materiale lëviz asisoji thuajse në qendër të masave është e koncentruar tërë masa e sistemit dhe thuajse në atë pikë vepron rezultantja e të gjitha forcave që veprojnë në sistem.

Në sistem të pikave materiale mund të veprojnë dy lloje forcash. Forcat e jashtme me të cilat veprojnë trupat e jashtëm të cilët nuk i përkasin sistemit dhe forcat e brendshme të cilat veprojnë në mes të anëtarëve të sistemit. Kështu mund të shkruajmë për forcën e cila vepron në pikën materiale i këtë formulë:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{ij} + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ik} \qquad (6)$$

Këtu me $\vec{F}_{ij}$ e kemi shënuar forcën e jashtme, kurse me $\vec{F}_{ik}$ forcën me të cilën pika materiale k vepron në pikën e shqyrtuar. Forcat e brendshme i nënshtrohen ligjit të aksionit dhe reaksionit, prandaj vlen:

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$$

dhe për shumën e të gjitha forcave të brendshme fitojmë:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ik} = 0 \qquad (7)$$

Prandaj rezultanten e të gjitha forcave në (5) e përbëjnë forcat e jashtme.

Nëse në sistem nuk veprojnë forcat e jashtme, por vetëm ato të brendshme rezultantja e të cilave është e barabartë me zero, atëherë formula (5) kalon në

$$M\ddot{\vec{r}}_c = 0$$

dhe me integrim fitojmë:

$$M\dot{\vec{r}}_c = \vec{K} \qquad (8)$$

Në anën e majtë të kësaj shprehje gjendet sasia e lëvizjes së qendrës së masës së sistemit. Shohim se në ketë rast ajo mbetet konstante. Nga (8) rrjedh se

$$\dot{\vec{r}}_c = \vec{v}_c = const.$$

Pra, në këtë rast qendra e masës lëviz me shpejtësi konstante. Kjo na tregon se tërë sistemin mund ta zëvendësojmë me një pikë materiale të qendrës së masës së vet.

Kur kemi të bëjmë me veprimin e forcës së rëndimit në sistem të pikave materiale atëherë qendra e masës quhet qendër e rëndimit të sistemit dhe shpesh në vend të emrit qendër e masës përdoret emri qëndër e rëndimit pa marrë parasysh karakterin e forcës së jashtme.

2. LIGJI I SASISË SË LËVIZJES

Çdo pikë materiale e sistemit të shqyrtuar e ka sasinë e vet të lëvizjes:

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i \tag{1}$$

Sasia totale e lëvizjes së sistemit është:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \tag{2}$$

E derivojmë këtë shprehje sipas kohës:

$$\dot{\vec{p}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Kështu kemi treguar se shuma e të gjitha forcave në sistem është e barabartë me shumën e forcave të jashtme. Pra,

$$\dot{\vec{p}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ij}$$

Në anën e djathtë gjendet rezultantja e të gjitha forcave të jashtme për të cilat e dijmë se veprojnë në qendër të masave. Pra,

$$\vec{p} = \vec{F}_c \tag{3}$$

Shohim se derivati kohor i sasisë totale të lëvizjes së sistemit është i barabartë me forcën e cila vepron në qendër të masës.

Sipas formulës së lëvizjes së qendrës së masës është:

$$\vec{F}_c = M \ddot{\vec{r}}_c = M \dot{\vec{v}}_c$$

prej nga

$$\dot{\vec{p}} = M \dot{\vec{v}}_c$$

dhe me integrim fitojmë:

$$\vec{p} = M \vec{v}_c + \vec{K} \tag{4}$$

Shohim se sasia totale e lëvizjes ndryshon nga sasia e lëvizjes së qendrës së masës për një vektor konstant.

Nëse në sistem nuk veprojnë forcat e jashtme, $\dot{\vec{v}}_c = const$ dhe fitojmë:

$$\vec{p} = const \tag{5}$$

Pra kur sistemi nuk është nën veprimin e forcave të jashtme, atëherë sasia totale e lëvizjes mbetet konstante. Ky është ligji për ruajtjen e sasisë së lëvizjes.

3. LIGJI I MOMENTIT TË SASISË SË LËVIZJES

Momenti i sasisë së lëvizjes së ndonjë pike materiale, ndaj pikës së dhënë fillestare 0 definohet me prodhimin vektorial:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i \tag{1}$$

Tërë sistemi i pikave materiale do të ketë momentin e sasisë së lëvizjes ndaj kësaj pike:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} r_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i \tag{2}$$

Do të përcaktojmë derivatin kohor të këtij momenti:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{r}}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

Në anëtarin e parë kemi prodhimin vektorial të vektorëve paralelë për të cilin e dijmë se është i barabartë me zero, prandaj ngel vetëm anëtari i dytë:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^{n} r_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \tag{3}$$

Në anën e djathtë qëndron shuma e momenteve të të gjitha forcave:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i \tag{4}$$

Mund të tregojmë edhe këtu se në shumën e fundit duhet të merret vetëm shuma e momenteve të forcave të jashtme. Në të vërtetë, nga ligji i aksionit dhe reaksionit, për momente të forcave të brendshme të cilat veprojnë në mes të dy pikave materiale do të kemi:

$$\vec{M}_{ik} + \vec{M}_{ki} = \vec{r}_{ik} \times \vec{F}_{ik} + \vec{r}_{ki} \times \vec{F}_{ki} = (\vec{r}_i - \vec{r}_k) \times \vec{F}_{ik}$$

Ky prodhim vektorial është i barabartë me zero, sepse vektori $\vec{r}_i - \vec{r}_k$ te forcat tërheqëse apo dëbuese është paralel me forcat. Prandaj ngel vetëm shuma e momenteve të forcave të jashtme:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{ij} \tag{5}$$

Nëse sistemi i pikave materiale është i mbyllur, që do të thotë se në të veprojnë vetëm forcat e brendshme, atëherë vlen

$$\dot{\vec{L}} = 0$$

ose

$$\vec{L} = const. \tag{6}$$

Shohim se në sistem të mbyllur momenti total i sasisë së lëvizjes njëkohësisht është konstant. Ky është ligji për ruajtjen e momentit të sasisë së lëvizjes.

Pikën O ndaj së cilës e përcaktojmë momentin e sasisë së lëvizjes mund ta zgjedhim në mënyrë arbitrare. Mund ta zgjedhim edhe në qendër të masës së sistemit. Atëherë formula (5) do të ketë formën:

$$\dot{\vec{L}}_c = \vec{M}_c \tag{7}$$

Ku $\vec{M}_c$ është rezultantja e të gjitha momenteve të forcave të jashtme në qendër të masës.

Momentet ndaj ndonjë pike arbitrare gjithmonë mund t'i shprehim me ndihmën e momenteve ndaj qendrës së masës. Nga fig. 33 shohim se është:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic} \tag{8}$$

Për moment të sasisë së lëvizjes kemi:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{r}_c + \vec{r}_{ic}) \times (\dot{\vec{r}}_c + \dot{\vec{r}}_{ic}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{r}_c \times \dot{\vec{r}}_c) + \sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{r}_c \times \dot{\vec{r}}_{ic}) + \sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{r}_{ic} \times \dot{\vec{r}}_c) + \sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{r}_{ic} \times \dot{\vec{r}}_{ic})$$

Anëtari i dytë i tretë janë të barabartë me zero. Që të bindemi për këtë fillojmë nga formula (VI.1.1.):

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i r_i}{M}$$

prej së cilës rrjedh:

$$\sum_i m_i \vec{r}_{ic} = M \vec{r}_{cc} = 0$$

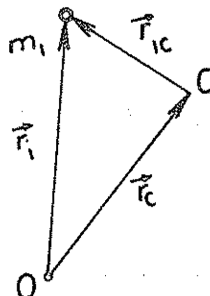


Fig. 33

Meqë vektori i pozitës së qendrës së masës ndaj qendrës së masës si pikë fillestare e ka intensitetin e barabartë me zero, anëtari i tretë nuk ekziston. Nëse formulën e fituar e derivojmë sipas kohës fitojmë:

$$\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_{ic} = 0$$

prej nga përfundojmë se edhe anëtari i dytë është i barabartë me zero. Prandaj ka ngelur:

$$\vec{L} = \vec{r}_c \times M \dot{\vec{r}}_c + \sum_i \vec{r}_{ic} \times m_i \dot{\vec{r}}_{ic}$$

Këtë mund ta shkruajmë:

$$\vec{L} = \vec{L}_c + \sum_i \vec{L}_{ic} \tag{9}$$

Anëtari i parë paraqet momentin e sasisë së lëvizjes së qendrës së masës ndaj pikës fillestare 0, kurse anëtari i dytë shumën e të gjitha momenteve të sasisë së lëvizjes ndaj qendrës së masës. Në mënyrë të ngjashme mund të vërtetohet se edhe për moment të forcave vlen formula:

$$\vec{M} = \vec{M}_c + \sum_i \vec{M}_{ic} \tag{10}$$

Kështu shprehen momentet ndaj çfarëdo pike me ndihmën e momenteve ndaj qendrës së masave.

4. LIGJI PËR RUAJTJEN E ENERGJISË

Energjinë kinetike të sistemit të pikave materiale e fitojmë duke i mbledhur energjitë kinetike të pikave të veçuara të atij sistemi. Pra,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 \tag{1}$$

Ndërrimi i kësaj energjie është:

$$dT = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v_i}\, \vec{dv_i} \tag{2}$$

E paraqesim shpejtësinë:

$$\vec{v_i} = \frac{\vec{dr_i}}{dt}$$

dhe (2) do të ketë formën:

$$dT = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\vec{dv_i}}{dt} \vec{dr_i}$$

E dijmë se është:

$$\vec{F_i} = m_i \frac{\vec{dv_i}}{dt}$$

Do të kemi:

$$dT = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}\, \vec{dr_i} \tag{3}$$

Në anën e djathtë të (3) kemi fituar punën e të gjitha forcave në sistem, të cilat ato e kryejnë nëse sistemi zhvendoset për një rrugë elementare. Pra, kjo punë është e barabartë me ndërrimin e energjisë kinetike. Supozojmë se forcat janë konservative. Atëherë ekziston një funksion skalar U i cili quhet potencial i forcave. Ky potencial duhet të varet nga pozita e pikave materiale të sistemit. Pra,

$$U = U(\vec{r_1}, \vec{r_2}, \ldots \vec{r_n})$$

Nga matematika e dijmë se për funksionin i cili varet prej pozitës së n pikave mund të kryhen gradientet parciale sipas koordinatave të çdo pike. Nëse U është potenciali i forcave konservative, atëherë çdonjëra prej tyre është e barabartë me gradientin parcial të potencialit. Pra,

$$\vec{F}_i = - grad_i U \tag{4}$$

Zëvendësojmë në (3)

$$dT = - \sum_{i=1}^{n} grad_i U \, d\vec{r}_i \tag{5}$$

Sipas rregullave të matematikës kjo shumë është e barabartë me

$$\sum_{i=1}^{n} grad_i U \, d\vec{r}_i = dU$$

diferencialin e funksionit U gjatë zhvendosjes së sistemit. Prandaj formulën (5) mund ta shkruajmë kësisoji:

$$dT + dU = 0$$

dhe pasi ta integrojmë fitojmë:

$$T + U = const.$$

Ky është ligji për ruajtjen e energjisë mekanike te veprimi i forcave konservative.

5. LËVIZJET E KUFIZUARA TË SISTEMIT

Lëvizjet e pikës materiale mund të jenë të kufizuara me ndonjë konditë, p.sh. mund të jetë e dhënë ndonjë sipërfaqe apo ndonjë vijë dhe të kërkohet që pika materiale të lëvizë vetëm nëpër atë sipërfaqe, përkatësisht nëpër atë vijë. Natyrisht se një gjë e tillë mund të kërkohet edhe për lëvizjen e sistemit të pikave materiale. Do të tregojmë se si duhet të merren në njehsim këto kondita të kufizimit të lëvizjes.

Le të jetë sipërfaqja nëpër të cilën mund të lëvizë pika materiale e dhënë me ekuacionin:

$$f(\vec{r}) = 0 \tag{1}$$

Për rrugë të pikës materiale vijnë në shprehje vetëm ato pika, për të cilat vektorët e pozitës duhet të kënaqin ekuacionin (1). Për lëvizje të sistemit të pikave materiale, si kondita të kufizimit të lëvizjes shprehen ekuacionet të cilat duhet ti kënaqin vektorët e pozitës të të gjitha pikave materiale të atij sistemi. Nëse ka l këso kondita atëherë i shkruajmë kësisoji:

$$f_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots \vec{r}_n) = 0 \quad k = 1, 2, \dots l \tag{2}$$

Këtu kemi marrë rastin më të thjeshtë kur këto kondita nuk varen nga koha. Në këtë rast konditat quhen skleronome apo stacionare.

Nëse konditat gjatë kohës ndërrojnë ato quhen reoneme. Përveç kësaj kemi marrë se konditat na lidhin vetëm vektorët e pozitave të pikave të sistemit. Këto kondita quhen holonome. Sikur këto kondita të kufizimit të lëvizjes të vareshin edhe nga shpejtësitë e pikave materiale, atëherë do të quheshin joholonome. Ne do të kufizohemi vetëm për rastin e konditave stacionare dhe holonome.

Të mendojmë se në sistemin e shqyrtuar e kemi kryer një zhvendosje të vogël, e cila është në pajtim me konditat e dhëna të kufizimit të lëvizjes. Kjo zhvendosje quhet zhvendosje virtuale dhe si e tillë nuk është e thënë që në përgjithësi t'i përgjigjet zhvendosje që sistemi e kryen në të vërtetë. Kjo është zhvendosje e menduar gjatë së cilës kënaqen konditat e kufizimit të lëvizjes. Që ta dallojmë këte zhvendosje, do ta shënojmë me $\delta\vec{r_i}$ për ndryshim nga zhvendosja e vërtetë të cilën e shënojmë me $d\vec{r_i}$.

Vektorët e pozitave të pikave materiale, pas zhvendosjes virtuale $r_i + \delta\vec{r_i}$, gjithashtu duhet të kënaqin sistemin e ekuacioneve (2) të kufizimit të lëvizjes. Pra,

$$f_k(\vec{r_1} + \delta\vec{r_1}, \dots r_n + \delta\vec{r_n}) = 0 \tag{3}$$

Këtë funksion e zhvillojmë në seri të Tejlorit dhe e ndërpresim zhvillimin pas anëtarit të shkallës së parë të zhvendosjes $\delta\vec{r_1}$. Fitojmë:

$$f_k(\vec{r_1} + \delta\vec{r_1}, \dots \vec{r_n} + \delta\vec{r_n}) = f_k(\vec{r_1}, \dots \vec{r_n}) + \sum_{i=1}^{n} grad_i\, f_k\delta\vec{r_i} = 0$$

Në anëtarin e dytë gjenden gradientet parciale të funksionit f_k sipas koordinatave të pikës materiale „i". Nga formula (2) dhe (3) rrjedh:

$$\sum_{i=1}^{n} grad_i\, f_k\delta\vec{r_i} = 0 \tag{4}$$

Këtë konditë duhet të kënaqin zhvendosjet virtuale për të kënaqur pikat materiale lëvizjet e kufizuara.

Sikur sistemi i shqyrtuar të kryente lëvizje të lira, atëherë ekuacioni i pikës materiale „i" do të shprehej në formën:

$$m_i\vec{a_i} = \vec{F_i}$$

Këtë mund ta shkruajmë kësisoji:

$$m_i\vec{a_i} - \vec{F_i} = 0 \tag{5}$$

Anëtari i dytë shpreh forcën aktive e cila vepron në atë pikë materiale, prandaj edhe anëtari i parë tregon një forcë. E quajmë forcë të inercionit. Formula (5) tregon se forca aktive dhe forca e inercionit janë

në ekuilibrim, sepse shuma e tyre është e barabartë me zero. E dijmë se në ekuilibrim energjia potenciale është ekstremale. Për këtë arsye puna gjatë zhvendosjes virtuale duhet të jetë e barabartë me zero. Pra,

$$\sum_{i=1}^{n} (m_i \vec{a_i} - \vec{F_i})\delta\vec{r_i} = 0 \tag{6}$$

Kjo formulë shpreh parimin e d'Alamber — Lagranzhit dhe paraqet postulat të lëvizjes. Ky është i formuluar në formë të konditës të cilin duhet ta kënaqë shprehja analitike në anën e majtë të këtij ekuacioni e cila ka formë diferenciale. Për këtë arsye ky parim është njëri prej parimeve të përgjithshme në mekanikë. Nga ky parim si postulat të lëvizjes fitojmë forma të ndryshme të ekuacioneve diferenciale të lëvizjes si dhe ligje tjera të përgjithshme të mekanikës.

Parimin (6) e kemi kufizuar duke supozuar se sistemi nuk është i kufizuar në lëvizje. Nëse lëvizja është e kufizuar me l kondita (4), atëherë mundemi të zgjedhim vetëm aso zhvendosje virtuale të cilat i kënaqin konditat (4).

Lagranzhi ka treguar se në këtë rast duhet konditat (4) t'i shumëzojmë me një shumëzues të pacaktuar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ dhe t'i shtojmë formulës (6). Do të fitojmë:

$$\sum_{i=2}^{n} (m_i \vec{a_i} - \vec{F_i} - \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \, grad_i f_k)\delta\vec{r_i} = 0 \tag{7}$$

Në këtë shprehje paraqiten $n - l$ zhvendosje virtuale të pavarura $\delta\vec{r_i}$, sepse këso zhvendosje ka n kurse zgjedhja e tyre është e kufizuar me l ekuacione (4). Përveç kësaj në të gjenden edhe l shumëzues arbitrarë λ_k. Do të përcaktojmë vlerën e këtyre shumëzuesve kështu që l kllapat në shprehjen (7) të jenë të barabarta me zero. Atëherë ngelin edhe $n - l$ kllapa. Meqë ato janë të shumëzuara me $n - l$ zhvendosje arbitrare $\delta\vec{r_i}$ kjo do të jetë e barabartë me zero vetëm nëse edhe kllapat tjera janë të barabarta me zero. Prandaj mund të shkruajmë:

$$m_i \vec{a_i} = \vec{F_i} + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \, grad_i f_k \tag{8}$$

Këto janë ekuacionet e lëvizjes së pikave materiale të sistemit të shqyrtuar. Quhen ekuacione me shumëzues të lidhjeve ose ekuacione të Lagranzhit të llojit të parë. I kemi fituar nga parimi i d'Alamber — Lagranzhit. Ekuacionet përkatëse skalare e kanë formën:

$$m_i \ddot{x}_i = F_{ix} + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

$$m_i \ddot{y}_i = F_{iy} + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_i}$$

$$m_i \ddot{z}_i = F_{iz} + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_i}$$

Këto janë ekuacionet diferenciale të lëvizjes së kufizuar të sitemit të grimcave me lidhje ideale holonome.

Formula (8) tregon se edhe anëtari i dytë, në anën e djathtë, duhet të ketë kuptim të forcës. Prandaj mund të shkruajmë:

$$\lambda_k \, grad_i \, f_k = \vec{R}_{ik} \tag{9}$$

kurse ekuacioni (8) kalon në:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{k=1}^{l} \vec{R}_{ik} \tag{10}$$

Formula (9) tregon se çdo konditë e kufizimit të lëvizjes mund të zëvendësohet me një forcë. Këto forca i quajmë reaksione të konditave të kufizimit të lëvizjes. Nëse f_k paraqet një sipërfaqe, atëherë forca e reaksionit qëndron normal në këte sipërfaqe, sepse sipas (9) është proporcionale me gradientin e f_k. E dijmë se gradienti i funksionit skalar gjithmonë është normal në sipërfaqen e vlerave të barabarta të atij skalari. Pra, forcat e reaksionit qëndrojnë normal në sipërfaqet të cilat e kufizojnë lëvizjen.

Formulën (4) mund ta shkruajmë me ndihmën e forcave të reaksionit kësisoji:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{R}_{ik} \delta \vec{r}_i = 0 \tag{11}$$

që do të thotë se gjatë zhvendosjes virtuale të sistemit forca e reaksionit nuk kryen kurrfarë pune.

Prej këtu është e qartë se parimi i d'Alamber — Lagranzhit (6) vlen në të njëjtën formë edhe për lëvizje të kufizuar, sepse kufizimet shprehen me forca të reaksionit, e këto të fundit nuk kryejnë punë gjatë zhvendosjes virtuale.

Më në fund do ta specializojmë parimin e d'Alamber — Lagranzhit për sistem në qetësi në pozitë ekuilibruese. Për këtë sistem $\vec{a}_i = 0$ dhe nga formula (6) ngel:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = 0 \tag{12}$$

Pra për sistem i cili është në ekuilibrim puna e forcave gjatë zhvendosjes virtuale është e barabartë me zero. Ky është parimi i zhvendosjes virtuale.

VII. FILLET E MEKANIKËS SË PËRGJITHSHME

1. KOORDINATAT E PËRGJITHËSUARA

Kur lëvizja e pikës materiale kufizohet me ndonjë konditë, atëherë së bashku me ekuacionin e lëvizjes paraqiten edhe ato kondita. Shpesh në vend të koordinatave të zakonshme është e preferuar që të merren disa parametra të cilët ndryshojnë në pajtim me konditat e paraqitura. Kësisoji kemi vepruar edhe më parë, por një gjë të tillë nuk e kemi theksuar. Kështu, p.sh. te lavjerrësi matematik nuk kemi njehsuar me koordinatat x dhe y të pikës materiale, me të cilat ka qenë i nevojshëm të merret në konsiderim edhe fakti se lëvizja e pikës është e kufizuar me harkun e rrethit vertikal me rreze l, por kemi njehsuar me këndin φ të zhvendosjes nga pozita ekuilibruese i cili megjithate nuk është koordinatë. Parametrat e cekur të cilët i zëvendësojnë koordinatat i quajmë koordinata të përgjithësuara. Zakonisht shënohen me germën „q" me indeksa të ndryshëm q_1, $q_2 \dots q_i$.

Përparësia e kësaj mënyre, përveç karakterit të përgjithshëm qëndron në faktin se numri i koordinatave të përgjithësuara mund të jetë më i vogël sesa numri i koordinatave kënddrejta apo polare. Kështu, p.sh. nëse shqyrtojmë sistemin e dy pikave materiale të larguara ndërmjet veti për r, atëherë në mes të gjashtë koordinatave kënddrejta të këtyre grimcave ekziston një shprehje, kondita e lidhjes:

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

me të cilën mund të përcaktohet një koordinatë në funksion të pesë tjerave. Në këtë mënyrë, gjendja e këtij sistemi përcaktohet me pesë parametra të pavarur dhe mjaftojnë pesë koordinata të përgjithësuara. Në përgjithësi, nëse sistemi prej „n" grimcash kufizohet me „k" kondita të lidhjes në mes të koordinatave të grimcave, atëherë nga $3n$ koordinatat e sistemit, do të jenë të pavarura

$$f = 3n - k$$

koordinata. Koordinatat tjera k, përcaktohen me konditat e lidhjes. Numri f i parametrave të pavarura i nevojshëm për përcaktimin e plotë të gjendjes së sistemit quhet numër i gradëve të lirisë. Nëse janë të dhënë të gjitha koordinatat e përgjithësuara $q_1 \dots q_i$ si dhe të gjitha shpejtësitë e përgjithësuara $\dot{q}_1 \dots \dot{q}_i$, atëherë gjendja e sistemit është plotësisht e përcaktuar. Në këtë mënyrë në mekanikën klasike gjendja momentale e sistemit përcaktohet me $2f$ parametra të pavarur.

Koordinata të përgjithësuara ka po aq sa është numri i gradëve të lirisë. Të kthehemi edhe një herë te lavjerrësi. Lëvizja e lavjerrësit e ka vetëm një gradë lirije sepse pika materiale mund të lëvizë vetëm nëpër harkun e rrethit. Sikur njehsimin ta kryenim në koordinata të zakonshme, do të duhej të merrnim koordinatat x dhe y, por këto koordinata do të lidheshin me konditën se pika materiale lëviz nëpër rreth. Kësisoji vetëm njëra koordinatë do të ishte e pavarur, sepse tjetra mund të njehsohet nga kondita e cekur. Mirëpo, kur njehsimin e kryejmë me ndihmën e këndit φ si koordinatë të përgjithësuar, kemi vetëm një koordinatë të atillë dhe nuk ka nevojë për kurrfarë kondite tjetër. Nga ky shmbull mund të përfundojmë se çfarë lehtësimi kemi gjatë njehsimit me koordinata të përgjithësuara. Natyrisht se koordinatat e këtilla në përgjithësi nuk kanë dimension gjatësie sikurse koordinatat e zakonshme.

2. PUNA NË KOORDINATA TË PËRGJITHËSUARA

Do të shqyrtojmë së pari punën në koordinata të përgjithësuara. Puna elementare përcaktohet me shprehjen (I.6.1):

$$dA = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \, d\vec{r}_i \tag{1}$$

Meqenëse koordinatat e përgjithësuara të sistemit mund t'i lidhim me vektorët e pozitës me shprehjen:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i \, (q_1, \ldots, q_n)$$

për $d\vec{r}_i$ fitojmë:

$$d\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \, dq_j \tag{2}$$

Nga (1) dhe (2) fitojmë:

$$dA = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \, dq_j = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) dq_j \tag{3}$$

Këtë shprehje mund ta shkruajmë shkurtimisht:

$$dA = \sum_{j=1}^{k} Q_j \, dq_j \tag{4}$$

ku është:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \tag{5}$$

Formula (4) shpreh punën elementare në koordinata të përgjithësuara. Madhësit Q_j quhen forca të përgjithësuara dhe nuk do të thotë që të kenë dimension force, por prodhimi $Q_j dq_j$ duhet të ketë dimension të punës. Këto prodhime paraqesin punë elementare gjatë ndërrimit vetëm të koordinatave të përgjithësuara.

Forcat e përgjithësuara Q_j si funksion të energjisë potenciale të sistemit shprehen me formulën:

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots n)$$

Në rast të përgjithshëm forcat e përgjithësuara mund të varen në mënyrë eksplicite nga koha, kurse në rast të forcave konservative ato nuk varen nga koha, por vetëm nga koordinatat e përgjithësuara të sistemit.

3. EKUACIONET E LAGRANZHIT

Do të përcaktojmë ekuacionet e lëvizjes të cilat vlejnë për sistem të koordinatave të përgjithësuara.

Të shqyrtojmë grimcën e lirë. Në përgjithësi pozitën e saj e përcaktojnë tri koordinata. Këto mund të jenë koordinata kënddrejta x, y dhe z apo çfarëdo tri koordinata tjera q_1, q_2 dhe q_3. Do të supozojmë se janë të njohura shprehjet të cilat i lidhin koordinatat x, y dhe z me koordinatat q_1, q_2 dhe q_3,

$$\left.\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3) \\ y &= y(q_1, q_2, q_3) \\ z &= z(q_1, q_2, q_3) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Ekuacionet e lëvizjes në koordinata kënddrejta e kanë formën:

$$X = m\ddot{x},\ Y = m\ddot{y},\ Z = m\ddot{z}$$

ku me X, Y dhe Z i kemi shënuar komponentet e forcës.

Do të shumëzojmë ekuacionin e parë me $\frac{\partial x}{\partial q_1}$, të dytin me $\frac{\partial y}{\partial q_1}$, kurse të tretin me $\frac{\partial z}{\partial q_1}$ dhe do t'i mbledhim:

$$m\left(\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_2}+\ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)=X\frac{\partial x}{\partial q_1}+Y\frac{\partial y}{\partial q_1}+Z\frac{\partial z}{\partial q_1} \qquad (2)$$

Anën e djathtë të këtij ekuacioni e shënojmë me Q_1:

$$X\frac{\partial x}{\partial q_1}+Y\frac{\partial y}{\partial q_1}+Z\frac{\partial z}{\partial q_1}=Q_1 \qquad (3)$$

Kuptojmë se vlen:

$$\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1}=\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)-\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)$$

dhe në mënyrë të ngjashme për dy anëtarët tjerë. Nga kjo, ekuacioni (2) mund të shkruhet në formën:

$$\frac{d}{dt}\left\{m\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\dot{y}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\dot{z}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\right\}-m\left\{\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)+\right.$$

$$\left.+\dot{y}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)+\dot{z}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\right\}=Q_1 \qquad (4)$$

E derivojmë sipas kohës ekuacionin e parë të sistemit (1) duke e konsideruar x, si funksion të përbërë të kohës. Fitojmë:

$$\dot{x}=\frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2+\frac{\partial x}{\partial q_3}\dot{q}_3 \qquad (5)$$

Prej nga fitojmë:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\partial x}{\partial q_1}$$

dhe në mënyrë të ngjashme për:

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\partial y}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\partial z}{\partial q_1} \qquad (6)$$

Pasi rezultati i derivimit nuk varet nga radha me të cilën kryhen dy derivime sukcesive do të kemi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)=\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)=\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)=\frac{\partial \dot{z}}{\partial q_1} \qquad (7)$$

Duke shfrytëzuar shprehjet (6) dhe (7), shprehjen (4) mund ta shkruajmë në formën:

$$\frac{d}{dt}\left\{m\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1}+\dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1}+\dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_1}\right)\right\}-m\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1}+\dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1}+\dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial q_1}\right)=Q_1 \quad (8)$$

E dijmë se energjia kinetike e grimcës shprehet në formën:

$$T=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)$$

Prej nga:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}=m\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1}+\dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1}+\dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_1}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1}=m\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1}+\dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1}+\dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial q_1}\right)$$

Ekuacioni (8) mund të shkruhet kësisoji:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1 \quad (9)$$

Nëse forca nën veprimin e së cilës kryhet lëvizja e ka potencialin $U(x, y, z)$, atëherë vlen:

$$X=-\frac{\partial U}{\partial x},\ Y=-\frac{\partial U}{\partial y},\ Z=-\frac{\partial U}{\partial z}$$

dhe shprehja (3) mund të shkruhet në formën:

$$Q_1=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)=-\frac{\partial U}{\partial q_1}$$

kurse, (9)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=-\frac{\partial U}{\partial q_1} \quad (10)$$

Më në fund do të paraqesim një funksion të ri L i cili është i barabartë me ndryshimin e energjisë kinetike dhe potenciale

$$L=T-U \quad (11)$$

Funksioni (11) quhet funksion i Lagranzhit apo potencial kinetik. Pasi energjia potenciale nuk varet prej shpejtësive të përgjithësuara $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ dhe $\dot{q}_3$ do të kemi:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}$$

kurse ekuacioni (10) merr formën e thjeshtësuar:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \qquad (12)$$

Ky është ekuacioni i Lagranzhit. Në mënyrë të ngjashme fitojmë për dy koordinatat tjera të përgjithësuara:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_3} = 0$$

Përparësia e ekuacioneve të Lagranzhit, ndaj ekuacioneve të Njutnit shprehet qartas në rastin kur lëvizja e grimcës është e kufizuar me lidhje. Në këtë rast numri i parametrave të pavarura, të cilët e shprehin gjendjen e sistemit nuk do të jetë $3n$, por do të jetë i barabartë me numrin e gradëve të lirisë së sistemit: $q_1, q_2 \ldots q_f$, $f = 3n - k$. Kaq do të ketë edhe ekuacione të Lagranzhit.

Në rastin kur lëvizja e pikës materiale i ka „n" gradë lirije atëherë për çdo koordinatë të përgjithësuar fitojmë nga një ekuacion. Ai sistem do të ketë formën:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \ldots n$$

4. ZBATIMI I EKUACIONEVE TË LAGRANZHIT

a) Si shembull të zbatimit të ekuacioneve të Lagranzhit së pari do të shqyrtojmë lavjerrësin matematik. Si koordinatë të përgjithësuar do të marrim këndin e zhvendosjes φ nga pozita vertikale. Që të përcaktojmë funksionin e Lagranzhit (VII.3.11) nevojitet njohja e energjisë kinetike dhe potenciale e lavjerrësit. E dijmë se energjia kinetike është:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{s}^2$$

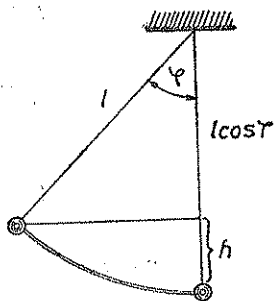


Fig. 34

Pasi $s = l\varphi$

do të kemi $$T = \frac{1}{2} ml^2\dot{\varphi}^2 \qquad (1)$$

Energjia potenciale është e barabartë me punën e kryer kundër forcës së rëndimit. Pra,

$$U = mgh$$

Nga fig. 34 kemi

$$h = l - l\cos\varphi = l\,(1 - \cos\varphi)$$

dhe për potencial fitojmë

$$U = mgl\,(1 - \cos\varphi) \tag{2}$$

Nga (1) dhe (2) mund të ndërtojmë funksionin e Lagranzhit

$$L = T - U = \frac{1}{2}\, ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl\,(1 - \cos\varphi) \tag{3}$$

Me ndihmën e (3) e ndërtojmë ekuacionin e lëvizjes. Së pari kërkojmë:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\, mgl\sin\varphi$$

Zëvendësojmë në ekuacionin e Lagranzhit:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

dhe fitojmë:

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0$$

prej nga rrjedh:

$$\ddot{\varphi} = -\,\frac{g}{l}\,\sin\varphi \tag{4}$$

Ky është ekuacioni diferencial i lëvizjes së lavjerrësit matematik të cilin në (II.5.1) e kemi fituar në mënyrë tjetër. Integrimi i këtij ekuacioni diferencial është treguar më parë po aty.

b) Si shembull të dytë do të marrim lëvizjen e pikës materiale në hapësirë tridimensionale nën veprimin e forcës konservative me potencial U. Në këtë rast pika materiale i ka tri gradë lirije. Do të supozojmë se koordinatat e përgjithësuara përputhen me koordinatat e zakonshme. Në këtë rast i kemi tri ekuacione të Lagranzhit.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

Energjia kinetike e grimcës është:

$$T = \frac{m}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

kurse funksioni i Lagranzhit do të jetë:

$$L = \frac{m}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)$$

Këtu duhet marrë në konsiderim se potenciali U varet vetëm prej koordinatave x, y dhe z, por jo edhe prej shpejtësisë. Do të kemi:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = mx, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

Pasi t'i zëvendësojmë në ekuacionin e parë të sistemit (5) do të kemi:

$$m\dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

Në mënyrë të ngjashme fitojmë edhe për dy koordinatat tjera

$$m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Tri ekuacionet e fituara i shumëzojmë me vektorët unitarë $\vec{i}$, $\vec{j}$ dhe $\vec{k}$ dhe i mbledhim. Fitojmë ekuacionin vektorial:

$$m\ddot{\vec{r}} = -grad\,U \qquad (6)$$

Kemi fituar ekuacionin diferencial të lëvizjes së pikës materiale sikurse e kemi shqyrtuar në (I.6.4.)

c) Si shembull të tretë të zbatimit të ekuacioneve të Lagranzhit do të shqyrtojmë lëvizjen e elektronit në fushë të bërthamës së elektrizuar pozitivisht. Problemi është identik me problemin e shqyrtuar në (I.8.) me një ndryshim se këtu lëvizja kryhet nën veprimin e forcës së Kulonit, kurse më parë nën veprimin e forcës së gravitacionit. Edhe tashti problemin do ta zgjidhim në koordinata polare, të cilat me ata këndrejta lidhen me formulat:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$$

Në këtë rast si koordinata të përgjithësuara kemi: $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$ kurse ekuacionet e Lagranzhit do të kenë formën:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \text{ dhe } \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \qquad (7)$$

Për të gjetur funksionin e Lagranzhit duhet njohur energjinë kinetike dhe potenciale

$$T = \frac{m}{2}\ (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2);\ U = -\frac{Ze^2}{r}\ \ (Z \text{ — numër i plotë})$$

Do të kemi:

$$L = T - U = \frac{m}{2}\ (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{Ze^2}{r} \qquad (8)$$

Kërkojmë tani derivatet parciale të formës:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi},\ \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{Ze^2}{r^2},\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

I zëvendësojmë këto vlera në (7) dhe fitojmë:

$$\frac{d}{dt}\ (m\dot{r}) - mr\dot{\varphi}^2 + \frac{Ze^2}{r^2} = 0 \qquad (9)$$

$$\frac{d}{dt}\ (mr^2\dot{\varphi}) = 0 \qquad (10)$$

Integrimi i shprehjes (10) na jep

$$mr^2\dot{\varphi} = C \qquad (11)$$

ku me C kemi shënuar konstanten e integrimit. Ky është ligji mbi ruajtjen e momentit të sasisë së lëvizjes. Pasi ta derivojmë sipas kohës ekuacioni (9) fitojmë:

$$m\ddot{r} = -\frac{Ze^2}{r^2} + mr\dot{\varphi}^2 \qquad (12)$$

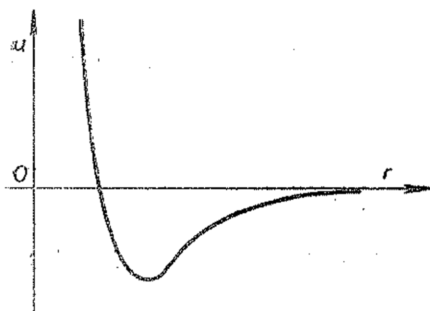


Fig. 35

Në anën e majtë kemi shprehjen për forcë, prandaj edhe në anën e djathtë të dy anëtarët duhet të paraqesin forca. Anëtari i parë paraqet forcën e Kulonit, kurse i dyti forcën centrifugale. Për integrimin e (12) shfrytëzojmë (11). Fitojmë:

$$\ddot{r} = -\frac{Ze^2}{mr^2} + \frac{C^2}{m^2r^3} \qquad (13)$$

Ekuacionin e fundit mund ta paraqesim në formën:

$$\ddot{r} = \frac{d}{dr}\left(\frac{Ze^2}{mr} - \frac{C^2}{2m^2r^2}\right)$$

I shumëzojmë të dy anët e këtij ekuacioni me $2\dot{r} = 2\,\frac{dr}{dt}$

$$\frac{d}{dr}\,\dot{r}^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{2Ze^2}{mr} - \frac{C^2}{m^2r^2}\right)$$

Pas integrimit të tij fitojmë:

$$\dot{r}^2 = \frac{2Ze^2}{mr} - \frac{C^2}{m^2r^2} + K \qquad (14)$$

ku me K kemi shënuar konstanten e integrimit. Do të njehsojmë derivatin e vektorit të pozitës sipas kohës duke e supozuar si funksion të përbërë të këndit φ. Pra,

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{mr^2}\,\frac{dr}{d\varphi}$$

E zëvendësojmë shprehjen e fundit në (14) dhe pasi ta shumëzojmë me $\frac{m^2}{C^2}$ fitojmë:

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mZe^2}{C^2}\,\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} + D$$

ku:

$$D = \frac{Km^2}{C^2}$$

Nëse e paraqesim një ndryshore të re sikurse në (I.8.9) $\rho = \frac{1}{r}$ fitojmë:

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mZe^2}{C^2}\,\rho - \rho^2 + D \qquad (15)$$

Ekuacioni diferencial (15) është identik me ekuacionin (I.8.10) dhe integrohet në të njëjtën mënyrë. Integrimin nuk do ta përsërisim, sepse nuk është qëllimi ynë.

Më në fund do ta shqyrtojmë edhe një herë shprehjen (13), të cilën mund ta shkruajmë në formën:

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{Ze^2}{r} + \frac{C^2}{2mr^2}\right) \qquad (16)$$

E dijmë se ekuacioni i lëvizjes në fushë të forcës konservative e ka formën:

$$m\ddot{r} = -\frac{dU}{dr}$$

prej nga përfundojmë se

$$U = -\frac{Ze^2}{r} + \frac{C^2}{2mr^2} \qquad (17)$$

Këtu anëtari i parë paraqet potencialin e forcës së Kulonit, kurse anëtari i dytë një potencial fiktiv i kushtëzuar me ekzistimin e forcës centrifugale. Në fig. 35 është paraqitur varshmëria e potencialit U në shprehjen (17) nga largësia r.

Për vlera të mëdha të r, në (17) anëtari i dytë është i papërfillshëm në krahasim me të parin dhe U është negative. Për vlera të vogla të r, anëtari i dytë është më i madh se i pari dhe U është pozitive. Lakorja kalon nëpër një minimum, për vlerë të caktuar të r dhe me zvogëlimin r shumë shpejt ngritet te lart.

5. PARIMI I HAMILTONIT

Supozojmë se pika materiale lëviz nën veprimin e një force konservative. Kjo forcë mund të shprehet me ndihmën e potencialit të vet në formulën:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\,grad\, U \qquad (1)$$

Në intervalin kohor në mes të t_1 dhe t_2, pika materiale kalon nëpër rrugën e caktuar nga pika fillestare P_1 deri në pikën e fundit P_2. Në fig.

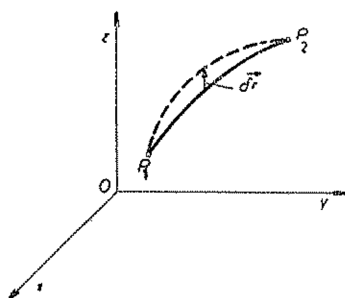


Fig. 36

36 kjo rrugë është vizatuar me vijë të pandërprerë. Të mendojmë një rrugë tjetër të mundshme në mes të pikave P_1 dhe P_2. Në figurë kjo rrugë është paraqitur me vijë të ndërprerë. Lëvizja e grimcës nëpër rrugën e ndërprerë kënaq konditat: 1. kryhet për të njëjtën kohë nga t_1 deri në t_2, 2. kryhet në mes të pikave të njëjta P_1 dhe P_2, 3. është në pajtim me lidhjet dhe 4. shumë pak dallohet nga rruga e vërtetë. Këso rrugësh në mes të pikave P_1 dhe P_2 ka pa mbarim shumë e njëra prej tyre është paraqitur me vija të ndërprera.

Nga pika e njërës rrugë, kalojmë në pikën përkatëse të rrugës tjetër me ndihmën e vektorit $\delta\vec{r}$ të cilin e quajmë variacion të vektorit të pozitës. Meqë rrugët e pikës materiale janë mjaft të afërta njëra me tjetrën, edhe vektori $\delta\vec{r}$ do të jetë shumë i vogël. Supozojmë se vektori $\delta\vec{r}$ i bashkon pikat e të dy rrugëve, kështu që pika materiale gjatë lëvizjes në ato do të gjendej në të njëjtën kohë.

Do të shumëzojmë formulën (1) në mënyrë skalare me vektorin $\delta\vec{r}$. Fitojmë:

$$m\ddot{\vec{r}}\,\delta\vec{r} = -\operatorname{grad} U\,\delta\vec{r} = -\delta U \tag{2}$$

Anën e majtë të kësaj formule e transformojmë kësisoji:

$$m\ddot{\vec{r}}\,\delta\vec{r} = m\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}\,\delta\vec{r}) = m\dot{\vec{r}}\frac{d}{dt}\delta\vec{r}$$

Pasi variacioni i rrugës nuk varet nga koha, në anëtarin e fundit mund të zëvendësojmë rendin e derivimit dhe variacionit dhe nga $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ do të kemi:

$$\frac{d}{dt}\delta\vec{r} = \delta\frac{d\vec{r}}{dt} = \delta\vec{v}$$

dhe nga formula (3) fitojmë:

$$m\ddot{\vec{r}}\,\delta\vec{r} = m\frac{d}{dt}(\vec{v}\,\delta\vec{r}) - m\vec{v}\,\delta\vec{v} =$$

$$= m\frac{d}{dt}(\vec{v}\,\delta\vec{r}) - \delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

Në anëtarin e fundit qëndron nën shenjën e variacionit shprehja për energji kinetike T. Pra,

$$m\ddot{\vec{r}}\,\delta\vec{r} = m\,\frac{d}{dt}\,(\vec{v}\,\delta\vec{r}) - \delta T$$

Shprehjen e fituar e zëvendësojmë në (2):

$$m\,\frac{d}{dt}\,(\vec{v}\,\delta\vec{r}) = \delta T - \delta U = \delta(T - U)$$

E integrojmë këtë për kohën e lëvizjes së pikës materiale:

$$m\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\,(\vec{v}\,\delta\vec{r})dt = \int_{t_1}^{t_2}\delta(T - U)dt$$

ose

$$m(\vec{v}\,\delta\vec{r})\Big|_{t_1}^{t_2} = \delta\int_{t_1}^{t_2}(T - U)dt$$

Ana e majtë është e barabartë me zero, sepse variacioni $\delta\vec{r}$ në fillim dhe në fund të rrugës është i barabartë me zero. Pra, $\delta\vec{r} = 0$ për $t = t_1$ dhe $t = t_2$. Do të kemi:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T - U)dt = 0 \qquad (4)$$

Integrali i cili figuron në shprehjen e fundit:

$$W = \int_{t_1}^{t_2}\text{Ldt; sepse } L = T - U \qquad (5)$$

quhet veprimi i Hamiltonit dhe mund të themi:

Lëvizja e vërtetë e grimcës apo e sistemit të grimcave me lidhje holonome ideale dhe forca potenciale kryhet asisoji që veprimi i Hamiltonit gjatë rrugës së vërtetë ka vlerë stacionare ndaj veprimeve përgjatë rrugëve tjera. Ky parim quhet parimi i Hamiltonit dhe paraqet njërin prej ligjeve më të rëndësishme të mekanikës. Ky është i formuluar në formë të konditës e cila ka formë integrale prandaj ky parim paraqet një parim të përgjithshëm integral të mekanikës.

Të kthehemi edhe një herë te shprehja (4). E dijmë nga matematika se funksioni ka vlerë ekstremale, kur variacioni i tij është i barabartë me zero. Prandaj formula e parimit të Hamiltonit na tregon se pika materiale lëviz nëpër atë rrugë të mundshme për të cilën integrali i funksionit $L = T - U$ ka vlerë ekstremale.

Këtu kemi filluar nga ekuacioni i lëvizjes, si formulë themelore e mekanikës dhe kemi treguar se vlen parimi variacional i Hamiltonit (4). Mund të fillohet edhe anasjelltas, duke e propozuar parimin e Hamiltonit si aksiomë mekanike. Që të dy rrugët janë ekuivalente. Përparësia e parimit të Hamiltonit shprehet me faktin se nuk përmban kurrfarë koordinata dhe me ndihmën e tij mund të kryhen njehsimet në të gjitha sistemet e koordinatave.

Në fund duhet theksuar se parimin e Hamiltonit e kemi përfituar për lëvizje të një pike materiale. Për sistem të pikave materiale mund të veprohet në mënyrë të ngjashme dhe përfitohet plotësisht i njëjti rezultat me një ndryshim se në formulën (5) paraqitet shuma e energjive kinetike të pikave materiale të sistemit të shqyrtuar:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = U$$

Pasi në fushë të forcës konservative potenciali varet vetëm prej koordinatave, kurse energjia kinetike prej shpejtësive mund të marrim në (4) se funksioni i Lagranzhit varet prej koordinatave të përgjithësuara q, shpejtësive të përgjithësuara $\dot{q}$ dhe kohës. Pra $L = L(q, \dot{q}, t)$, kurse shprehja (4) mund të shkruhet kësisoji:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \tag{6}$$

Sipas (6) duhet të përcaktohet funksioni L i cili kësaj shprehje i jep vlerë ekstremale.

6. EKUACIONI I OJLERIT PËR NJEHSIM VARIACIONI

Në matematikë mësohet se funksioni L mund të përcaktohet si zgjidhje e një ekuacioni diferencial. Problemi ynë shqyrtohet në atë pjesë të matematikës e cila quhet njehsim variacioni, kurse ekuacioni diferencial të cilin duhet ta kënaqë funksioni i cili integralit (6) i jep vlerë ekstremale, quhet ekuacion i Ojlerit. Do të përfitojmë ekuacionin diferencial të Ojlerit përkatësisht ekuacionin e Lagranzhit për problemin e variacionit (6).

Meqë variacioni ka të bëjë me koordinata, kurse integralin (6) e integrojmë sipas kohës mund të zëvendësojmë rendin e veprimeve matematike. Pra,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta_L(q, \dot{q}, t), dt = 0 \tag{1}$$

Do të përcaktojmë variacionin e (2) duke konsideruar se q dhe $\dot{q}$ janë ndryshore të pavarura:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta \dot{q} \tag{2}$$

Tani kërkojmë derivatin kohor të shprehjes:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta q\right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta \dot{q} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q \tag{3}$$

Anëtari i parë i anës së djathtë gjendet/në formulën (2). E njehsojmë nga (3) dhe e zëvendësojmë në (2)

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta q\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q \tag{4}$$

Shprehjen e fundit e zëvendësojmë në (1). Fitojmë:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right]\delta q\,dt + \int_{t_1}^{t_2} d\left(\frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q\right) = 0 \tag{5}$$

Në anëtarin e dytë gjendet integrali i diferencialit të plotë prandaj fitojmë:

$$\int_{t_1}^{t_2} d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta q\right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta q\,\Big|_{t_1}^{t_2}$$

Kur t'i zëvendësojmë kufijtë, vijnë në shprehje variacionet e koordinatave në fillim dhe në fund të lëvizjes. Meqë pikat e fillimit dhe të mbarimit janë të fiksuara, variacionet në këto pika janë të barabarta me zero. Pra,

$$\delta q(t_2) = \delta q(t_1) = 0$$

Në shprehjen (5) ngel:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right]\delta q \cdot dt = 0$$

Shprehja e fundit kënaqet për çfarëdo funksioni L vetëm nëse vlen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Kemi fituar ekuacionin e Lagranzhit. Përfundojmë se parimi i Hamiltonit dhe ekuacionet e Lagranzhit në mes veti janë ekuivalentë, apo me fjalë tjera, ekuacionet e Lagranzhit përcaktojnë mu atë funksion, apo funksione $q_i(t)$ për të cilët veprimi i Hamiltonit ka vlerë stacionare.

7. FUNKSIONI I LAGRANZHIT PËR FUSHË SHTJELLORE

Në (VII.3.11) e kemi përcaktuar funksionin e Lagranzhit për veprimin e forcave konservative. Sikurse e dijmë këto janë forca fusha e të cilave nuk ka shtjella.

Nga forcat jo konservative rëndësi të veçantë kanë forcat fusha e të cilave ka karakter shtjellor. Këto janë forca, fusha e të cilave ka shjella, por nuk ka burime. Të theksojmë se këso karakteri kanë forcat e fushës magnetike të rrymës elektrike. Do ta shënojmë me $\vec{B}$ vektorin e kësaj fushe.

Te fushat shtjellore paraqitet një funksion ndihmës vektorial $\vec{A}$ të cilin e quajmë potencial vektorial të fushës. Vektori i fushës dhe potenciali vektorial janë të lidhur me shprehjen:

$$\vec{B} = rot\,\vec{A} \tag{1}$$

Supozojmë se në pikën materiale e cila lëvizë, vepron forca për të cilën vlen formula:

$$\vec{f} = \vec{v} \times \vec{B} = \vec{v} \times rot\,\vec{A} \tag{2}$$

ku $\vec{v}$ është shpejtësia e lëvizjes së saj.

Do të shumëzojmë në mënyrë skalare me variacionin e rrugës $\delta\vec{r}$.

$$m\ddot{\vec{r}}\delta\vec{r} - (\vec{v} \times rot\,\vec{A})\delta\vec{r} \tag{3}$$

Sikurse në (VII.5) në vend të anës së majtë mund të shkruajmë:

$$m\ddot{\vec{r}}\delta\vec{r} = m\frac{d}{dt}(\vec{v}\delta\vec{r}) - \delta\left(\frac{m}{2}v^2\right)$$

Që të transferojmë anën e djathtë të shprehjes (3) duhet të zhvillojmë gradijentin e prodhimit $\vec{v}\vec{A}$.

$$grad\,(\vec{v}\vec{A}) = \vec{v} \times rot\,\vec{A} + (\vec{v}\nabla)\vec{A}$$

Nëse fusha e vektorit $\vec{A}$ nuk varet nga koha për komponente mund të shkruajmë:

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{dA_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{dA_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{dA_x}{\partial z}\dot{z} = (\vec{v}\nabla)A_x$$

prandaj rrjedh:

$$(\vec{v}\,\nabla)\,\vec{A} = \frac{dA}{dt}$$

dhe mund të shkruajmë:

$$\vec{v} \times rot\,\vec{\mathrm{A}} = grad\,(\vec{v}\,\vec{A}) - \frac{d\vec{A}}{dt}$$

Zëvendësojmë në (3):

$$m\,\frac{d}{dt}\,(\vec{v}\,\delta\,\vec{r}) - \delta\left(\frac{m}{2}\,v^2\right) = grad\,(\vec{v}\,\vec{\mathrm{A}})\delta\,\vec{r} - \frac{d\vec{A}}{dt}\,\delta\,\vec{r} \qquad (4)$$

Pasi $\delta\,r$ nuk varet nga koha mund të shkruajmë:

$$\frac{d\vec{A}}{dt}\,\delta\,\vec{r} = \frac{d}{dt}\,(\vec{\mathrm{A}}\,\delta\,\vec{r})$$

Përveç kësaj vlen:

$$grad\,(\vec{v}\,\vec{\mathrm{A}})\delta\,\vec{r} = \delta(\vec{v}\,\vec{\mathrm{A}})$$

dhe formulën (4) e shkruajmë në formën:

$$\frac{d}{dt}\,(\mathrm{m}\,\vec{v}\,\delta\,\vec{r} + \vec{\mathrm{A}}\,\delta\,\vec{r}) = \delta\left(\frac{m}{2}\,v^2 + \vec{v}\,\vec{\mathrm{A}}\right)$$

Këtë do ta integrojmë sipas kohës. Atëherë ana e majtë është e barabartë me zero, sepse variacionet e rrugëve në fillim dhe mbarim të lëvizjes janë të barabarta me zero. Do të ngel:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{m}{2}\,v^2 + \vec{v}\,\vec{\mathrm{A}}\right)dt = 0 \qquad (5)$$

Kjo është formula e parimit të Hamiltonit, prej të cilës fitojmë funksionin e Lagranzhit:

$$L = \frac{m}{2}\,v^2 + \vec{v}\,\vec{\mathrm{A}} \qquad (6)$$

Pra te forca e përcaktuar me formulën (2) e cila quhet forcë e Lorencit, funksioni i Lagranzhit përveç energjisë kinetike përmban edhe një anëtarë në të cilin paraqitet potenciali vektorial.

8. KUPTIMI I PARIMIT TË HAMILTONIT

Do të shqyrtojmë edhe një herë më hollësisht parimin e Hamiltonit. Nëse kemi një madhësi f e cila varet nga ndryshorja e pavarur x sipas një ligji të caktuar dhe ashtu që çdo vlere të x i përgjigjet një apo më shumë vlera të f, atëherë themi se f është funksioni i x dhe shënohet me $f(x)$. Mirëpo, nëse kemi një madhësi F e cila varet prej funksionit $f(x)$ sipas një ligji të caktuar dhe ashtu që çdo forme të funksionit $f(x)$ i përgjigjen një apo më shumë vlera të F, atëherë themi se F është funksional i $f(x)$ dhe zakonisht shënohet me formën $F[f(x)]$. Meqë vlera e veprimit të Hamiltonit (VII.5.5) varet prej formës së të gjitha funksioneve $q_i(t)$, shohim se veprimi i Hamiltonit është funksional prej të gjitha funksioneve $q_i(t)$. Pra,

$$W = W[q_i(t)]$$

ku me $q_i(t)$ i kemi shënuar ekuacionet e fundme të lëvizjes së sistemit nëpër rrugë të vërtetë. Vlerën e veprimit gjatë rrugës së vërtetë e shkruajmë në formën:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)dt \tag{1}$$

Nëse me $\overline{q_i}(t)$ shënojmë ekuacionet e fundme të lëvizjes së sistemit nëpër rrugën e variacionit vlera e veprimit nëpër këtë rrugë do të jetë:

$$\overline{W} = \int_{t_1}^{t_2} L(\overline{q}_i(t), \dot{\overline{q}}_i(t), t)dt \tag{2}$$

Ndryshimi i (1) dhe (2) na jep variacionin e veprimit:

$$\delta w = \overline{W} - W$$

kurse parimi i Hamiltonit (VII.5.6) vërteton se ky ndryshim është i barabartë me zero ose me fjalë tjera: lëvizja e vërtetë e sistemit të grimcave kryhet ashtu që duke mos përfillur madhësitë pa mbarim të vogla të rendeve të larta, veprimi në rrugën e vërtetë është i barabartë me veprimin në çfarëdo rruge tjetër variacionale të sistemit.

Vlera e veçantë e parimit të Hamiltonit qëndron në faktin se në bazë të ngjashmërive ky parim mund të përgjithësohet në degë të ndryshme të fizikës teorike: në mekanikë të mjediseve të vazhduara, termodinamikë, elektrodinamikë, teori të relativitetit, mekanikë kuantike dhe në teorinë kuantike të fushës. Kësisoji, parimi i Hamiltonit mund të mendohet si parim i përgjithshëm i fizikës teorke i cili i bashkon degët e ndryshme në një tërësi unike.

Duhet theksuar se ekzistojnë edhe parime tjera integrale të mekanikës të cilat shprehen me ndihmën e ndonjë kondite që duhet të kënaqë ndonjë shprehje analitike e formës integrale. Këtu bëjnë pjesë: parimi i Mopertui-Lagranzhit, parimi i Ojlerit, parimi i Jakobit, parimi i Helmholcit.

9. IMPULSET E PËRGJITHËSUARA

Zgjdhja e problemit me ekuacione të Lagranzhit kërkon integrimin e ekuacioneve diferenciale të zakonshme të rendit të dytë. Mirëpo, në shumë raste është më mirë që në vend të ekuacioneve të rendit të dytë të zbatojmë numër të dyfishtë të ekuacioneve të rendit të parë. Për përshkrimin e këtyre ekuacioneve së pari duhet të paraqesim nocionin e impulseve të përgjithësuara. Në frymën e mekanikës së Lagranzhit, çdonjerës koordinatë të përgjithësuar ia përshkruajmë impulsin përkatës të përgjithësuar të cilët i definojmë si derivate parciale të funksionit të Lagranzhit sipas shpejtësisë përkatëse të përgjithësuara:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (1)$$

Për forca konservative, potenciali i të cilave nuk varet prej shpejtësive

$L = T - U(q_1 \ldots, q_i)$ do të kemi

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \qquad (2)$$

Kësisoji çdo koordinate të përgjithësuar i përgjigjet një impuls i përgjithësuar, por nuk është e thënë që të ketë dimension impulsi sikurse edhe koordinata e përgjithësuar që nuk është e thënë të ketë dimension gjatësie. Koordinatat e përgjithësuara dhe impulset ndryshe quhen ndryshore kanonike.

Që të kuptojmë kuptimin e impulseve të përgjithësuara do të njehsojmë shprehjet e tyre eksplicite për koordinata të ndryshme. Energjia e pikës në koordinatat kënddrejta është:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

prej nga:

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \; p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \; p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \qquad (3)$$

Në këtë rast impulset e përgjithësuara paraqesin projeksionin e sasisë së lëvizjes në boshtet e koordinatave kënddrejta.

Por, siç e cekëm më lart, impulset e përgjithësuara nuk është e thënë të kenë dimension impulsi. Të fillojmë nga shprehja e mëparshme për energjinë kinetike në koordinata polare:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$

prej nga impulset përkatëse të përgjithësuara janë:

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad (4)$$

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} \qquad (5)$$

Shprehja (4) paraqet impulsin radial dhe ka dimension të sasisë së lëvizjes, kurse shprehja (5) paraqet impulsin azimutal dhe ka dimension të momentit të sasisë së lëvizjes.

Duke shfrytëzuar nocionin e impulseve të përgjithësuara, ekuacionet e Lagranzhit mund t'i shkruajmë në formën tjetër. Nga

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

dhe nga

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (6)$$

fitojmë:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad (7)$$

Ekuacionet (6) dhe (7) i përgjigjen tentimit tonë që ekuacionet e rendit të dytë t'i zëvendësojmë me ekuacione të rendit të parë. Por ato janë mjaft josimetrike. Në praktikë zakonisht përdoret forma tjetër e ekuacioneve të rendit të parë dhe njihen me emrin ekuacione të Hamiltonit apo ekuacione kanonike të lëvizjes.

10. EKUACIONET KANONIKE TË LËVIZJES

Le të kemi një sistem mekanik me „n" gradë lirije të lëvizjes. Funksioni i Lagranzhit për këtë:

$$L = L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) \qquad (1)$$

varet prej „n" koordinatave të përgjithësuara, po aq shpejtësive të përgjithësuara dhe kohës. Do të përcaktojmë diferencialin e funksionit të Lagranzhit:

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Në anëtarin e dytë e kryejmë transformimin me ndihmën e diferencialit të prodhimit:

$$d\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

Do të fitojmë:

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + d\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) - \sum_i \dot{q}_i d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Anëtarin me diferencial total e bartim në anën tjetër:

$$d\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = -\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \dot{q}_i d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (2)$$

Funksioni, diferenciali i të cilit gjendet në anën e majtë quhet funksion i Hamiltonit. E definojmë kësisoji:

$$H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad (3)$$

Me ndihmën e funksionit të Hamiltonit dhe shprehjeve (VII.9.6) dhe (VII.9.7.) formulën (2) mund ta shkruajmë në formën:

$$dH = -\sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (4)$$

Funksioni i Hamiltonit (3) varet prej koordinatave të përgjithësuara q_i, impulseve të përgjithësuar p_i dhe nëpërmes të L edhe nga koha t. Pra,

$$H = H(q_i, p_i, t)$$

E derivojmë këte shprehje dhe fitojmë:

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (5)$$

Kur t'i krahasojmë formulat (4) dhe (5) shohim se vlen:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (6)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (7)$$

dhe

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} \tag{8}$$

Shprehjet (6) dhe (7) quhen ekuacione kanonike të lëvizjes. Ky është sistem prej $2n$ ekuacionesh diferenciale të rendit të parë dhe plotësisht i zëvendësojnë ekuacionet diferenciale të Lagranzhit për lëvizje. Ekuacione të Lagranzhit kemi „n" por ato janë të rendit të dytë.

11. PËRFITIMI I EKUACIONEVE KANONIKE NGA PARIMI I HAMILTONIT

Ekuacionet kanonike të lëvizjes mund t'i përfitojmë edhe nga parimi i Hamiltonit. Me ndihmën e (VII.10.4) parimin e Hamiltonit mund ta shkruajmë në formën:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) dt = 0 \tag{1}$$

E kryejmë variacionin nën shenjën e integralit:

$$\left(\dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right) dt = 0$$

E kryejmë integrimin parcial në anëtarin e dytë:

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \delta \dot{q}_i\, dt = - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \delta q_i\, dt$$

dhe i mbledhim anëtarët me variacione të njëjta

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i + \left(- \dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] dt = 0$$

Meqë δp_i dhe δq_i janë variacione të pavarura, ky integral mund të jetë i barabartë me zero vetëm nëse vlen:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

a këto janë ekuacionet kanonike të lëvizjes. Këtu mund të përfundojmë se parimi i Hamiltonit dhe ekuacionet e Hamiltonit në mes veti janë ekuivalente.

Vlera e veçantë e ekuacioneve të Hamiltonit qëndron në këtë: Derisa funksionet e panjohura në ekuacionet e Lagranzhit, koordinatat e përgjithësuara, përcaktojnë vetëm pozitën e sistemit, funksionet e panjohura në ekuacionet e Hamiltonit, koordinatat e përgjithësuara dhe impulset e përgjithësuar, përcaktojnë jo vetëm pozitën, por edhe gjendjen e lëvizjes së sistemit. Pra, ekuacionet e Hamiltonit përcaktojnë gjendjen kinematike të sistemit dhe kësisoji luajnë rol të rëndësishëm në ato degë të fizikës teorike të cilat bazohen në nocionin e gjendjes së sistemit. Këso rastesh kemi në fizikë statistike dhe mekanikë kuantike.

Interpretimi gjeometrik i këtyre dukurive mund të fitohet duke paraqitur hapësirën $2n$ dimensionale të Euklidit në të cilën me pikë kuptojmë çdo grumbull

$$G = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$$

dhe në të cilin forma metrike definohet me shprehjen:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} dq_i^2 + \sum_{i=1}^{n} dp_i^2$$

Hapësira $2n$ dimensionale e Euklidit e definuar kësisoji quhet hapësirë fazore, atëherë gjendja kinematike e sistemit të grimcave paraqitet vetëm me një pikë në hapësirën fazore dhe numri i dimensioneve është i barabartë me dyfishin e numrit të gradëve të lirisë.

12. FUNKSIONET E HAMILTONIT PËR DISA LËVIZJE

Funksioni i Hamiltonit për fushë të forcës konservative ka formë shumë të thjeshtë. E dijmë se për fushë të kësaj force

$$L = T - U$$

Në funksion të Hamiltonit paraqitet edhe anëtarë $\sum_i p_i \dot{q}_i$ i cili në koordinata kënddrejta e ka vlerën:

$$\sum p_i \dot{q}_i = \sum_i (p_{ix} \dot{x}_i + p_{iy} \dot{y}_i + p_{iz} \dot{z}_i) = \sum_i (m_i \dot{x}_i^2 + m_i \dot{y}_i^2 + m_i \dot{z}_i^2) = \sum_i 2T_i = 2T$$

Prandaj për funksion të Hamiltonit fitojmë:

$$H = 2T - (T - U) = T + U \qquad (1)$$

Pra funksioni i Hamiltonit në fushën të forcës konservative është i barabartë me shumën e energjisë kinetike dhe potenciale. Për energji kinetike mund të shkruajmë:

$$T = \frac{p^2}{2m}$$

sepse e dijmë se funksioni i Hamiltonit duhet të varet prej koordinatave dhe impulsit, por nuk përmban komponente të shpejtësisë të cilat paraqiten në shprehjen për energji kinetike. Do të kemi:

$$H = \frac{p^2}{2m} + U \tag{2}$$

Me ndihmën e këtij funksioni ndërtojmë ekuacionet kanonike. I pari

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}$$

paraqet definicionin e komponentes së impulsit, kurse i dyti

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

ose

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

paraqet njërën prej ekuacioneve të lëvizjes së pikës materiale. Në mënyrë të ngjashme fitohen edhe komponentet tjera të lëvizjes.

Do të përcaktojmë funksionin e Hamiltonit për forcën:

$$\vec{f} = \vec{v} \times rot\,\vec{A} \tag{3}$$

e cila paraqitet te lëvizja e grimcave elektrike në fushë magnetike. Kemi treguar se funksioni i Lagranzhit për këtë lëvizje është:

$$L = \frac{m}{2} v^2 + \vec{v}\vec{A} \tag{4}$$

E zbërthejmë në komponente:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \dot{x} A_x + \dot{y} A_y + \dot{z} A_z$$

Impulsi i koordinatave përkatëse është:

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + A_x \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + A_y \\ p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + A_z \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Nga këtu mund të njehsojmë komponentet e shpejtësisë:

$$\dot{x} = \frac{1}{m} (p_x - A_x)$$

$$\dot{y} = \frac{1}{m} (p_y - A_y)$$

$$\dot{z} = \frac{1}{m} (p_z - A_z)$$

Meqë në rastin tonë $U = 0$, për funksion të Hamiltonit kemi:

$$H = T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

ose

$$H = \frac{1}{2m} [(p_x - A_x)^2 + (p_y - A_y)^2 + (p_z - A_z)^2]$$

dhe përfundimisht fitojmë:

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - \vec{A})^2 \tag{6}$$

Shohim se komponentet e impulsit kanonik nuk përputhen me komponentet e sasisë së lëvizjes. Kuptojmë se ky ndryshim i komponenteve është i barabartë me komponentet e potencialit vektorial siç shihet nga (5).

Për rastin e oshilatorit linear $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} x^2$ kurse për elektronin në fushë të Kulonit:

$$H = T + U = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{Ze^2}{r}$$

Impulset e përgjithësuara janë:

$$p_r = m\dot{r}, \; p \;\; = m r^2\dot{\varphi}$$

kurse Hamiltoniani:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\varphi^2 \right) - \frac{Ze^2}{r} \tag{7}$$

13. KUPTIMI I FUNKSIONIT TË HAMILTONIT

Fillojmë nga formula e definicionit (VII.10.3)

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Së pari do të tregojmë se në rastin kur H nuk varet në mënyrë eksplicite nga koha, atëherë vlen:

$$H = H(q_i, p_i) = const.$$

Që të vërtetojmë këte së pari do të gjejmë derivatin total të H sipas kohës:

$$\frac{\partial H}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial H}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial H}{\partial q_3} \dot{q}_3 + \ldots + \frac{\partial H}{\partial p_1} \dot{p}_1 + \frac{\partial H}{\partial p_2} \dot{p}_2 +$$

$$+ \frac{\partial H}{\partial p_3} \dot{p}_3 + \ldots = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right)$$

Zëvendësojmë nga (VII.10. 6 dhe 7)

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \text{ dhe } \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

dhe fitojmë:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0$$

prej nga fitojmë:

$$H = const.$$

Në rastin kur funksioni i Lagranzhit nuk varet nga koha në mënyrë eksplicite e gjithashtu edhe funksioni i Hamiltonit, atëherë H paraqitet si shumë e energjisë kinetike dhe potenciale. Që ta vërtetojmë këtë prapë fillojmë nga formula e definicionit.

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

Për sistem konservativ vlen:

$$L = T - U$$

E dijmë se U varet vetëm prej koordinatave, kurse nga formula (VII. 9.6.) kemi:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

Fitojmë:

$$\sum_i p_i \dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \tag{1}$$

kurse për Hamiltonianin:

$$H = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \tag{2}$$

Duhet cekur se energjia kinetike e sistemit është funksion katror homogjen i shpejtësive të përgjithësuara. Këtë e kemi vërejtur për shpejtësi në koordinata kënddrejta dhe ato polare.

Dihet nga matematika, nëse kemi një funksion homogjen $f(x_1, \ldots x_n)$ me shkallë homogjeniteti k, pra aso funksioni që për çfarëdo λ vlen:

$$f(\lambda x_1, \ldots \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

për atë funksion vlen teorema e Eulerit:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = kf$$

Zbatojmë këtë teoremë në shumën (1) dhe fitojmë:

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \dot{q}_1 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} + \dot{q}_3 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} + \ldots = 2T \tag{3}$$

Nga (2) kemi:

$$H = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2T - T + U$$

ose

$$H = T + U \tag{4}$$

Meqë forcat të cilat veprojnë janë konservative vlen ligji i ruajtjes së energjisë mekanike dhe kemi:

$$H = E = const. \tag{5}$$

Pra mund të përfundojmë se, nëse të gjitha forcat të cilat veprojnë në sistem janë konservative, funksioni i Hamiltonit paraqet energjinë e sistemit e cila gjatë kohës nuk ndërron, ku edhe qëndron kuptimi i funksionit të Hamiltonit. Nëse kjo konditë nuk kënaqet prapë vlenë shprehja (4), por jo edhe shprehja (5). Edhe në këtë rast funksioni i Hamiltonit paraqet energjinë e sistemit, por ajo nuk është konstante e lëvizjes.

14. KOORDINATAT CIKIKE, KONSTANTET E LËVIZJES

Në rast të përgjithshëm funksioni i Hamiltonit H varet prej të gjitha koordinatave dhe impulseve të përgjithësuara, por në raste speciale një apo disa koordinata mund të mos figurojnë në shprehje për H. Këto koordinata i quajmë koordinata ciklike. Për ilustrim të cekim edhe një herë funksionin e Hamiltonit për elektron i cili lëviz në fushë të Kulonit, formula (VII.12.7)

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}\,p_\varphi^2\right) - \frac{Ze^2}{r} \tag{1}$$

Nga të dy koordinatat r dhe φ në (1) vetëm r figuron në shprehje për H, prandaj φ është koordinatë ciklike.

Funksioni i Hamiltonit për lëvizje të grimcës në fushë të gravitetit e ka formën:

$$H = \frac{1}{2m}\,(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz \tag{2}$$

Sikurse shihet nga (2) në shprehje për H nuk paraqiten koordinatat x dhe y por vetëm z në anëtarin e fundit. Koordinatat x dhe y në këtë rast janë koordinata ciklike.

Nëse ndonjëra prej koordinatave është ciklike, atëherë impulsi i përgjithësuar përkatës i saj duhet të jetë konstant. Të supozojmë se në Hamiltonianin e sistemit nuk figuron koordinata q_1. Atëherë do të kemi:

$$H = H(q_2, q_3, \ldots, q_i, p_1, p_2, p_3, \ldots p_i)$$

kurse nga (VII.10.6.) fitojmë:

$$\dot{p}_1 = \frac{dp_1}{dt} = -\frac{dH}{dq_1} = 0$$

prej nga fitojmë:

$$p_1 = const.$$

Në mënyrë të ngjashme nga (1), meqë nuk figuron koordinata φ për impuls do të kemi:

$$p = mr^2\dot{\varphi} = const.$$

Gjithashtu, pasi në shprehjen (2) nuk figurojnë koordinatat x dhe y do të kemi për impulse:

$$p_x = m\dot{x} = const., \; p_y = m\dot{y} = const.$$

Pra impulset e konjuguara kanonike të këtyre ndryshoreve paraqiten si konstante të lëvizjes dhe për ta vlen ligji i konservimit.

Do të tregojmë se, nëse të gjitha koordinatat janë ciklike, atëherë të gjitha impulset janë konstante dhe të gjitha koordinatat funksione lineare të kohës. Do të shqyrtojmë rastin e rotatorit, grimcës e cila kryen lëvizje rrethore rreth qendrës së palëvizshme. Energjia kinetike e kësaj grimce është:

$$T = \frac{m}{2} r^2\dot{\varphi}^2, \; U = 0$$

Impulsi i përgjithësuar i cili i përgjigjet koordinatës φ është:

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} mr^2\dot{\varphi} = K\dot{\varphi} \text{ ku: } K = mr^2$$

prej nga pas integrimit:

$$T = \frac{1}{2} K\dot{\varphi}^2 = \frac{(K\dot{\varphi})^2}{2K} = \frac{p_\varphi{}^2}{2K}$$

dhe

$$H = T + U = \frac{p_\varphi{}^2}{2K} \tag{3}$$

Pasi e vetmja koordinatë paraqitet si koordinatë ciklike do të jetë: $p_\varphi = const.$ kurse nga ekuacionet kanonike:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{\partial}{\partial p_\varphi}\left(\frac{p_\varphi{}^2}{2K}\right) = \frac{p_\varphi}{K} = const. = C$$

Nga integrimi fitojmë:

$$\varphi = Ct + D$$

ku me D e kemi shënuar konstanten e integrimit.

Nëse sistemi i ka n gradë lirije dhe nëse të gjitha koordinatat janë ciklike, atëherë nga ekuacionet kanonike fitojmë:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = const. = C_1 \text{ dhe } \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$$

. . . .

. . . .

$$\frac{dq_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_n} = const. = C_n$$

Prej nga:

$$q_1 = C_1 t + D_1;\ q_2 = C_2 t + D_2;\ \ldots,\ q_n = C_n t + D_n$$

Pra impulset janë konstante, kurse koordinatat funksione lineare të kohës.

15. KLLAPAT E PUASONIT

Në lidhje të ngushtë me ekuacionet e Hamiltonit qëndrojnë të ashtuquajturat kllapa të Puasonit të cilat do t'i paraqesim siç vijon.

Të mendojmë një madhësi mekanike F e cila varet prej koordinatave të përgjithësuara, impulseve të përgjithësuar dhe kohës:

$$F = F(q_i, p_i, t) \tag{1}$$

Derivati i saj sipas kohës është:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{2}$$

Zëvendësojmë në këtë shprehje vlerat për $\dot{q}_i$ dhe $\dot{p}_i$ sipas (VII.10.6. dhe 7) dhe fitojmë:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{3}$$

Nëse shënojmë shkurtimisht me:

$$(u, s) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial s}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial s}{\partial q_i} \right) \tag{4}$$

atëherë shprehja (37) mund të shkruhet shkurtimisht në formën:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = (F, H) + \frac{dF}{dt} \tag{5}$$

Shprehja (4) quhet kllapë e Puasonit e funksioneve r dhe s, kurse shprehja (5) përcakton derivatin total sipas kohës për çfarëdo funksioni të formës (1). Shprehja e fundit mund të merret si ekuacion diferencial i lëvizjes së sistemit të grimcave, sepse për përfitimin e saj janë shfrytëzuar ekuacionet e Hamiltonit.

Nëse në shprehjen e fundit zëvendësojmë $F = p_i$, sepse p_i nuk varet në mënyrë eksplicite nga koha do të kemi:

$$\frac{dp_i}{dt} = (p_i, H) \tag{6}$$

Në mënyrë të ngjashme fitojmë nëse $F = q_i$. Edhe në këtë rast nuk paraqitet anëtari i dytë në anën e djathtë të ekuacionit sepse q_i nuk varet në mënyrë eksplicite nga koha. Fitojmë:

$$\frac{dq_i}{dt} = (q_i, H) \quad (i = 1, \ldots n) \tag{7}$$

Shprehjet (6) dhe (7) paraqesin ekuacionet e Hamiltonit në formë të kllapave të Puasonit. Sikurse shihet nga forma e tyre, në to janë të ndara koordinatat e përgjithësuara nga impulset e përgjithësuara. Sistemi i ekuacioneve (6) përmban vetëm koordinatat e përgjithësuara, kurse sistemi (7) vetëm impulset e përgjithësuara. Kjo është edhe përparësia e tyre.

Në veçanti, nëse funksioni F nuk ndërron gjatë kohës

$$F(q_i, p_i, t) = const. \tag{8}$$

pra kur,

$$\frac{dF}{dt} = 0 \tag{9}$$

funksioni F paraqet konstante të lëvizjes, kurse (8) integralin e parë të lëvizjes.

Nga (9), shprehja (5) do të jetë:

$$(F, H) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{10}$$

Shprehja (10) paraqet konditë të nevojshme dhe të mjaftuar që ndonjë madhësi mekanike të mbetet konstante e lëvizjes. Nëse F nuk varet në mënyrë eksplicite nga koha nga (10) fitojmë:

$$(F, H) = 0 \tag{11}$$

Kjo do të thotë, kur konstantja e lëvizjes nuk varet nga koha në mënyrë eksplicite, atëherë kllapa e saj e Puasonit me funksionin e Hamiltonit duhet të jetë e barabartë me zero.

16. LIGJET THEMELORE TË RUAJTJES

Me ndihmën e ekuacioneve kanonike mund të përfitojmë ligjet themelore të ruajtjes.

Nëse në sistemin mekanik të mbyllur shkalla kohore është homogjene, atëherë ligjet mekanike duhet të jenë të pavarura nga pika e fillimit e kësaj shkalle. Nëse pikën e fillimit të kësaj shkalle e bartim për $-dt$, atëherë koha t kalon në $t+dt$. Funksioni i Hamiltonit përmban të gjitha vetitë e lëvizjes, prandaj ai duhet të mbetet i pandryshuar gjatë këtij zëvendësimi të fillimit të shkallës kohore. Pra duhet të vlejë:

$$H(t+dt)=H(t) \tag{1}$$

Anën e majtë e zhvillojmë në seri të Tejlorit dhe e ndërpresim zhvillimin pas anëtarit të dytë:

$$H(t+dt)=H(t)+\frac{dH}{dt}\,dt$$

Kur këtë e zëvendësojmë në (1) na ngel:

$$\frac{dH}{dt}=0$$

ose

$$H=const.=E \tag{2}$$

Pra homogjeniteti i shkallës kohore e ka për rrjedhim ligjin e ruajtjes së energjisë në atë sistem mekanik.

Për rast të dytë do të supozojmë se hapësira është homogjene ndaj translacionit. Atëherë ligjet mekanike duhet të jenë të pavarura ndaj translacionit të fillimit të sistemit të koordinatave. Supozojmë se e kemi kryer translacionin për $-d\vec{r}$. Atëherë x kalon në $x+dx$, y në $y+dy$ dhe z në $z+dz$. Gjatë këtij ndërrimi duhet që funksioni i Hamiltonit të mbetet i pandryshuar. Pra,

$$\begin{aligned}H(p_{xi},\,p_{yi},\,p_{zi},\,x_i+dx_i,\,y_i+dy_i,\,z_i+dz_i,\,t)=\\=H(p_{xi},\,p_{yi},\,p_{zi},\,x_i,\,y_i,\,z_i,\,t)\end{aligned} \tag{3}$$

Pasi të zhvillojmë në seri të Tejlorit fitojmë:

$$\sum_i \left(dx \frac{\partial H}{\partial x_i} + dy \frac{\partial H}{\partial y_i} + dz \frac{\partial H}{\partial z_i} \right) = 0$$

Me ndihmën e ekuacioneve kanonike fitojmë:

$$- \sum_i (\dot{p}_{xi}\, dx + \dot{p}_{yi}\, dy + \dot{p}_{zi}\, dz) = 0$$

ose

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i\, d\vec{r} = 0$$

Pasi $\vec{r}$ nuk varet nga koha mund të shkruajmë:

$$d\vec{r} \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = 0$$

dhe meqë $dr \neq 0$ rrjedh:

$$\frac{d}{dt} \sum \vec{p}_i = 0$$

dhe

$$\sum_i \vec{p}_i = konst.$$

Shënojmë shkurtimisht impulsin e sistemit:

$$\sum_i \vec{p}_i = \vec{P}$$

dhe fitojmë:

$$\vec{P} = const. \tag{4}$$

Kemi fituar ligjin e ruajtjes së impulsit total të sistemit. Më në fund do të shqyrtojmë izotropinë e hapësirës ndaj rrotullimit. Në këtë hapësirë të gjitha kahet janë njësoj të favorizuara.

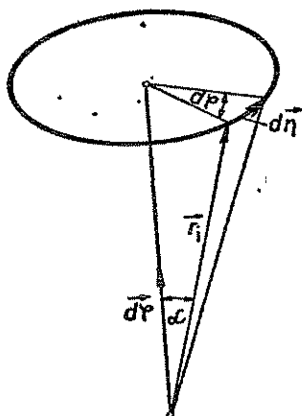


Fig. 37

Supozojmë se boshtet e koordinatave i kemi rrotulluar për një kënd të vogël $-d\varphi$. Atëherë vektori i pozitës ndërron nga $\vec{r}_i$ në $\vec{r}_i + d\vec{r}_i$, kurse vektori i impulsit nga $\vec{p}_i$ në $\vec{p}_i + d\vec{p}_i$. Do të përcaktojmë ndërrimet e këtyre vektorëve. Nga fig. 37 shohim se gjatë rotullimit të vektorit $\vec{r}_i$ për këndin $d\varphi$ ky vektor ndërron për $d\vec{r}_i$ intensiteti i të cilit është:

$$|d\vec{r}_i| = r_i \sin\alpha_i d\varphi \qquad (5)$$

Madhësinë $d\varphi$ mund ta mendojmë për intensitet të vektorit $d\vec{\varphi}$ i cili e ka kahun e boshtit të rrotullimit. Atëherë ana e djathtë e formulës (5) shpreh intensitetin e prodhimit vektorial të vektorëve $\vec{r}_i$ dhe $d\vec{\varphi}$. Meqë vektori $d\vec{r}_i$ qëndron normal në rrafshin të cilin e përcaktojnë këta vektorë fitojmë:

$$d\vec{r}_i = d\vec{\varphi} \times \vec{r}_i$$

kurse vektori i pozitës pas rrotullimit e ka vlerën:

$$\vec{r}_i + d\vec{r}_i = \vec{r}_i + d\vec{\varphi} \times \vec{r}_i$$

Në mënyrë të ngjashme mund të tregojmë se vektori i impulsit pas rrotullimit e ka vlerën:

$$\vec{p}_i + d\vec{p}_i = \vec{p}_i + d\vec{\varphi} \times \vec{p}_i$$

Invarianca e ligjeve mekanike gjatë këtij rrotullimi kërkon invariancën e funksionit të Hamiltonit. Pra,

$$H(\vec{p}_i + d\vec{\varphi} \times \vec{p}_i, \vec{r}_i + d\vec{\varphi} \times \vec{r}_i, t) = H(\vec{p}_i, \vec{r}_i, t) \qquad (6)$$

Sipas teoremës së Tejlorit është:

$$\sum_i \Big[(d\vec{\varphi} \times \vec{p}_i)_x \frac{\partial H}{\partial p_{ix}} + (d\vec{\varphi} \times \vec{p}_i)_y \frac{\partial H}{\partial p_{iy}} + (d\vec{\varphi} \times \vec{p}_i)_z \frac{\partial H}{\partial p_{iz}} +$$

$$+ (d\vec{\varphi} \times \vec{r}_i)_x \frac{\partial H}{\partial x_i} + (d\vec{\varphi} \times \vec{r}_i)_y \frac{\partial H}{\partial y_i} + (d\vec{\varphi} \times \vec{r}_i)_z \frac{\partial H}{\partial z_i} \Big] = 0$$

Me ndihmën e ekuacioneve kanonike fitojmë:

$$\sum_i [(\vec{d\varphi} \times \vec{p_i})_x \dot{x}_i + (\vec{d\varphi} \times \vec{p_i})_y \dot{y}_i + (\vec{d\varphi} \times \vec{p_i})_z \dot{z}_i -$$

$$- (\vec{d\varphi} \times \vec{r_i})_x \dot{p}_{ix} - (\vec{d\varphi} \times \vec{r_i})_y \dot{p}_{iy} - (\vec{d\varphi} \times \vec{r_i})_z \dot{p}_{iz}] = 0$$

Këto janë prodhimet skalare të vektorëve:

$$\sum_i [(\vec{d\varphi} \times \vec{p_i}) \dot{\vec{r_i}} - (\vec{d\varphi} \times \vec{r_i}) \dot{\vec{p_i}}] = 0$$

Do të kryejmë zëvendësimin ciklik të vektorëve në prodhimet e përziera:

$$d\varphi \sum_i (p_i \times \dot{\vec{r_i}} - \vec{r_i} \times \dot{\vec{p_i}}) = 0$$

ose

$$- \sum_i (\dot{\vec{r_i}} \times \vec{p_i} + \vec{r_i} \times \dot{\vec{p_i}}) = 0$$

Shprehja e fundit paraqet derivatin sipas kohës së prodhimit vektorial:

$$\frac{d}{dt} \sum_i (\vec{r_i} \times \vec{p_i}) = 0$$

E dijmë se

$$\sum_i \vec{r_i} \times \vec{p_i} = \sum_i \vec{L_i} = \vec{L}$$

paraqet momentin e sasisë së lëvizjes. Do të kemi:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = 0$$

prej nga rrjedh:

$$\vec{L} = const.$$

Kështu e kemi fituar ligjin për ruajtjen e momentit të sasisë së lëvizjes. Ky ligj është rezultat i izotropisë së hapësirës ndaj rrotullimit.

17. TRANSFORMIMET KANONIKE

Të shqyrtojmë transformimin e ndryshoreve të vjetra kanonike q_i dhe p_i në ndryshore të reja $\overline{q}_i$ dhe $\overline{p}_i$ të formës:

$$\begin{aligned} \overline{q}_i &= \overline{q}_i(q_k, p_k, t) \\ & \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (1) \\ \overline{p}_i &= \overline{p}_i(q_k, p_k, t) \end{aligned}$$

dhe supozojmë se këto ekuacione mund të zgjidhen sipas ndryshoreve të vjetra q_i dhe p_i

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(\overline{q}_k, \overline{p}_k, t) \\ & \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (2) \\ p_i &= p_i(\overline{q}_k, \overline{p}_k, t) \end{aligned}$$

Nëse mund të gjejmë funksionin $\overline{H} = \overline{H}(\overline{q}_i, \overline{p}_i, t)$ të atillë që ekuacionet kanonike të lëvizjes, gjatë këtij transformimi të ruajnë formën e pandryshuar (VII.10.6 dhe 7):

$$\dot{\overline{p}}_i = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \overline{q}_i}, \quad \dot{\overline{q}}_i = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \overline{p}_i} \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (3)$$

atëherë ekuacionet (1) të transformimit të ndryshoreve quhen transformime kanonike.

Që të tregojmë se për çfarë kondite transformimet (1) janë kanonike, fillojmë nga formula (VII.5.4)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L \cdot dt = 0$$

e cila sipas (VII.10.3) do të jetë:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H\right) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i - H\, dt\right) = 0 \qquad (4)$$

kurse për ndryshore të reja kanonike parimi i Hamiltonit ka formën:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{p}_i \dot{\overline{q}}_i - \overline{H}\right) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{p}_i\, d\overline{q}_i - \overline{H}\, dt\right) = 0 \qquad (5)$$

Në anën tjetë për çfarëdo funksioni F të ndryshoreve të reja apo të vjetra vlen:

$$\delta F(t_1) = 0, \; \delta F(t_2) = 0 \qquad (6)$$

sepse rrugët në fillim dhe në mbarim të lëvizjes përputhen. Prandaj do të kemi:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dF = \delta[F(t_2) - F(t_1)] = \delta F(t_2) - \delta F(t_1) = 0$$

Prandaj shprehja e fundit e ka formën:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dF = 0 \tag{7}$$

Nga kjo kuptojmë se shprehjet (4) dhe (5) do të kënaqen edhe nëse funksionet nën integrale ndryshojnë për dF. Do të shkruajmë:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i - H \, dt = \sum_{i=1}^{n} \overline{p}_i \, d\overline{q}_i - \overline{H} \, dt + dF \tag{8}$$

Shprehja (8) paraqet konditën e kërkuar kurse funksioni F quhet gjeneratrisë e transformimeve kanonike.

Nga shprehjet (1) kuptojmë se kemi $2n$ lidhje në mes të ndryshoreve kanonike të vjetra dhe të reja, prandaj nga të gjitha ndryshoret q_i, p_i $\overline{q}_i$ dhe $\overline{p}_i$ vetëm $2n$ janë të pavarura. Për këtë arsye gjeneratrisa F mund të merret në njërën prej formave:

$$F_1(q_i, \overline{q}_i, t), \; F_2(q_i, \overline{p}_i, t), \; F_3(p_i, \overline{q}_i, t), \; F_4(p_i, \overline{p}_i, t) \tag{9}$$

Nga këto kombinime me të rëndësishme janë dy të parat, në të cilat edhe do të përqëndrojnë vëmendjen.

18. PËRCAKTIMI I EKUACIONEVE KANONIKE ME NDIHMËN E GJENERATRISËS

E kërkojmë derivatin e formës së parë të gjeneratrisës

$$F_1(q_i, \overline{q}_i, t)$$

Do të kemi:

$$dF_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \, dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_1}{\partial \overline{q}_i} \, d\overline{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} \, dt \tag{1}$$

dhe e zëvendësojmë në (VII.17.8). Fitojmë:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i - H \, dt = \sum_{i=1}^{n} \overline{p}_i \, d\overline{q}_i - \overline{H} \, dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \, dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_1}{\partial \overline{q}_i} \, d\overline{q}_i +$$

$$+ \frac{\partial F_1}{\partial t} \, dt \tag{2}$$

Në (2) koeficientët përkatës në të dy anët duhet të jenë në mes veti të barabartë: Fitojmë:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, 0 = \bar{p}_i + \frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}_i}, -H = -\bar{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

ose

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \bar{p}_i = -\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}_i} \bar{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \tag{3}$$

Për formën e dytë të gjeneratrisës e shkruajmë shprehjen (2) në formën:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i - H\, dt = d \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i\, \bar{q}_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{q}_i\, d\bar{p}_i - \bar{H}\, dt + dF_1$$

ose

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i - H\, dt = -\sum_{i=1}^{n} \bar{q}_i\, d\bar{p}_i - \bar{H}\, dt + d(F_1 + \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i\, \bar{q}_i) \tag{4}$$

Shohim se diferenciali i anëtarit të fundit është funksion linear i diferencialeve dq_i, $d\bar{p}_i$ dhe dt, prandaj mund ta mendojmë si funksion të ndryshoreve q_i, $\bar{p}_i$ dhe t. Pra,

$$F_2(q_i, \bar{p}_i, t) = F_1 + \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i\, \bar{q}_i \tag{5}$$

Shprehja (5) paraqet gjeneratrisën e tipit F_2. E kërkojmë derivatin e saj:

$$dF_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\, dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}_i}\, d\bar{p}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t}\, dt \tag{5}$$

Zëvendësojmë (5) në (4)

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i - H\, dt = -\sum_{i=1}^{n} \bar{q}_i\, d\bar{p}_i - \bar{H}\, dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\, dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}_i}\, d\bar{p}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t}\, dt \tag{6}$$

Edhe në këtë rast sikurse më parë i krahasojmë koeficientët përkatës sepse q_i, $\bar{p}_i$ dhe t janë ndryshore të pavarura. Fitojmë:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \ 0 = -\overline{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial \overline{p}_i}, \ -H = -\overline{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

ose

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \ \overline{q}_i = \frac{\partial F_2}{\partial \overline{p}_i}, \ \overline{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (7)$$

Shprehjet (7) i përcaktojnë transformimet kanonike me gjeneratrisën e formës $F_2(q_i, \overline{p}_i, t)$.

19. EKUACIONI I HAMILTON-JAKOBIT

Do të kërkojmë atë transformim kanonik për të cilin funksioni i ri i Hamiltonit është i barabartë me zero. Pra,

$$\overline{H}(\overline{q}_k, \overline{p}_k, t) = 0 \quad (1)$$

dhe për gjeneratrisë do të marrim funksionin e formës $F_2(q_i, \overline{p}_i, t)$ të cilin do ta shënojmë me S

$$S = F_2(q_i, \overline{p}_i, t) \quad (2)$$

Në mënyrë të ngjashme sikurse në (VII.10) dhe nga kondita (1) ekuacionet kanonike të lëvizjes për ndryshore të reja do të kenë formën:

$$\dot{\overline{p}}_i = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \overline{q}_i} = 0, \ \dot{\overline{q}}_i = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \overline{p}_i} = 0$$

I integrojmë këto shprehje dhe fitojmë:

$$\overline{p}_i = const. = \alpha_i, \quad \overline{q}_i = const. = \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots n. \quad (3)$$

Duke shfrytëzuar (3), për (2) do të kemi:

$$S = S(q_i, \alpha_i, t) \quad (3a)$$

sepse $\overline{p}_i = \alpha_i$

Nga shprehjet (VII.18.7) (2) dhe (1) kemi:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \ \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}, \ \overline{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

Funksioni i Hamiltonit është funksion i njohur i koordinatave të përgjithësuara dhe kohës. Pra,

$$H = H(q_i, p_i, t) \tag{5}$$

Nga (4) për p_i kemi:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \tag{5a}$$

E zëvendësojmë në (5)

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right)$$

kurse ekuacioni i fundit i (4) do të ketë formën:

$$H\left(q_i \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

Shprehja e fundit paraqet ekuacionin e Hamilton-Jakobit. Ky është ekuacion diferencial parcial në të cilin si funksion i panjohur është gjeneratrisa e transformimit kanonik S, kurse si ndryshore të pavarura janë të gjitha shpejtësitë e përgjithësuara q_i dhe koha t. Zgjidhja e këtij ekuacioni quhet funksion kryesor i Hamiltonit.

Që të përcaktojmë kuptimin e funksionit S, do të kërkojmë derivatin total sipas kohës në pajtim me shprehjen (3a):

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} \tag{7}$$

Shfrytëzojmë ekuacionin e parë të (4) dhe (6)

$$\frac{dS}{dt} = \sum p_i \dot{q}_i - H \tag{8}$$

E dijmë se ana e dijmë se ana e djathtë e ekuacionit (8) është e barabartë me funksionin e Lagranzhit L, prandaj fitojmë:

$$\frac{dS}{dt} = L$$

dhe pasi ta integrojmë sipas kohës në kufijtë nga t_1 deri në t fitojmë:

$$S = \int_{t_1}^{t} L\,dt \tag{9}$$

Pra, funksioni kryesor i Hamiltonit paraqet veprimin e Hamiltonit me kufirin e lartë të pacaktuar.

Më në fund duhet theksuar se nga shprehja (3) kuptojmë si vijon: transformimet kanonike prej të cilave funksioni i ri i Hamiltonit është i barabartë me zero si ndryshore të reja japin konstante të lëvizjes.

Ekuacioni i Hamilton-Jakobit për grimcën e lirë në fushë potenciale në koordinatat kënddrejta e ka formën që vijon. Fillojmë nga formula (VII.14.2):

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z) \tag{10}$$

Nga ekuacioni (5a) kemi:

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x}, \; p_y = \frac{\partial S}{\partial y}, \; p_z = \frac{\partial S}{\partial z} \tag{11}$$

Nga (6), (10) dhe (11) fitojmë:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{\partial S}{\partial t} + U(x, y, z) = 0 \tag{12}$$

Në koordinata cilindrike dhe sferike ekuacioni i Hamilton-Jakobit, për lëvizje të grimcës në fushë me potencial U shprehet në format:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{\partial S}{\partial t} + U(\rho, \varphi, z) = 0$$

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right] + \frac{S\varrho}{\partial t} + U(r, \theta, \varphi) = 0$$

Dy shprehjet e fundit lexuesi mund t'i përfitojë shumë lehtë.

Nëse funksioni i Hamiltonit nuk varet nga koha, në vend të S mund të paraqesim funksionin e ri $\check{S}$ me zëvendësim

$$S = \check{S} - Et$$

atëherë

$$\frac{\partial S}{\partial t} = E$$

kurse ekuacioni diferencial parcial do të ketë formën

$$H\left(q_i, \frac{\partial \check{S}}{\partial q_i}\right) = E$$

Atëherë për lëvizjen e grimcës, nga ekuacioni (12) do të kemi:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial \check{S}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \check{S}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \check{S}}{\partial z}\right)^2\right] + U(x, y, z) = E \qquad (13)$$

Rëndësia e ekuacionit të Hamilton-Jakobit qëndron në faktin se paraqet urë kah optika, kurse ky ka qenë rol fundamental për zhvillimin e mekanikës së kuanteve.

VIII. GODITJET ELASTIKE

1. LËVIZJET QENDRORE ME BURIM TË LËVIZSHËM FORCASH

Në shqyrtimin e lëvizjes nën veprimin e forcave qendrore (shih I. 7 dhe 8) kemi supozuar se burimi i forcave është i palëvizshëm. Kjo do të thotë se kemi studiuar lëvizjen e trupit apo grimcës me masë tepër të vogël ndaj masës së madhe të palëvizshme. Në atë rast në burim të forcës gjendej edhe qendra e masës së sistemit të tyre. Ky supozim është i arsyeshëm kur kemi të bëjmë me lëvizje të satelitit rreth planetit apo planetit rreth Diellit, sepse në të dy rastet masa e trupit qendror është shumë më e madhe se masa e trupit lëvizës. Mirëpo kjo konditë shpeshherë nuk plotësohet, prandaj do të shqyrtojmë rastin kur të dy grimcat lëvizin nën veprimin e forcës qendrore. Atëherë forca e cila vepron në grimcën me masë m_1 si dhe forca e cila vepron në grimcën me m_2 gjithmonë kalon nëpër qendër të masës së dy grimcave. Në këtë rast qendra e masës e luan rolin e pikës në hapësirë nëpër të cilën gjithmonë kalojnë forcat qendrore. Për këtë arsye në vërtetimet e mëhershme duhet pikën e palëvizshme O ta zëvendësojmë me qendër të masës së sistemit të dy grimcave. Edhe në këtë rast lëvizja kryhet në rrafsh.

Pozitën e të dy grimcave në rrafshin e lëvizjes mund ta përcaktojmë me ndihmën e vektorëve të tyre të pozitave, por është më lehtë që në vend të këtyre vektorëve të paraqesim vektorin e pozitës së qendrës së masës të definuar në (VI.1.1.), dhe vektorin e pozitës së tyre relative. Do ta shënojmë me $\vec{r}$. Pra do të kemi nga fig. 38

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \qquad (1)$$

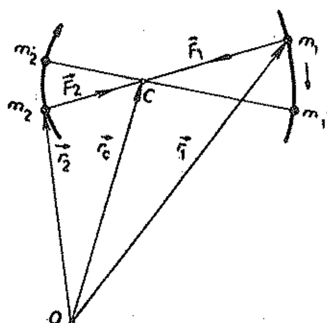


Fig. 38

Që të gjejmë nga këto ekuacione vektorët e pozitave $\vec{r}_1$ dhe $\vec{r}_2$ i shkrujmë në formën:

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = (m_1 + m_2)\vec{r}_c \text{ dhe } \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_1 = (m_1 + m_2)\vec{r}_c + m_2 \vec{r}$$

dhe

$$m_1 \vec{r}_2 + m_2 \vec{r}_2 = (m_1 + m_2)\vec{r}_c - m_1 \vec{r}$$

Nga këto ekuacione fitojmë për vektorët e pozitave të grimcave:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_c + \frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{r}, \; \vec{r}_2 = \vec{r}_c - \frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{r} \tag{2}$$

Derivatet e para sipas kohës shprehin shpejtësitë e grimcave:

$$\vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}_1 = \vec{v}_c + \frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{v}, \; \vec{v}_2 = \dot{\vec{r}}_2 = \vec{v}_c - \frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{v} \tag{3}$$

ku është:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \tag{4}$$

shpejtësia relative e grimcës së parë ndaj tjetrës.

Energjia kinetike e grimcave do të jetë:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_c^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} v^2$$

Nëse masën e sistemit e shënojmë me m, kurse me μ masën e reduktuar sipas shprehjeve:

$$m = m_1 + m_2, \; \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \tag{5}$$

energjia e sistemit do të jetë:

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \mu v^2$$

Funksioni i Lagranzhit për sistem të dy grimcave është:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \mu v^2 - U(r) \tag{6}$$

ose në formën eksplicite:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2) + \frac{\mu}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)$$

Nëse për koordinata të përgjithësuara në rrafshin e lëvizjes marrim koordinatat x_c dhe y_c dhe koordinatat relative x dhe y do të kemi këto ekuacione të Lagranzhit për lëvizje të grimcave:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} - \frac{\partial L}{\partial x_c} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_c} - \frac{\partial L}{\partial y_c} = 0$$

dhe

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

Nga dy ekuacionet e para fitojmë:

$$m\ddot{x}_c = 0 \text{ dhe } m\ddot{y}_c = 0$$

ose në formën vektoriale

$$m\ddot{\vec{r}}_c = 0 \tag{7}$$

Nga dy ekuacionet e dyta fitojmë:

$$\mu\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \text{ dhe } \mu\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

ose në formën vektoriale

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \tag{8}$$

Ekuacioni (7) përcakton lëvizjen e qendrës së masës, kurse ekuacioni (8) lëvizjen relative të grimcave. Në bazë të shprehjeve (7) dhe (8) mund të konkludojmë kësisoji: Çdo lëvizje e dy grimcave nën veprimin decimale të forcave qendrore mund të shprehet si lëvizje translatore e qendrës së masës së tyre dhe lëvizje relative e grimcave e cila është ekuivalente me lëvizjen e grimcës së parë me masë të reduktuar rreth grimcës së dytë të palëvizshme në qendër të masës.

Ekuacioni (7) tregon se në këtë rast qendra e masës lëviz në mënyrë të njëtrajtshme, kurse ekuacioni (8) e ka të njëjtën formë sikurse ekuacioni i lëvizjes me qendër të palëvizshme në qendër të masës, sepse këtu në vend të masës së grimcës m qëndron masa e reduktuar (5). Në këtë ekuacion me $\vec{r}$ duhet kuptuar largësinë nga qendra e masës.

2. GODITJET ELASTIKE TË DY GRIMCAVE

a) Shpejtësitë e grimcave në të dy sistemet

Goditjen elastike në mes të dy grimcave do ta shqyrtojmë si veprim reciprok gjatë të cilit njëra grimcë, nën veprimin e forcës qendrore e cila rrjedh nga grimca tjetër, përkulet për një kënd nga drejtimi fillestar. Në largësi të mëdha nga vendi i goditjes kjo është ekuivalente me goditjen e dy sferave të ngurta.

Pasi nga (7) dhe (8) kuptuam se çdo lëvizje qendrore e dy grimcave mund të shndërrohet në lëvizje të njëtrajtshme të qendrës së masës dhe lëvizje relative të grimcave, atëherë është më thjesht që goditja e dy grimcave të shqyrtohet në sistem të lidhur për qendër të masës së tyre. Në këtë sistem vjen në shprehje vetëm lëvizja relative e grimcave. Atëherë sistemi i palëvizshëm quhet sistem laboratorik, kurse sistemi i lidhur me qendër të masave të grimcave quhet sistem i qendrës së masave. Në këtë rast sistemi i qendrës së masave lëviz në mënyrë të njëtrajtshme ndaj sistemit laboratorik. Kësisoji lëviz edhe qendra e masave. Sistemi i dy grimcave është i izoluar prandaj edhe në sistem laboratorik edhe në sistem të qendrës së masës vlejnë ligjet e ruajtjes së energjisë dhe impulsit.

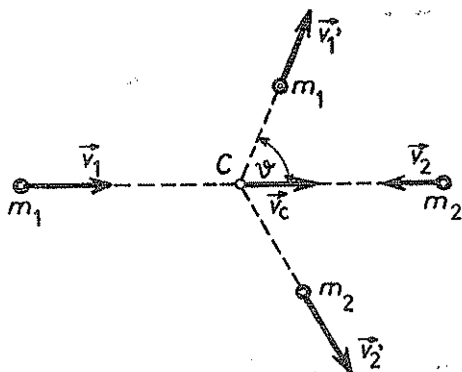


Fig. 39

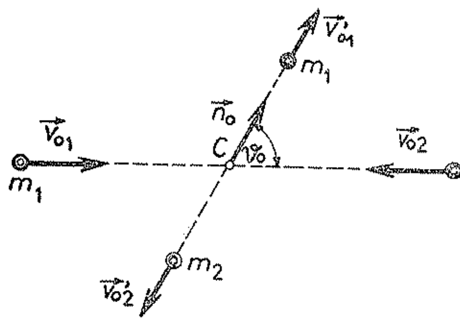


Fig. 40

Do të shënojmë me $\vec{v}_1$ dhe $\vec{v}_2$ shpejtësitë e grimcave para goditjes në sistemin laboratorik. Këto shpejtësi pas goditjes le të jenë $\vec{v}_1'$ dhe $\vec{v}_2'$. Grimca e parë gjatë goditjes le të përkulet për një kënd ϑ. Kjo gjendje është paraqitur në fig. 39. Në të njëjtën figurë është paraqitur edhe pozita e qendrës së masave në momentin e goditjes përkatësisht në momentin kur grimcat janë më së afërmi njëra ndaj tjetrës. Nëse grimca e dytë para goditjes gjendet në qetësi, atëherë $\vec{v}_1 = \vec{v}$ paraqet shpejtësinë relative të grimcës së parë ndaj grimcës së dytë, $\vec{v}_2 = 0$.

Në sistemin e qendrës së masës këto madhësi do t'i shënojmë me indeks zero për dallim nga madhësitë në sistemin laboratorik. Kjo gjendje është paraqitur në fig. 40. Derivati sipas kohës i shprehjes (VIII. 1.1) duke marrë në konsiderim se grimca e dytë para goditjes është në qetësi jep shpejtësinë e lëvizjes së qendrës së masës ndaj sistemit laboratorik. Me qendër të masës është i lidhur sistemi i qendrës së masës. Do të kemi:

$$\vec{v}_c = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v} \qquad (1)$$

Në sistemin e qendrës së masës shpejtësinë e grimcave para goditjes shprehen me formulat:

$$\vec{v}_{o1} = \vec{v}_1 - \vec{v}_c = \vec{v} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} \qquad (2)$$

$$\vec{v}_{o2} = \vec{v}_2 - \vec{v}_c = - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v} = - \vec{v}_c \qquad (3)$$

sepse $\vec{v}_2 = 0$

Në këtë sistem impulsi total para goditjes është i barabartë me zero:

$$\vec{p}_o = m_1 \vec{v}_{o1} + m_2 \vec{v}_{o2} = 0 \qquad (4)$$

për të cilën gjë mund të bindemi nëse në (4) zëvendësojmë vlerat (2) dhe (3). Edhe pas goditjes impulsi duhet të jetë i barabartë me zero sepse si i tillë mbetet i pandryshuar. Pra,

$$\vec{p}_o' = \vec{p}_{o1}' + \vec{p}_{o2}' = 0 \qquad (5)$$

Në largësi të mëdha veprimi reciprok i grimcave është i barabartë me zero, prandaj energjia totale është e barabartë me shumën e energjive kinetike. Pra, energjia para goditjes do të jetë:

$$E_o = \frac{p^2_{o1}}{2m_1} + \frac{p^2_{o1}}{2m_2} = \frac{p^2_{o1}}{2} \frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2} = \frac{1}{2\mu} p^2_{o1} \qquad (6)$$

sepse nga (4) $p_{o1} = p_{o2}$.

Në mënyrë të ngjashme fitojmë për energjinë pas goditjes në sistem të qendrës së masës,

$$E_o' = \frac{p'^2_{o1}}{2m_1} + \frac{p'^2_{o1}}{2m_2} = \frac{1}{2\mu} p'^2_{o1} \qquad (7)$$

sepse nga (5) $p'_{o1} = p'_{o2}$.

Meqë energjia edhe pas goditjes mbetet e pandryshuar, atëherë nga (6) dhe (7) kuptojmë se vlen:

$$p_{o1} = p'_{o1}$$

kurse nga (4) dhe (5), sikurse vërejtëm edhe më parë $p_{o1} = p_{o2}$ dhe $p'_{o1} = p'_{o2}$ prej nga përfundojmë se vlen $p'_{o2} = p_{o2}$. Pra, impulset e grimcave pas goditjes mbesin të pandryshuara për nga intensiteti. I njëjti përfundim vlen edhe për shpejtësinë e grimcave.

Duke u bazuar në përfundimin e fundit për shpejtësi, nga shprehjet (2) dhe (3) shpejtësitë e grimcave pas goditjes në sistem të qendrës së masave do të jenë:

$$\vec{v}'_{o1} = \frac{m_2}{m_1+m_2} v \vec{n}_o, \quad \vec{v}'_{o2} = -\frac{m_1}{m_1+m_2} v \vec{n}_o \tag{8}$$

ku me $\vec{n}_o$ e kemi shënuar vektorin unitar në kah të lëvizjes së grimcës me masë m_1, pas goditjes.

Nga shprehjet (1), (2), (3) dhe (8) për shpejtësi të grimcave pas goditjes në sistemin laboratorik do të kemi vlerat:

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}'_{o1} + \vec{v}_c = \frac{m_2}{m_1+m_2} v \vec{n}_o + \frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{v} \tag{9}$$

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}'_{o2} + \vec{v}_c = \frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{v} - \frac{m_1}{m_1+m_2} v \vec{n}_o \tag{10}$$

Nga ligjet e ruajtjes së energjisë dhe impulsit nuk mund të përfundojmë për drejtimin e vektorit $\vec{n}_o$ sepse varet nga ligji i veprimit reciprok dhe i pozitës reciproke të grimcave gjatë goditjes.

b) Këndet e përkuljes në të dy sistemet

Qendrën e sistemit laboratorik do ta shënojmë me O, kurse qendrën e sistemit të qendrës së masave me O'. Këndet e përkuljes së grimcës së parë pas goditjes në sistemet përkatëse i kemi shënuar me ϑ dhe ϑ_o. Kjo gjendje është paraqitur në fig. 41. Nga figura shohim se vlen:

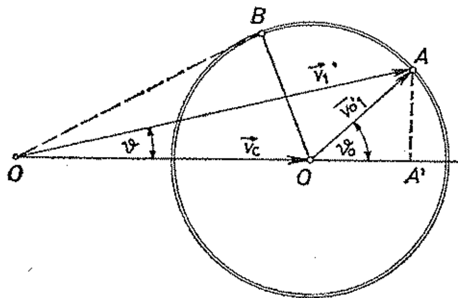


Fig. 41

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{AA'}{AA'} = \frac{OA'}{OO'+O'A'}$$

Zëvendësojmë vlerat përkatëse në formulë dhe fitojmë:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{v'_{o1} \sin\vartheta_o}{v_c + v'_{o1} \cos\vartheta_o} \tag{11}$$

Intensitet e shpejtësive (8) dhe (1) duhet t'i zëvendësojmë në (11). Pjesëtojmë anën e djathtë të shprehjes (11), edhe emëruesin dhe numëruesin me v'_{o1} dhe për herës të shpejtësive do të kemi:

$$\frac{v_c}{v'_{o1}} = \frac{m_1}{m_2} \tag{12}$$

kurse (11) merr formën:

$$\text{tg}\vartheta = \frac{\sin\vartheta_o}{\frac{m_1}{m_2} + \cos\vartheta_o} \tag{13}$$

Meqë varshmëria në mes të këndeve ϑ dhe ϑ_o është e lidhur me herësin në mes të masave të grimcave, atëherë për vlera të ndryshme të kësaj marrëdhënie do të kemi vlera të ndryshme të këndeve, të cilat do t'i shqyrtojmë.

1. Nëse $m_1 < m_2$, atëherë nga (12) $v_c < v'_{o1}$. Në këtë rast këndi ϑ në sistemin laboratorik do të ketë vlera më të vogla se $\frac{\pi}{2}$, por edhe më të mëdha.

2. Nëse $m_1 > m_2$, atëherë $v_c > v'_{o1}$. Në këtë rast këndi ϑ nuk mund të kalojë një vlerë maksimale e cila arrihet kur *OA* merr pozitën e tangjentes *OB*. Kjo vlerë maksimale e këndit ϑ përcaktohet sipas shprehjes:

$$\sin\vartheta_{max} = \frac{v'_{o1}}{v_c} = \frac{m_2}{m_1} \tag{14}$$

3. Nëse $m_1 = m_2$, atëherë nga (14) do të kemi:

$$\sin\vartheta_{max} = 1, \ \vartheta_{max} = \frac{\pi}{2}$$

kurse shprehja (13) e merr formën e thjeshtësuar:

$$\text{tg}\vartheta = \frac{\sin\vartheta_o}{1+\cos\vartheta_o} = \text{tg}\,\frac{\vartheta_o}{2}$$

prej nga fitojmë:

$$\vartheta = \frac{\vartheta_o}{2}$$

Pra në këtë rast këndi në sistemin laboratorik është sa gjysma e këndit në sistemin e qendrës së masave.

c) Humbja e energjisë

Fillojmë nga shprehja për energji kinetike të grimcës së parë gjatë goditjes në sistem laboratorik. Pra,

$$E_1' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2$$

Pasi të zëvendësojmë shprehjen (9) për $v_1'^2$ për energji fitojmë:

$$E_1' = \frac{m_1 v^2}{2(m_1+m_2)^2} (m_1^2 + 2m_1 m_2 \cos\vartheta_o + m_2^2) \tag{15}$$

Ndërrimin e energjisë e fitojmë kur nga energjia fillestare para goditjes e zbresim energjinë pas goditjes (15). Do të kemi:

$$\triangle E_1 = E_1 - E_1' = \frac{1}{2} m_1 v^2 - E_1' = \frac{m_1^2 m_2 v^2}{(m_1+m_2)^2} (1 - \cos\vartheta_o) \tag{16}$$

Shprehja e fundit e përcakton humbjen e energjisë gjatë goditjes së grimcës në sistemin laboratorik si funksion të këndit të përkuljes të sistemit të qendrës së masës. Kuptojmë se kalimi në kënd të përkuljes, të sistemit laboratorik kryhet me shprehjen (13).

Në veçanti, nëse masat e grimcave janë të njëjta, $m_1 = m_2$, nga (16) do të kemi:

$$E_1 = \frac{m_1^3 v^2}{4m_1^2} (1 - \cos\vartheta_o) = E_1 \sin^2 \frac{\vartheta_o}{2}$$

E dijmë se $\vartheta_o = 2\vartheta$, prandaj shprehja e fundit mund të shkruhet

$$E_1 = E_1 \sin^2 \frac{\vartheta_o}{2} = E_1 \sin^2\vartheta$$

Humbja e energjisë së grimcës së parë do të jetë:

$$E_1' = E_1 - \triangle E_1 = E_1 \cos^2\vartheta \tag{17}$$

kurse për grimcën e dytë pas goditjes do të kemi këtë humbje të energjisë:

$$E_2' = \triangle E_1 = E_1 \sin^2\vartheta \tag{18}$$

d) Shpërhapja e grimcave

Do të shqyrtojmë përkuljen e grimcës me masë m_1 në fushë të forcës qendrore me potencial $U(r)$ i cili rrjedh nga grimca e dytë me masë m_2. Le të jetë në fig. 42 qendra e masës në pikën C. Vija e pandërprerë tregon rrugën e pikës me masë të reduktuar μ. Shpejtësia fillestare e grimcës me masë μ është v_{o1}, kurse ajo e fundit e të njëjtës grimcë v_{o2}, ϑ_o është këndi i përkuljes, përkatësisht këndi në mes të asimtoteve të rrugës.

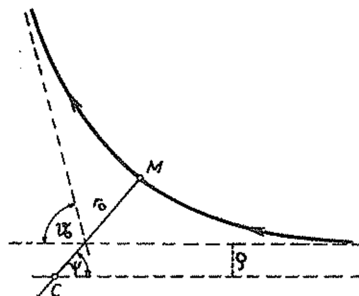


Fig. 42

Rruga e grimcës është simetrike ndaj vijës e cila bashkon jendrën e masave dhe pikën më të afërt të rrugës, sepse intensiteti i forcës qendrore varet vetëm prej largësisë nga burimi i saj. Le të jetë këndi në mes të këtij boshti të simetrisë CM dhe drejtimit fillestar të grimcës. Sikurse shihet nga figura lidhja në mes të këndit ϑ_o dhe ψ shprehet me formulën

$$\vartheta_o = \pi - 2\psi \tag{19}$$

Kësisoji problemi i përcaktimit të këndit të përkuljes ϑ_o shndërrohet në problem të njohjes së këndit ψ.

e) Ekuacioni i rrugës në formës integrale te forcat qendrore

Për përcaktimin e ekuacionit të rrugës fillojmë nga ekuacionet e Lagranzhit për koordinata polare r dhe φ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Funksioni i Lagranzhit është:

$$L = T - U = \frac{m}{2}\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

Duhet të gjejmë:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\,\dot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = m\,r\dot{\varphi}^2 - U'(r) = m\,r\dot{\varphi}^2 + f(r)$$

sepse për forcë qendrore mund të shkruajmë:

$$\vec{F} = f(r)\,\vec{r}_o = -\,U'(r)\,\vec{r}_o = -U'(r)\,grad\,r$$

Pastaj kërkojmë:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\,r^2\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Ekuacionet e Lagranzhit do të kenë formën:

$$m\ddot{r} - m\,r\dot{\varphi}^2 - f(r) = 0 \quad \frac{d}{dt}\,(m\,r^2\dot{\varphi}) = 0 \tag{20}$$

Ekuacionin e dytë mund ta integrojmë menjëherë. Fitojmë:

$$m\,r^2\dot{\varphi} = const. = M$$

prej nga:

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{m\,r^2}$$

Do të kemi:

$$\dot{r} = \frac{d}{d\varphi}\,\dot{\varphi} = \frac{M}{m\,r^2}\,\frac{dr}{d\varphi} = -\,\frac{M}{m}\,\frac{dr}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\ddot{r} = -\,\frac{M}{m}\,\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)\dot{\varphi} = -\,\frac{M}{m}\,\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{M}{mr^2} = -\,\frac{M^2}{m^2r^2}\,\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Ekuacioni i parë i (20) do të ketë formën:

$$-\,\frac{M^2}{mr^2}\,\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{M^2}{mr^3} - f(r) = 0$$

Pasi të shumëzojmë me $-\,\dfrac{mr^2}{M^2}$ fitojmë:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\,\frac{mr^2\,f(r)}{M^2} \tag{21}$$

Kjo shprehje njihet si shprehja e Binetit dhe paraqet ekuacionin diferencial të rrugës.

Ekuacionit të rrugës do t'i japim formë integrale. Nga shprehja:

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{mr^2}$$

dhe derivatit të parë sipas kohës:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{M}{mr^2}\frac{dr}{d\varphi}$$

pasi t'i zëvendësojmë në ligjin mbi ruajtjen e energjisë fitojmë:

$$\frac{1}{2}\frac{M^2}{mr^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) = E$$

Pasi t'i ndajmë ndryshoret fitojmë:

$$d\varphi = \frac{M}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}}$$

dhe me integrim fitojmë:

$$\varphi = \int_{r_0}^{r}\frac{M}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} \tag{22}$$

Me ndihmën e formulës (22) shumë lehtë mund t'i përfitojmë rezultatet e fituara në (I.8.) për problem të dy trupave, por atje nuk kemi pasur njohuri nga mekanika e përgjithshme, nuk i kemi njohur ekuacionet e Lagranzhit për lëvizje.

f) Përcaktimi i këndit të përkuljes

Do të vendosim sistemin e koordinatave polare në rrafsh të lëvizjes me qendër të tij në qendër të masës C, kurse për bosht polar do të marrim boshtin e simetrisë. Duke u nisur nga fakti se rruga e shqyrtuar në sistem të masës i përgjigjet lëvizjes së grimcës me masë të reduktuar μ ekuacioni i rrugës sipas (22) do të ketë formën:

$$\varphi = \int_{r_{min}}^{r}\frac{M}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{2\mu[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}}$$

ku r_{min} i përgjigjet pikës më të afërt të rrugës nga qendra e masës. Pika pa mbarim e larguar e rrugës, $r = \infty$ i përgjigjet këndit $\varphi = \psi$. Do të kemi:

$$\psi = \int_{r_{min}}^{\infty}\frac{M}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{2\mu[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} \tag{23}$$

Në vend të konstanteve E dhe M do të paraqesim dy konstante të reja, shpejtësinë e grimcës në pa mbarim v_∞ e cila e ka vlerë $v_\infty = |\vec{v}_{o1}| = |\vec{v}_{o2}|$ dhe parametrin e goditjes ρ i cili definohet si largësi e kalimit të grimcës nga burimi i forcës sikur fusha e forcës të mos vepronte. Këtë e ilustron fig. 42. Pra do të kemi:

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2_\infty, \quad M = \rho\mu v_\infty \tag{24}$$

Zëvendësojmë (24) në (23) dhe fitojmë:

$$\psi = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho\mu v_\infty}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\mu\left[\frac{1}{2}\mu v^2_\infty - U(r)\right] - \frac{\rho^2\mu^2 v^2_\infty}{r^2}}}$$

ose

$$\psi = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu v^2_\infty}}} \tag{25}$$

Nëse e dijmë funksionin e veprimit reciprok të grimcave $U(r)$ si dhe shpejtësinë e grimcës në pa mbarim, atëherë shprehja (25) është e njohur, kurse nga (19) edhe këndi i përkuljes ϑ_o si funksion i parametrit të goditjes. Pra,

$$\vartheta_o = \vartheta(\rho)$$

Për këtë funksion supozojmë se është i njëvlershëm dhe monoton dhe i cili mund të zgjidhet sipas

$$\rho = \rho(\vartheta_o) \tag{26}$$

g) Prerja efikase e shpërhapjes

Më parë shqyrtuam përkuljen e një grimce në fushë qendrore të grimcës tjetër, por në problemet fizike zakonisht kemi të bëjmë me shpërhapjen e tufës së grimcave paralele të cilat arrijnë me të njëjtën shpejtësi. Në këtë rast grimcat e ndryshme në tufë do të kenë parametra të ndryshëm të goditjes, por edhe përkulen me kënde të ndryshme.

Do të shënojmë me n numrin e grimcave në tufë homogjene, kurse me dN numrin e grimcave të shpërhapura në njësi të kohës, të cilat përkulen për këndin në mes të ϑ_o dhe $\vartheta_o + d\vartheta_o$. Atëherë herësi

$$d\sigma = \frac{dN}{n} \tag{27}$$

quhet prerje efikase diferenciale e shpërhapjes. Shuma e të gjitha këtyre madhësive në të gjitha këndet e mundshme

$$\sigma = \int d\sigma = \int \frac{dN}{n} \tag{28}$$

quhet prerje efikase totale e shpërhapjes dhe përcaktohet nga natyra e veprimit reciprok të grimcave.

Numri i grimcave të cilat përkulen në mes të këndeve ϑ_o dhe $\vartheta_o + d\vartheta_o$ në njësi të kohës në unazën rrethore me rreze ρ dhe $\rho + d\rho$, sa janë parametrat e goditjes do të jetë:

$$dN = 2\pi\rho d\rho \cdot n \tag{29}$$

kurse prerja efikase diferenciale është:

$$d\sigma = \frac{dN}{n} = 2\pi\rho d\rho \tag{30}$$

Pra, prerja efikase diferenciale e shpërhapjes është e barabartë me sipërfaqen e unazës rrethore në mes të ρ dhe $\rho + d\rho$, e cila i përgjigjet intervalit të këndit të përkuljes ϑ_o dhe $\vartheta_o + d\vartheta_o$.

Shprehjen (30) mund ta paraqesim edhe me ndihmën e (26). Do të kemi:

$$d\sigma = 2\pi\rho(\vartheta_o) \frac{d\rho(\vartheta_o)}{d\vartheta_o} d\vartheta_o \tag{31}$$

Këndi i ngurtë i cili i përgjigjet intervalit ϑ_o dhe $\vartheta_o + d\vartheta_o$ është:

$$d\Omega = 2\pi \sin\vartheta_o d\vartheta_o$$

kurse (31) merr formën:

$$d\sigma = \frac{\rho(\vartheta_o)\, d\rho(\vartheta_o)}{\sin\vartheta_o d\vartheta_o} d\Omega \tag{32}$$

Kalimi nga këndi ϑ_o të sistemit të stemit laboratorik kryhet me shprehjen (13).

Si shembull të zbatimit të qendrës së masës në këndin ϑ të sishprehjeve (19), (26) dhe (31) do të shqyrtojmë shpërhapjen elastike të sferës së ngurtë në sferë të ngurtë dhe të palëvizshme, fig. 43. Në këtë rast goditja do të shkaktohet

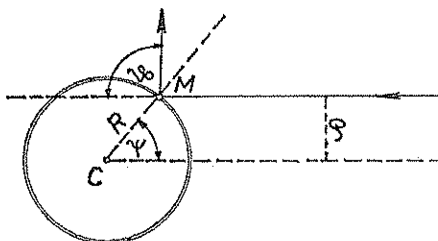


Fig. 43

kur qendra e sferës së lëvizshme gjendet e larguar për R nga qendra e sferës së palëvizshme, ku R është shuma e rrezeve të sferave. Potenciali do të ketë formën:

$$U(r) = \begin{cases} 0 \text{ për } r > R \\ \infty \text{ për } r < R \end{cases}$$

sepse gjatë takimit paraqiten forca dëbuese pa mbarim të mëdha.

Nga figura shohim se vlen

$$\rho = R \sin\psi$$

kurse nga shprehja (19)

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta_o}{2} \tag{33}$$

E zëvendësojmë (33) në shprehjen e mëparshme dhe fitojmë ekuacionin e formës (26):

$$\rho(\vartheta_o) = \rho = R \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta_o}{2}\right) = R \cos\frac{\vartheta_o}{2} \tag{34}$$

Nga shprehja (31) kemi:

$$d\sigma = 2\pi\rho \frac{d\rho}{d\vartheta_o} d\vartheta_o = -\frac{\pi R^2}{2} \sin\vartheta_o d\vartheta_o \tag{35}$$

Nga figura mund të përcaktojmë kufijtë integrimit për të fituar prerjen efikase totale. Sikur $\rho = 0$, sfera e lëvizshme pas goditjes do të kthehej nga ka ardhur, pra $\vartheta_o = \pi$. Në anën tjetër, sikur $\rho = \infty$ sfera e lëvizshme nuk do të goditej fare me sferën e palëvizshme dhe $\vartheta_o = 0$. Duke njohur kufijtë e integrimit për (35) fitojmë:

$$\sigma = -\int_{\pi}^{0} \frac{\pi R^2}{2} \sin\vartheta_o d\vartheta_o = \frac{\pi R^2}{2} \cdot 2$$

ose

$$\sigma = \pi R^2$$

Shohim se prerja efikase totale e shpërhapjes është e barabartë me sipërfaqen e prerjes tërthore kryesore të sferës.

IX. MEKANIKA E TRUPIT TË NGURTË

1. NUMRI I GRADËVE TË LIRISË SË LËVIZJES SË TRUPIT TË NGURTË

Në fillim të kreut të parë kemi cekur se pika materiale paraqet një abstraksion i cili realisht nuk ekziston. Trupat realë përbëhen nga një grumbull shumë i madh i pikave materiale. Vetitë mekanike të tyre varen nga gjendja agregate. Ne do të njihemi me vetitë mekanike të trupave të gjendjes agregate të ngurtë. Këta trupa nën veprimin e forcës lëvizin si tërësi. Në këtë rast ata nuk ndërrojnë formën, por ndodh që gjatë lëvizjes edhe të ndërrojnë formën dhe të deformohen. Për thjeshtësim të teorisë, do të kufizohemi, në atë lëvizje të trupave të ngurtë te të cilët nuk paraqitet deformimi i trupave, apo edhe nëse paraqitet, ato janë aq të vogla sa që mund të mos përfillen. Kësisoji në këtë pjesë do të shqyrtojmë dinamikën e trupave të ngurtë. Me trup të ngurtë kuptojmë atë trup i cili vazhdimisht ruan të njëjtën formë e që shprehet me faktin se largësia reciproke në mes të dy pikave arbitrare të tij mbetet e pandryshuar.

Pozita e trupit të këtillë plotësisht përcaktohet me 6 të dhëna numerike, prandaj themi se trupi i ngurtë i ka 6 gradë lirije të lëvizjes. Se kjo me të vërtetë është kësisoji mund të tregojmë me shqyrtimin vijues. Që ta fiksojmë pozitën e trupit të ngurtë në hapësirë duhet t'i dijmë tri pika të tij. Çdonjëra prej tyre përcaktohet me tri koordinata. Pra tërësisht i kemi 9 numra. Por këta numra nuk janë plotësisht të pavarur. Ata janë të lidhur me tri formula të cilat shprehin faktin se largësitë në mes pikave janë të pandryshuara. Meqë në mes të tri pikave ekzistojnë tri largësi reciproke, kuptojmë se ekzistojnë tri formula të këtilla. Por nëse 9 numra janë të lidhur me tri formula, atëherë vetëm 6 prej tyre janë të pavarur dhe kësisoji shpjegohet pse pozita e trupit të ngurtë përcaktohet me 6 të dhëna numerike.

Zgjidhja e problemit mekanik i cili varet prej 6 ndryshoreve është e vështirë, prandaj për fillim do të shqyrtojmë rastet më të thjeshta. Së pari do të supozojmë se dy pika të trupit të ngurtë janë të përforcuara asisoji që nuk mund të lëvizin. Këto dy pika e përcaktojnë drejtimin i cili është i palëvizshëm. Ky drejtim quhet bosht i trupit të ngurtë dhe themi se trupin e kemi përforcuar gjatë një boshti. Në këtë mënyrë numri i gradëve të lirisë së lëvizjes është zvogëluar. Në të vërtetë nga 9 koordinata të tri pikave të cilat përcaktojnë pozitën e trupit të ngurtë 6 janë shndërruar në të palëvizshme, prandaj kanë

ngelur vetëm tri. Këto janë koordinatat e pikës së tretë e cila nuk është e përforcuar. Duhet cekur se kanë ngelur edhe dy kondita, prandaj është e qartë se trupi i tillë e ka vetëm një gradë lirije të lëvizjes.

Trupi i ngurtë rreth boshtit të përforcuar mund të kryejë vetëm lëvizje rrotulluese kështu që çdo pikë e tij kryen lëvizje rrethore në rrafsh i cili qëndron normal ndaj boshtit të rrotullimit. Gjatë këtij rrotullimi çdo pikë e trupit për të njëjtën kohë rrotullohet rreth atij boshti.

2. RROTULLIMI I TRUPIT TË NGURTË RRETH BOSHTIT TË PËRFORCUAR

Pozitën e trupit të ngurtë gjatë rrotullimit rreth boshtit të dhënë matematikisht mund ta shprehim me ndihmën e këndit φ për të cilin trupi rrotullohet. Këtë kënd e përcaktojmë ashtu që në trup i cili rrotullohet e fiksojmë një rrafsh i cili kalon nëpër bosht të rrotullimit dhe e masim këndin e rrotullimit të këtij rrafshi.

Ky kënd i rrotullimit të trupit ndërron gjatë kohës, prandaj duhet menduar se varet nga koha në mënyrë funksionale

$$\varphi = \varphi(t) \tag{2}$$

Derivati i këtij funksioni sipas kohës

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \omega \tag{2}$$

paraqet shpejtësinë e ndërrimit të këtij këndi. Do ta quajmë shpejtësi këndore të rrotullimit të trupit. Derivati i dytë i saj

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} = \dot{\omega} = \alpha \tag{3}$$

ka karakter nxitimi te lëvizjet rrotulluese, prandaj e quajmë nxitim këndor.

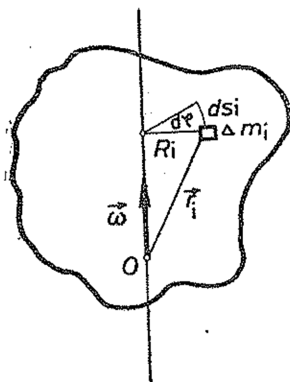


Fig. 44

Të mendojmë se trupin e ngurtë e kemi ndarë në elemente të vogla të vëllimit. Le të jetë Δm_i masa e cila gjendet në elementin e i-të të vëllimit. Pozita e këtij elementi përcaktohet me vektorin $\vec{r}_i$ i cili përcaktohet duke filluar nga një pikë fillestare arbitrare O e cila gjendet në bosht të rrotullimit. Largësia e elementit të masës nga ky bosht është R_i. Për një kohë të shkurtër rrafshi të cilin e përcakton elementi i masës Δm_i dhe boshti i rrotullimit, rrotullohet për këndin $d\varphi$, kurse elementi do të kalojë rrugën ds_i nëpër harkun rrethor me rreze R_i (fig. 44). Ky hark është i barabartë me

$$ds_i = R_i d\varphi \tag{4}$$

kurse nga (2) kemi:

$$d\varphi = \omega dt$$

Kur e zëvendësojmë në (4) fitojmë:

$$ds_i = R_i \omega dt$$

kurse shpejtësia e lëvizjes së këtij elementi do të jetë:

$$v_i = \frac{ds_i}{dt} = R_i \omega \qquad (5)$$

Kjo është lidhja në mes të shpejtësisë periferike dhe këndore. Përderisa tërë trupi gjatë rrotullimit e ka shpejtësinë këndore ω çdo element i tij e ka shpejtësinë periferike proprocionale me largësinë nga boshti i rrotullimit.

Formulës (5) mund t'i japim edhe formë vektoriale. Nga figura shohim se vlen:

$$R_i = r_i \cdot \sin\alpha_i \qquad (6)$$

ku α_i është këndi të cilin e mbyll vektori i pozitës $\vec{r}_i$ me boshtin e rrotullimit. Atëherë (5) kalon në

$$v_i = r_i \omega \sin\alpha_i \qquad (7)$$

Në anën e djathtë gjendet intensiteti i vektorit të pozitës $\vec{r}_i$ dhe një vektori i cili e ka kahun e boshtit të rrotullimit. Meqë shpejtësia periferike qëndron normal në rrafshin të cilin e përcaktojnë vektori $\vec{r}_i$ dhe boshti i rrotullimit është mirë që shpejtësinë këndore ta definojmë si vektor i cili qëndron në boshtin e rrotullimit e ka intensitetin e shpejtësisë këndore dhe është i shoqëruar me kahun e rrotullimit sipas rregullës së dorës së djathtë. Në këtë rast formulën (7) mund ta shkruajmë kësisoji:

$$\vec{v}_i = \omega \times \vec{r}_i \qquad (8)$$

Do të përcaktojmë energjinë kinetike të rrotullimit të trupit të ngurtë. Këtë e gjejmë si shumë të energjive kinetike të të gjitha elementeve të masës së tij. Pra,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i v_i^2$$

E zëvendësojmë (5) në shprehje të fundit:

$$T = \frac{1}{2}\,\omega^2 \sum_{i=1}^{n} R_i^2 \triangle m_i$$

Që të fitojmë vlerën e saktë të kësaj energjie duhet të kryejmë kalimin kufitar për $n \to \infty$. Atëherë shuma kalon në integral dhe do të kemi:

$$T = \frac{1}{2}\,\omega^2 \int R^2\,dm \tag{9}$$

Integrali

$$J = \int R^2\,dm \tag{10}$$

paraqet skalar i cili varet prej masës së trupit dhe shpërndarjes së saj rreth boshtit të rrotullimit. Quhet moment i inercionit të trupit.

Duke shfrytëzuar simbolin (10), formulën (9) mund ta shkruajmë në formën:

$$T = \frac{1}{2}\,J\,\omega^2 \tag{11}$$

Shohim se energjia kinetike te lëvizjet rrotulluese është e barabartë me katrorin e shpejtësisë këndore.

Te lëvizjet rrotulluese mund të definojmë momentin e sasisë së lëvizjes si shumë vektoriale të të gjitha momenteve të elementeve të masës së atij trupi. Pra,

$$\vec{L} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i \tag{12}$$

ku është:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{v}_i \triangle m_i$$

Intensiteti i këtij momenti është:

$$L_i = r_i v_i \triangle m_i \sin\alpha_i$$

dhe nga (5) e (6) fitojmë

$$L_i = R_i^2 \omega \triangle m_i$$

E zëvendësojmë këtë në (12)

$$L = \omega \int R^2\,dm$$

kurse nga (10)

$$L = J\omega \tag{13}$$

Kjo është formula për intensitetin e momentit të sasisë së lëvizjes te rrotullimi rreth boshtit të përforcuar. Meqë, kahu i vektorit të këtij momenti, sipas $\vec{r_i} \times \vec{v_i}$ për të gjitha elementet e vëllimit, përputhet me kahun e boshtit të rrotullimit, rrjedh se vektorët $\vec{L}$ dhe $\vec{\omega}$ e kanë të njëjtin kah dhe mund të shkruajmë

$$\vec{L} = J\vec{\omega} \tag{13a}$$

Do të supozojmë se në trup të ngurtë vepron forca. Atëherë momenti i forcës e cila vepron në elementin e i-të është:

$$\vec{M_i} = \vec{r_i} \times \vec{F_i}$$

kurse intensiteti i këtij vektori është:

$$M_i = r_i F_i \sin\alpha_j = R_i F_i$$

Pasi është:

$$F_i \triangle m_i \ddot{s}_i = \ddot{\varphi} R_i \triangle m_i$$

rrjedh

$$M_i = \ddot{\varphi} R_i^2 \triangle m_i$$

Këto mund t'i mbledhim nëpër të gjitha elementet e vëllimit të trupit dhe të kërkojmë kalimin kufitar kur numri i elementeve tenton në pambarim. Do të fitojmë:

$$M = \ddot{\varphi} \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} R_i^2 \triangle m_i = \ddot{\varphi} \int R^2 dm$$

dhe përfundimisht duke shfrytëzuar formulën (10) fitojmë:

$$M = J\ddot{\varphi} = J\alpha \tag{14}$$

Kur t'i krahasojmë formulat e fituara (11), (13) dhe (14) me formula përkatëse për lëvizjen translatore të trupit të ngurtë shohim se janë plotësisht të ngjashme. Çdonjërës madhësi te lëvizjet translatore i përgjigjet madhësia analoge te lëvizjet rrotulluese rreth boshtit të përforcuar. Që të bëjmë pasqyrim më të qartë të këtyre madhësive të shikojmë tabelën vijuese:

Tabela I

Lëvizja translatore		Lëvizja rrotulluese	
Rruga	s	Këndi i rotullimit	φ
Shpejtësia	$v = \dot{s}$	Shpejtësia këndore	$\omega = \dot{\varphi}$
Nxitimi	$a = \ddot{s}$	Nxitimi këndor	$\alpha = \ddot{\varphi}$
Masa	m	Momenti i inercionit	$J = \int R^2 dm$
Forca	$f = ma$	Momenti i forcës	$M = J\alpha$
Sasia e lëvizjes	$p = mv$	Momenti i sasisë së lëviz.	$L = J\omega$
Energjia kinetike	$T = \frac{1}{2} mv^2$	Energjia kinetike	$T = \frac{1}{2} J\omega^2$

3. TEOREMA E SHTAJNERIT

Te rrotullimi i trupit të ngurtë rreth boshtit të përforcuar paraqitet momenti i inercionit të trupit i shprehur në formën:

$$J = \int R^2\, dm \tag{1}$$

ku R paraqet largësinë e elementit të masës nga boshti i rrotullimit. Është e qartë se ky moment varet nga shpërndarja e masës së trupit të ngurtë rreth boshtit të rrotullimit. Për këtë arsye momenti i inercionit të trupit të ngurtë varet nga pozita e boshtit në të. Pra, nëse në trup zhvendoset boshti i rrotullimit, atëherë për të njëjtin do të fitojmë tjetër moment të inercionit.

Në fillim do t'i krahasojmë momentet e inercionit të trupti të ngurtë për boshtet paralele të rrotullimit. Këto momente për boshte paralele i lidh një shprehje matematike e cila quhet teorema e Shtajnerit të cilën do ta përfitojmë.

Në fig. 45 është paraqitur prerja e trupit të ngurtë normalisht ndaj boshtit të rrotullimit. Boshti kalon nëpër pikën P. Do ta vendosim qendrën e sistemit koordinat në qendër të masës së trupit. Atëherë pozitën e boshtit të rrotullimit, përkatësisht pikën P e përcakton vektori i pozitës së tij $\vec{s}$. Trupin e ngurtë e ndajmë në elemente të vogla të masës dhe shqyrtojmë elementin dm i cili është i përcaktuar me vektorin e pozitës së vet $\vec{r}$. Pozita e këtij elementi nga boshti i rrotullimit përcaktohet me vektorin $\vec{R}$. Nga fig. shohim se vlen:

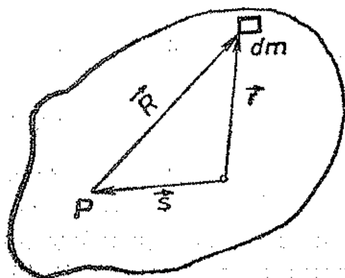


Fig. 45

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{s} \tag{2}$$

Për ta zëvendësuar në (1) duhet ta ngrisim në katror

$$R^2 = r^2 + s^2 - 2\vec{r}\vec{s}$$

dhe fitojmë:

$$J = \int r^2 dm + s^2 \int dm - 2\vec{s} \int \vec{r}\, dm \tag{3}$$

Anëtari i parë paraqet momentin e inercionit të trupit ndaj boshtit i cili kalon nëpër qendër të masës së trupit.

$$J_q = \int r^2\, dm$$

Në anëtarin e dytë integrali është i barabartë me masën e trupit

$$\int dm = m$$

kurse në të tretin paraqitet integrali

$$\int \vec{r}\, dm$$

i cili kur pjesëtohet me masën përcakton vektorin e pozitës së qendrës së masës. Prandaj mund të shkruajmë:

$$\int \vec{r}\, dm = m\,\vec{r}_q$$

Por meqë origjinën e sistemit koordinat e kemi vendosur mu në këtë qendër, duhet të vlejë:

$$\vec{r}_q = 0$$

Nga kjo ka ngelur vetëm shprehja:

$$J = J_q + m\, s^2$$

e cila paraqet teoremën e Shtajnerit.

4. RROTULLIMI I CILINDRIT HOMOGJEN NËPËR RRAFSH TË PJERRËT

Do të shqyrtojmë një problem konkret të rrotullimit të trupit të ngurtë. Kështu, do të marrim lëvizjen e cilindrit homogjen kur rrotullohet pa rrëshqitje nëpër rrafsh të pjerrët. Një pozitë të tij e tregon fig. 46. Le të jetë R rrezja e cilindrit, kurse φ këndi të cilin e mbyll

rrezja e takimit të cilindrit me rrafshin horizontal. Këndi i pjerrësisë është α. Qendra e rëndimit të cilindrit gjendet në boshtin e tij. Gjatë rrotullimit të tij qendra e rëndimit kryen lëvizje translatore nëpër rrafsh të pjerrët. Do ta shënojmë me s rrugën të cilën në këtë rast e kalon kjo qendër. Pasi kemi të bëjmë me veprimin e forcës së rëndimit e cila është konservative, duhet të vlejë ligji i ruajtjes së energjisë mekanike. Cilindri në të njëjtën kohë kryen lëvizje translatore dhe rrotulluese. Prandaj do të ketë dy energji: energjinë kinetike të rrotullimit:

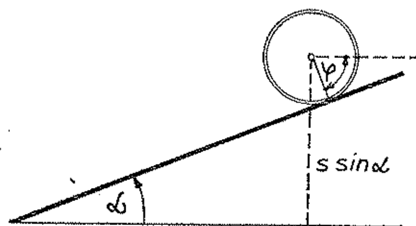


Fig. 46

$$T_r = \frac{1}{2} J\dot{\varphi}^2$$

dhe energjinë kinetike të translacionit,

$$T_t = \frac{1}{2} m \dot{s}^2$$

Energjia potenciale e tij shprehet në formën

$$U = m g s \sin\alpha$$

Kurse ligji mbi ruajtjen e energjisë na jep:

$$\frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} J\dot{\varphi}^2 + m g s \sin\alpha = E \qquad (1)$$

Lidhja në mes të shpejtësisë periferike dhe këndore shprehet me

$$\dot{s} = R\dot{\varphi} \qquad (2)$$

E eliminojmë $\dot{\varphi}$ në (1) dhe fitojmë:

$$(m + J/R^2)\, \dot{s}^2 + 2m g s \sin\alpha = 2E$$

Derivati sipas kohës na jep:

$$(m + J/R^2)\, 2 \dot{s} \ddot{s} + 2 m g \dot{s} \sin\alpha = 0$$

kurse nxitimin e qendrës së rëndimit e shpreh formula:

$$\ddot{s} = - \frac{m}{m+J/R^2} g \sin\alpha \qquad (3)$$

Nëse supozojmë se qendra e rëndimit nuk ka pasur shpejtësi fillestare të translacionit, atëherë me integrimin e (3) fitojmë shpejtësinë e saj:

$$\dot{s} = -\frac{m}{m+J/R^2}\, g \sin\alpha \cdot t \qquad (4)$$

Duke integruar edhe një herë fitojmë rrugën e qendrës së rëndimit të cilindrit gjatë translacionit:

$$s = -\frac{m}{2(m + J/R^2)}\, g \sin\alpha \cdot t^2 \qquad (5)$$

Shprehjet (3), (4) dhe (5) tregojnë se lëvizja translatore e qendrës së rëndimit të cilindrit është lëvizje njëtrajtësisht e nxituar me nxitim (3). Sikur cilindri të rrëshqite nëpër rrafsh të pjerrët, translacioni i tij do të kishte nxitimin:

$$\ddot{s} = -g \sin\alpha$$

prej nga shohim se nxitimi i rrotullimit është më i vogël, sepse faktori

$$m/(m + J/R^2) < 1$$

Shpejtësia këndore $\dot{\varphi}$ e lëvizjes rrotulluese rrjedh nga (2)

$$\dot{\varphi} = -\frac{m}{m+J/R^2}\,\frac{g}{R} \sin\alpha \cdot t \qquad (6)$$

kurse këndi i rrotullimit:

$$\varphi = -\frac{m}{m+J/R^2}\,\frac{g}{2R} \sin\alpha \cdot t^2 \qquad (7)$$

Ky njehsim vlen si për cilindër të mbushur, ashtu edhe për cilindër të zbrazët në brendësi. Ndryshimi paraqitet vetëm në momentet e tyre të inercionit. Kur të kryhet njehsimi sipas formulës (IX.2.10), për cilindër të mbushur fitohet kjo formulë e momentit të inercionit:

$$J = \frac{1}{2}\, m R^2$$

kurse për cilindër të zbrazët në brendësi

$$J = m R^2$$

Në mënyrë të ngjashme fitojmë edhe për rrotullimin e sferës. Në këtë rast ajo do të rrotullohet rreth boshtit horizontal i cili kalon nëpër qendër të saj, kurse për moment të inercionit kemi:

$$J = \frac{2}{5}\, m R^2$$

Në fund duhet theksuar se ky eksperiment ka rëndësi historike, sepse me ndihmën e tij Galileu i ka zbuluar ligjet e lëvizjeve të njëtrajtshme të nxituara.

5. OSHILIMET RROTULLUESE

Supozojmë se trupi i ngurtë mund të rrotullohet rreth një boshti të përforcuar dhe për një pozitë të tij në të nuk vepron momenti i forcës. Këtë pozitë e quajmë pozitë ekuilibruese të trupit. Supozojmë gjithashtu se gjatë rrotullimit për një kënd φ në të vepron momenti i forcës i cili është proporcional me këndin e rrotullimit dhe ka aso kahu që trupin e kthen kah pozita ekuilibruese. Atëherë mund të shkruajmë:

$$M = - D\varphi \tag{1}$$

Këtu me D e kemi shënuar atë moment të forcës i cili vepron në trup kur rrotullimi i tij është një njësi. Ky moment quhet moment i direkcionit. Nga formula (IX.2.14) dhe (1) fitojmë:

$$\ddot{\varphi} + \frac{D}{J}\varphi = 0 \tag{2}$$

Shënojmë shkurtimisht:

$$\frac{D}{J} + \omega_o^2 \tag{3}$$

dhe fitojmë ekuacionin diferencial:

$$\ddot{\varphi} + \omega_o^2\varphi = 0 \tag{4}$$

Zgjidhja e këtij ekuacioni është e njohur nga teoria e oshilimeve, prandaj do të kemi:

$$\varphi = \varphi_o \sin(\omega_o t + \delta) \tag{5}$$

Shohim se këndi i rrotullimit ndërron sipas ligjit të sinus funksionit që do të thotë se trupi rrotullohet në mes të këndeve maksimale φ dhe $-\varphi$ të cilat paraqesin amplitudat e rrotullimit. Meqenëse φ ndërron sipas të njëjtit ligj, sikurse elongacioni te oshilimet harmonike këte lëvizje mund ta mendojmë si lëvizje oshiluese të rrotullimit. Frekuenca ciklike e këtyre oshilimeve përcaktohet me formulën (3), kurse perioda e oshilimeve rrotulluese do të jetë:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \tag{6}$$

Oshilimet e fituara quhen oshilime të pashuara, sepse kemi supozuar që në trup vepron vetëm momenti i direkcionit. Zakonisht trupat lëkunden në ndonjë mjedis rezistues. Ky mjedis do të veprojë me një moment të rezistencës dhe është proporcional me shpejtësinë këndore të trupit. Pra,

$$M_o = - R\dot{\varphi} \tag{7}$$

Këtu me R e kemi shënuar një konstante specifike të mjedisit e cila quhet moment i rezistencës. Për oshilime të këtilla vlen ekuacioni diferencial:

$$J\ddot{\varphi} = - R\dot{\varphi} - D\varphi \tag{8}$$

ose

$$\ddot{\varphi} + \frac{R}{J}\dot{\varphi} + \frac{D}{J}\varphi = 0 \tag{9}$$

Ky ekuacion është plotësisht i ngjashëm me ekuacionin e lëvizjes te oshilimet e shuara. Duke shënuar edhe këtu shkurtimisht me

$$\frac{D}{J} = \omega_o^2, \quad \frac{R}{J} = 2b$$

fitojmë zgjidhjen:

$$\varphi = \varphi_o e^{-bt} \sin(\omega_o t + \delta) \tag{10}$$

është e qartë se edhe në këtë rast oshilimet sistematikisht zvogëlohen, pra shuhen gjatë kohës.

Këso oshilimesh rrotulluese shfrytëzojnë orët e xhepit dhe të dorës si rregullues të rrahjeve të barabarta kohore. Meqë rezistenca e ajrit është mjaft e vogël oshilimet në to janë gati të pashuara.

6. LAVJERRËSI FIZIK

Lavjerrës fizik quajmë trupin e ngurtë i cili mund të rrotullohet rreth një boshti horizontal nën veprimin e forcës së rëndimit. Supozojmë se boshti i rrotullimit është i larguar për s nga qendra e rëndimit të trupit, (fig. 47). Si forcë e cila vepron në trup është pesha e tij dhe ajo vepron në qendër të rëndimit. Kjo forcë ndaj boshtit të rrotullimit, sikurse shihet nga figura e ka intensitetin e momentit të forcës:

$$M = |\vec{s} \times m\vec{g}| = - mg\, s \sin\varphi \tag{1}$$

Duhet të shkruhet parashenja minus sepse momenti i forcës ka kah të kundërt të zmadhimit të këndit φ. Sipas formulës (IX.2.14) mund të shkruajmë:

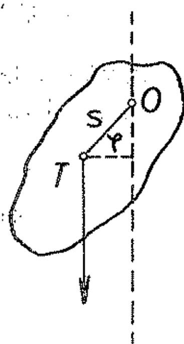


Fig. 47

$$J \ddot{\varphi} = - mgs \sin\varphi$$

ose

$$\ddot{\varphi} = - \frac{mgs}{J} \sin\varphi \tag{2}$$

Nëse shkruajmë shkurtimisht

$$l = \frac{J}{ms} \tag{3}$$

fitojmë ekuacionin diferencial:

$$\ddot{\varphi} = - \frac{g}{l} \sin\varphi \tag{4}$$

të cilin e kemi përfituar te lavjerrësi matematik. Prandaj mund të përfundojmë se lavjerrësi fizik lëvizë plotësisht njësoj sikurse ndonjë lavjerrës matematik i cili e ka gjatësinë e perit (3). Gjatësia (3) quhet gjatësi e reduktuar e lavjerrësit fizik.

Kur vlerën (3) e zëvendësojmë në formulën për periodën e oshilimeve të lavjerrësit matematik fitojmë periodën e oshilimeve të lavjerrësit fizik:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgs}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \ldots \right] \tag{5}$$

ku me α e kemi shënuar amplitudën e oshilimeve të lavjerrësit.

Frekuencën ciklike të oshilimeve të lavjerrësit në përafrimin e parë e fitojmë gjithashtu nga formula përkatëse e lavjerrësit matematik:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{mgs}{J}} \tag{6}$$

Pasi boshti i rrotullimit nuk kalon nëpër qendër të rëndimit të trupit, momenti i inercionit në (6) duhet të shprehet me ndihmën e teoremës së Shtajnerit

$$J = J_q + ms^2$$

ku me J_q e kemi shënuar momentin e inercionit ndaj boshtit paralel i cili kalon nëpër qendër të rëndimit të trupit. E zëvendësojmë në (6):

$$\omega_o = \sqrt{\frac{mgs}{J_q + ms^2}} \tag{7}$$

Nga kjo shprehje mund të njehsojmë atë largësi të qendrës nga boshti i rrotullimit për të cilën lavjerrësi do të ketë frekuencën ω_o. E ngrisim në katror dhe e zgjidhim sipas s shprehjen (7). Fitojmë ekuacionin:

$$s^2 - \frac{g}{\omega_o^2} + s\frac{J}{m} = 0$$

i cili i ka dy zgjidhje:

$$s_{1,2} = \frac{g}{2\omega_o^2} \pm \sqrt{\frac{g^2}{4\omega_o^4} - \frac{J}{m}} \tag{8}$$

Pra, ekzistojnë dy boshte për të cilat lavjerrësi do të lëkundet me frekuencën ω_o. Këto boshte gjenden në një drejtim i cili kalon nëpër qendër të trupit, por në anë të kundërta të saj. Largësia e tyre reciproke

$$s_1 + s_2 = \frac{g}{\omega_o^2} = l \tag{9}$$

Lavjerrësi fizik me dy boshte të zgjedhura asisoji që periodat e lëkundjes të jenë të barabarta quhet lavjerrës reverzibil. Largësia në mes të boshteve është gjatësia e reduktuar e lavjerrësit. Lavjerrësi i këtillë shfrytëzohet për përcaktimin e saktë të nxitimit të rëndimit të Tokës.

7. MOMENTET E INERCIONIT

Momentet e inercionit i kemi definuar me formulën (IX.2.10). Duke shfrytëzuar teoremën e Shtajnerit momentet e inercionit për ndonjë bosht mund të njehsohen si momente të inercionit të boshtit paralel i cili kalon nëpër qendër të rëndimit të trupit. Prandaj është e nevojshme të shqyrtohen momentet e inercionit për boshte të këtilla, për boshte të cilat kalojnë nëpër qendër të rëndimit.

Supozojmë se ky bosht ka pozitë arbitrare në hapësirë dhe kahu i tij përcaktohet me vektorin unitar $\vec{c}$. Ky vektor me boshtet e sistemit koordinat kënddrejt x, y, dhe z me origjinë në qendër të rëndimit të trupit mbyll këndet α, β dhe γ. Komponentet e këtij vektori janë (fig. 48):

$$c = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$$

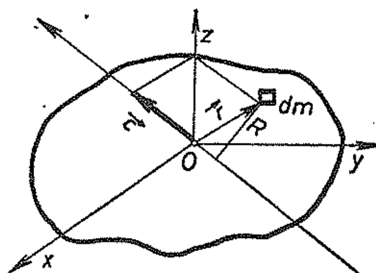


Fig. 48

Largësia e elementit arbitrar të masës

dm nga boshti i rrotullimit është shënuar me R dhe është e barabartë me lartësinë e paralelogramit të cilin e përcaktojnë vektori i pozitës $\vec{r}$ me vektorin $\vec{c}$. Nga kjo mund të të shkruajmë:

$$R = |\vec{r} \times \vec{c}|$$

dhe për moment të inercionit rreth boshtit të shqyrtuar e kemi formulën:

$$J = \int R^2 \, dm = \int (\vec{r} \times \vec{c})^2 \, dm \tag{1}$$

E zbërthejmë prodhimin vektorial në komponente të veta

$$\vec{r} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = \vec{i}(y\cos\alpha - z\cos\beta) + \\ + \vec{j}(z\cos\alpha - x\cos\gamma) + \\ + \vec{k}(x\cos\beta - y\cos\alpha)$$

Pasi të ngrisim në katror dhe të zëvendësojmë në (1) fitojmë:

$$J = \int (y^2 + z^2)\cos^2\alpha \, dm + \int (z^2 + x^2)\cos^2\beta \, dm + \int (x^2 + y^2)\cos^2\gamma \, dm$$

$$- 2\int uz\cos\beta \, dm - 2\int zx\cos\gamma\cos\alpha \, dm - 2\int xy\cos\alpha\cos\beta \, dm \tag{2}$$

Shohim se momenti i inercionit është funksion katror i kosinuseve të kaheve të boshteve të rrotullimit.

Integralet:

$$J_{xx} = \int (y^2 + z^2) \, dm$$

$$J_{yy} = \int (z^2 + x^2) \, dm \tag{3}$$

$$J_{zz} = \int (x^2 + y^2) \, dm$$

paraqesin momentet e inercionit për rrotullim rreth boshteve të koordinatave, sepse për rrotullim rreth boshtit $x : R_x^2 = y^2 + z^2$ dhe në mënyrë të ngjashme për boshtet tjera.

Integralet të cilat paraqiten në tre anëtarët tjerë i shënojmë në formën:

$$J_{xy} = \int xy \, dm$$

$$J_{yz} = \int yz \, dm \tag{4}$$

$$J_{zx} = \int zx \, dm$$

dhe quhen momente të deviacionit. Duke shfrytëzuar këto simbole, formulën (2) mund ta shënojmë kësisoji:

$$J = J_{xx} \cos^2\alpha + J_{yy} \cos^2\beta + J_{zz} \cos^2\gamma - 2J_{xy} \cos\alpha \cos\beta -$$

$$- 2J_{yz} \cos\beta \cos\gamma - 2J_{zx} \cos\gamma \cos\alpha \qquad (5)$$

Në këtë mënyrë është përcaktuar momenti i inercionit për rrotullim rreth çfarëdo boshti i cili kalon nëpër qendër të rëndimit të trupit të ngurtë.

Formulën e fituar (5) mund ta shkruajmë shkurtimisht duke shfrytëzuar algjebrën e matricave.

Në matematikë si matricë katrore definohet sistemi i numrave i cili mund të renditet në një skemë katrore siç vijon:

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Kjo matricë i ka tri rende dhe tri shtylla dhe të tillat më së shpeshti përdorën në njehsimet fizike. Matrica quhet simetrike nëse vlen

$$a_{ik} = a_{ki}$$

pra kur elementet të cilat qëndrojnë simetrikisht ndaj diagonales kryesore në mes veti janë të barabartë. Në këtë rast matrica me tri rende dhe tri shtylla në vend të nëntë elementeve përcaktohet me gjashtë. Në formulën (5) paraqiten plotësisht gjashtë integrale prandaj mund t'i shpërndajmë si elemente të një matrice simetrike katrore. Do të ketë formën:

$$[J] = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Madhësitë fizike të ciat mund të paraqiten matematikisht me ndihmën e matricave katrore quhen tenzorë. Prandaj shohim se momenti i inercionit është madhësi e cila ka karakter tenzorial, e quajmë tenzor të inercionit. Matrica (6) tregon se elementet e diagonales së tenzorit të inercionit janë të barabarta me momentet e inercionit rreth boshteve të koordinatave kurse elementet tjerë paraqesin momentet negative të devijacionit.

Nëse dëshirojmë që formulën (5) ta shprehim me njehsimin matrisor duhet që edhe vektorin c ta definojmë në formë të matricës në formën si vijon,

$$\vec{c}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \cos\beta\\ \cos\gamma\end{pmatrix} \tag{7}$$

si matricë me një shtyllë.

Çdo matricë mund të transponohet. Matrica e transponuar e matricës së dhënë fitohet duke i shndërruar rendet në shtylla dhe anasjelltas. Matricën e transponuar të ndonjë matrice $[A]$ e shënojmë në formën $[\tilde{A}]$. Prandaj matrica e transponuar e vektorit $\vec{c}$ është:

$$\tilde{\vec{c}} = (\cos\alpha \;\; \cos\beta \;\; \cos\gamma) \tag{8}$$

kemi fituar matricë me një rend.

Rregulla e prodhimit të dy matricave definohet ashtu që elementi i matricës së prodhimit me indeks kn fitohet kur me radhë i shumëzojmë elementet përkatëse të rendit të k-të të matricës së parë me elementet përkatëse të shtyllës së n-të të matricës së dytë dhe pastaj këto prodhimet mblidhen. Kjo rregull shprehet në formën:

$$(AB)_{kn} = \sum_{j=1}^{3} a_{kj}\, b_{jn} \tag{9}$$

Sipas kësaj rregulle është:

$$[J]\,\vec{c} = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz}\\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz}\\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \cos\beta\\ \cos\gamma\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} J_{xx}\cos\alpha - J_{xy}\cos\beta - J_{xz}\cos\gamma\\ -J_{xy}\cos\alpha + J_{yy}\cos\beta - J_{yz}\cos\gamma\\ -J_{xz}\cos\alpha - J_{yz}\cos\beta + J_{zz}\cos\gamma\end{pmatrix} \tag{10}$$

Shohim se me këtë shumëzim kemi fituar vektor. Që të fitojmë skalar duhet shumëzuar edhe një herë me $\tilde{\vec{c}}$. Pra,

$$\tilde{\vec{c}}\,[J]\,\vec{c} = (\cos\alpha \;\; \cos\beta \;\; \cos\gamma)\begin{pmatrix} J_{xx}\cos\alpha - J_{xy}\cos\beta - J_{xz}\cos\gamma\\ -J_{xy}\cos\alpha + J_{yy}\cos\beta - J_{yz}\cos\gamma\\ -J_{xz}\cos\alpha - J_{yz}\cos\beta + J_{zz}\cos\gamma\end{pmatrix}$$

Pasi t'i shumëzojmë këto matrica fitojmë:

$$\tilde{\vec{c}}\,[J]\,\vec{c} = J_{xx}\cos^2\alpha - J_{xy}\cos\alpha\cos\beta - J_{xz}\cos\alpha\cos\gamma -$$

$$- J_{xy}\cos\alpha\cos\beta + J_{yy}\cos^2\beta - J_{yz}\cos\beta\cos\gamma - J_{xz}\cos\alpha\cos\gamma -$$

$$- J_{yz}\cos\beta\cos\gamma + J_{zz}\cos^2\gamma =$$

$$= J_{xx}\cos^2\alpha + J_{yy}\cos^2\beta + J_{zz}\cos^2\gamma - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta -$$

$$- 2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2J_{xz}\cos\alpha\cos\gamma$$

plotësisht formulën (5). Prandaj këtë formulë me ndihmën e matricave e shkruajmë kësisoji:

$$J = \tilde{\vec{c}}\,[J]\,\vec{c} \tag{11}$$

Pasi tenzori i inercionit është simetrik gjeometrikisht mund prezentojmë me një elipsoid. Këtë e kryejmë kësisoji:

Nga qendra e rëndimit në kah të vektorit $\vec{c}$ e bartim gjatësinë $1/\sqrt{J}$. Kështu fitojmë pikën për të cilën katrori i largësisë nga qendra e rëndimit $r^2 = J^{-1}$, është i barabartë me vlerën reciproke të momentit të inercionit për rrotullim të trupit rreth boshtit të orientuar kësisoji. Nëse këtë e kryejmë për të gjitha kahet, atëherë të gjitha pikat e fituara duhet të qëndrojnë në një sipërfaqe. Do të përcaktojmë çfarë është kjo sipërfaqe. Pika i ka këto koordinata:

$$x = r\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{J}}\cos\alpha$$

$$y = r\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{J}}\cos\beta$$

$$z = r\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{J}}\cos\gamma$$

prej nga fitojmë:

$$\cos\alpha = x\sqrt{J},\ \cos\beta = y\sqrt{J},\ \cos\gamma = z\sqrt{J}$$

Pasi të zëvendësojmë në (5) dhe të pjesëtojmë me J fitojmë ekuacionin e sipërfaqes së kërkuar. E ka formën:

$$J_{xx}\,y^2 + J_{yy}\,y^2 + J_{zz}\,z^2 - 2J_{xy}\,xy - 2J_{yz}\,yz - 2J_{zx}\,zx = 1 \tag{12}$$

Kjo është sipërfaqe e rendit të dytë. Meqë $J \neq 0$, asnjë pikë e saj nuk mund të jetë pa mbarim e larguar, prandaj (12) paraqet sipërfaqe të rendit të dytë, pikat e së cilës nuk janë pa mbarim të larguara. Kjo sipërfaqe mund të jetë vetëm sipërfaqe e elipsoidit. Këtë elipsoid e quajmë elipsoid të inercionit.

Kur nga shpërndarja e dhënë e masave i njehsojmë momentet e inercionit sipas (3) rreth boshteve të koordinatave dhe momentet e deviacionit, atëherë mund të konstruktojmë elipsoidin e inercionit dhe për çdo kah të dhënë mund të masim rrezen e tij.

Fakti se përcaktimi i momentit të inercionit është i shoqëruar me një elipsoid na jep mundësi që llogaritjen ta thjeshtësojmë. Në të vërtetë, e dijmë nga gjeometria analitike se ekuacioni (12) i ka gjashtë anëtarë vetëm pse sistemi i koordinatave nuk është zgjedhë në mënyrë të nevojshme. Sikur boshtet e koordinatave të përputheshin me boshtet e elipsoidit, do të kishim vetëm tre anëtarë. Që të arrihet kjo duhet të kryejmë një rrotullim të sistemit të koordinatave përderisa boshtet e tij të mos përputhen me boshtet e elipsoidit. Atëherë ekuacioni i tij do të ketë formën:

$$J_1X_1^2 + J_2X_2^2 + J_3X_3^2 = 1 \tag{13}$$

Këtu me X_1, X_2, X_3 i kemi shënuar koordinatat e reja të pikave të elipsoidit, kurse J_1, J_2, J_3 janë momentet e inercionit të trupit rreth boshteve të cilat përputhen me boshtet e elipsoidit të inercionit. Prandaj quhen momentet kryesore të inercionit të trupit.

Në formulën (13) nuk paraqiten anëtarët me pordhim të koordinatave e kjo është e mundur vetëm nëse koeficientët e tyre janë të barabartë me zero. Pra duhet të përfundojmë se momentet e deviacionit janë të barabarta me zero në këtë sistem të koordinatave. Tenzori i inercionit në këtë sistem e ka formën:

$$[J] = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Shohim se matrica e tenzorit të inercionit në këtë sistem të koordinatave është matricë diagonale. Kjo përcaktohet vetëm me tri elemente, me momentet kryesore të inercionit të trupit.

Në sistem të boshteve kryesore sipas (5) momenti i inercionit për rrotullim rreth boshtit të përcaktuar me vektorin unitar c do të jetë:

$$J = J_1 \cos^2\alpha_1 + J_2 \cos^2\alpha_2 + J_3 \cos^2\alpha_3 \tag{15}$$

kurse për energji kinetike të përcaktuar nga (IX.2.11) kemi:

$$T = \frac{\omega^2}{2} (J_1 \cos^2\alpha_1 + J_2 \cos^2\alpha_2 + J_3 \cos^2\alpha_3)$$

Komponentet e shpejtësisë këndore të këtij rrotullimi janë:

$$\omega_1 = \omega \cos\alpha_1, \ \omega_2 = \omega \cos\alpha_2, \ \omega_3 = \omega \cos\alpha_3$$

Për energji kinetike fitojmë formulën:

$$T = \frac{1}{2} (J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2) \qquad (16)$$

Shohim se energjia kinetike përbëhet prej tri komponenteve të cilat i kanë kahet e boshteve kryesore.

8. EKUACIONET E OJLERIT

Kalojmë në shqyrtimin e rastit kur në trup të ngurtë është e përforcuar vetëm një pikë. Boshti i rrotullimit duhet të kalojë nëpër këtë pikë, por edhe vetë rrotullohet rreth kësaj pike. Këtë e shohim edhe nga numri i gradëve të lirisë. Pozita e trupit të ngurtë është e përcaktuar me tri pikat e veta, prej të cilave njëra është e përforcuar, kurse dy kanë ngelë të lira. Këto dy pika i kanë gjashtë koordinata. Por, përveç tri pikave ekzistojnë edhe tri shprehje të cilat përmbajnë këto koordinata dhe shprehin pandërrueshmërinë e atyre pikave. Prandaj nga gjashtë ndryshore kanë ngelë vetëm tri të cilat në mes veti janë të pavarura. Prej këndej rrjedh se trupi i ngurtë i përfocuar në një pikë i ka tri gradë lirie të lëvizjes. Njëra prej tyre përcakton këndin e rrotullimit rreth boshtit momental të rrotullimit, kurse dy të tjerat këndet të cilat përcaktojnë pozitën momentale të boshtit të rrotullimit në hapësirë.

Së pari do t'i përcaktojmë komponentet e momentit të sasisë së lëvizjes. E dijmë se momenti i sasisë së lëvizjes për sistem të pikave materiale përcaktohet me formulën:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i$$

Për trup të ngurtë kjo shumë shndërrohet në integral,

$$\vec{L} = \int \vec{r} \times \dot{\vec{r}}\, dm \qquad (1)$$

Për shpejtësi duhet të shfrytëzojmë formulën:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (2)$$

dhe (1) merr formën

$$\vec{L} = \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\, dm$$

E zhvillojmë këtë prodhim vektorial nën shenjën e integralit:

$$\vec{L} = \int \vec{\omega}\, r^2\, dm - \int \vec{r}\, (\vec{\omega}\, \vec{r})\, dm \qquad (3)$$

I shkruajmë komponentet e vektorit L. Për komponenten x do të kemi:

$$L_x = \omega_x \int (x^2 + y^2 + z^2)\, dm - \int x(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)\, dm$$

ose

$$L_x = \omega_x \int (y^2 + z^2)\, dm - \omega_y \int xy\, dm - \omega_z \int xz\, dm$$

Këto integrale paraqesin momentet e inercionit dhe deviacionit të shqyrtuar në (IX.7). Do të kemi:

$$L_x = J_{xx}\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z$$

dhe në mënyrë të ngjashme fitojmë për dy komponentet tjera,

$$L_y = - J_{xy}\omega_x + J_{yy}\omega_y - J_{yz}\omega_z \qquad (4)$$

$$L_z = - J_{xz}\omega_x - J_{yz} + J_{zz}\omega_z$$

Kuptojmë se komponentet e momentit të sasisë së lëvizjes janë funksione lineare të komponenteve të shpejtësisë këndore. Koeficientët paraqesin elementet e tenzorit të inercionit, prandaj mund të shkruajmë:

$$\vec{L} = [J]\,\vec{\omega} \qquad (5)$$

i cili është ekuivalent me sistemin (4).

Do të vendosim sistemin koordinant, kështu që të përputhet me boshtet kryesore të tenzorit të inercionit. Ky tenzor do të ketë matricë diagonale, kurse formulën (5) mund ta zbërthejmë në formën:

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1\,\omega_1 \\ J_2\,\omega_2 \\ J_3\,\omega_3 \end{pmatrix}$$

Duke i barazuar elementet përkatëse të matricave fitojmë:

$$L_1 = J_1\,\omega_1$$

$$L_2 = J_2\,\omega_2 \qquad (6)$$

$$L_3 = J_3\,\omega_3$$

Kjo është marrëdhënia më e thjeshtë në mes të komponenteve të momentit të sasisë së lëvizjes dhe shpejtësisë këndore. Nëse dëshirojmë t'i shfrytëzojmë, atëherë duhet të marrim në konsiderim faktin se boshtet kryesore të tenzorit të inercionit të cilët paraqiten këtu, të cilët në të njëjtën kohë paraqesin boshtet e koordinatave, rrotullohen së bashku me trupin. Prandaj kemi të bëjmë me sistem të koordinatave i cili rrotullohet. E dijmë se vlen:

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}},$$

por në këtë rast derivatin sipas kohës duhet njehsuar në sistem të koordinatave rrotulluese. Sikurse kemi treguar në kreun për lëvizje në sisteme të tilla, derivati kohor i vektorit të pozitës përcaktohet me shprehjen:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Është lehtë të diktohet se kjo shprehje vlen për të gjitha derivatet kohore të vektorëve në sistem i cili rrotullohet. Prandaj kemi:

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{L}}' + \vec{\omega} \times \vec{L}' \qquad (7)$$

kurse ekuacioni i lëvizjes në këtë sistem e ka formën:

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}}' + \vec{\omega} \times \vec{L}' \qquad (8)$$

Ky ekuacion i lëvizjes është dhënë në formë vektoriale. Do ta zbërthejmë sipas komponenteve. Do t'i shënojmë komponentet në kah të boshteve kryesore me indekset 1, 2, 3. Për komponenten e parë do të kemi:

$$M_1 = \dot{L}_1' + (\omega_2 L_3' - \omega_3 L_2')$$

I shfrytëzojmë formulat (6) duke ditur se $L_1' = L_1 = J_1\omega_1$. Për M_1 dhe komponentet tjera të ngjashme fitojmë:

$$\begin{aligned} M_1 &= J_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3 (J_2 - J_3) \\ M_2 &= J_2\dot{\omega}_1 - \omega_3\omega_1 (J_3 - J_1) \\ M_3 &= J_3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2 (J_1 - J_2) \end{aligned} \qquad (9)$$

Këto formula paraqesin ekuacionet diferenciale të Ojlerit për rrotullim të trupit të ngurtë rreth një pike të përforcuar.

Për rastin ku nuk ekzistojnë momentet e forcave të jashtme, këto ekuacione e marrin formën:

$$\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 - (J_2 - J_3)\, \omega_2\omega_3 &= 0 \\ J_2\dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1)\, \omega_3\omega_1 &= 0 \\ J_3\dot{\omega}_3 - (J_1 - J_2)\, \omega_1\omega_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (10)$$

Nëse të tri momentet e inercionit janë të ndryshme, atëherë nga këto rrjedh:

$$\text{për } \omega_2 = \omega_3 = 0 \qquad \omega_1 \neq 0$$

$$\text{ose për } \omega_3 = \omega_1 = 0 \qquad \omega_2 \neq 0$$

$$\text{ose për } \omega_1 = \omega_2 = 0 \qquad \omega_3 \neq 0$$

Shohim se trupi rotullohet rreth njërit prej boshteve kryesore të inercionit. Pra, kur në trup nuk veprojnë momentet e jashtme, kur trupi rrotullohet lirisht, atëherë ai rrotullohet rreth njërit bosht kryesor të inercionit. Prandaj, boshtet kryesore të inercionit, njëkohësisht janë edhe boshte të rrotullimit të lirë.

Edhe pse trupi i ka tri boshte të lira të rrotullimit, rrotullimi rreth tyre nuk është i njëjtë. Në të vërtetë, rrotullimi mund të jetë i atillë që boshti i lirë të paraqitet si bosht stabil i rrotullimit, por mund të paraqitet edhe si bosht labil. Kjo e dhënë mund të vërtetohet kësisoji:

Do të shënojmë me J_1 momentin më të madh të inercionit, me J_2 mesatarë, kurse me J_3 më të voglin. Shënojmë shkurtimisht me:

$$A = \frac{J_2 - J_3}{J_1}, \quad B = \frac{J_1 - J_3}{J_2}, \quad C = \frac{J_1 - J_2}{J_3} \tag{11}$$

dhe ekuacionet (10) e marrin formën:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= A\, \omega_2 \omega_3 \\ \dot{\omega}_2 &= -B\, \omega_3 \omega_1 \\ \dot{\omega}_3 &= C\, \omega_1 \omega_2 \end{aligned} \tag{12}$$

Supozojmë se boshti i rrotullimit është shumë afër boshtit 1. Atëherë ω_2 dhe ω_3 do të jenë mjaft të vogla ashtu që prodhimet e tyre mund t'i mospërfillim dhe nga ekuacioni i parë i (12) kemi:

$$\dot{\omega}_1 = 0$$

ose

$$\omega_1 = const.$$

Që t'i përcaktojmë dy komponentet tjera të shpejtësisë këndore, kërkojmë derivatin sipas kohës së ekuacionit të dytë të (12):

$$\ddot{\omega}_2 = -B\, \dot{\omega}_3 \omega_2$$

dhe e zëvendësojmë të tretin

$$\ddot{\omega}_2 + BC\, \omega_1^2 \omega_2 = 0 \tag{13}$$

Zgjidhja e këtij ekuacioni sipas ndryshores ω_2 është,

$$\omega_2 = \alpha \sin (\omega_1 \sqrt{BC} t)$$

Kjo do të thotë se ω_2 oshilon me amplituda të vogla α. Në mënyrë të ngjashme fitojmë për ω_3. Meqë këto dy komponente vazhdimisht, shumë pak dallojnë nga zeroja, duhet të përfundojmë se shpejtësia këndore vazhdimisht gjendet në afërsi të komponentes ω_1. Kjo do të thotë se boshti me moment më të madh të inercionit paraqet bosht stabil të rrotullimit të trupit të ngurtë.

Në mënyrë plotësisht të ngjashme mund të vërtetohet edhe për boshtin e lirë me moment më të vogël të inercionit.

Gjendja është plotësisht tjetër për momentin mesatar të inercionit. Në këtë rast duhet të merret ω_2 e madhe kurse ω_1 dhe ω_3 të vogla. Atëherë formula e dytë e (12) do të jetë:

$$\dot{\omega}_2 = 0$$

dhe

$$\omega_2 = const.$$

Nga derivati kohor i të parës

$$\ddot{\omega}_1 = A\, \omega_2 \dot{\omega}_3$$

dhe pasi të zëvendësojmë vlerën për $\dot{\omega}_3$ fitojmë:

$$\ddot{\omega}_1 = AC\, \omega_2^2 \omega_1$$

Zgjidhja e këtij ekuacioni është:

$$\omega_1 = \alpha\, e^{\omega_2 t} \sqrt{AC}$$

Zgjidhja tregon se, nëse ω_1 në fillim është mjaft e vogël, me kalimin e kohës vazhdimisht rritet. Kjo do të thotë se dy komponentet tjera të shpejtësisë këndore zmadhohen mjaft, rrotullimi largohet nga afërsia e rrotullimit me shpejtësi këndore ω_2. Prandaj rrotullimi rreth boshtit të mesëm të inercionit nuk është stabil.

9. FUGA SIMETRIKE E LIRË

Me fugë kuptojmë trupin e ngurtë i cili rrotullohet rreth boshtit kur njëra pikë e tij është e përforcuar. Do të supozojmë se fuga të cilën e shqyrtojmë është simetrike. Kjo do të thotë se masa e trupit është e shpërndarë në mënyrë rrotulluese simetrike rreth boshtit të rrotullimit. Është e qartë se në këtë rast elipsoidi i inercionit e ka formën e elipsoidit rrotullues gjë që do të thotë se dy momente kryesore të inercionit janë të barabarta. Supozojmë se këto janë J_1 dhe J_2. Atëherë si bosht i rrotullimit të fugës është boshti x_3.

Supozojmë për fillim se në fugë nuk vepron kurrfarë force e jashtme. Kjo arrihet nëse pika e përforcuar e boshtit të rrotullimit është njëkohësisht qendër e rëndimit të fugës. Pra, do të shqyrtojmë fugën te e cila pika e qëndrimit dhe e rrotullimit është njëkohësisht qendër e rëndimit.

Për fugën simetrike ekuacionet e Ojlerit (IX.8.10) do të kenë formën:

$$\left.\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 - (J_1 - J_3)\,\omega_2\omega_3 = 0 \\ J_1\dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1)\,\omega_3\omega_1 = 0 \\ J_3\dot{\omega}_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ekuacioni i tretë na jep

$$\omega_3 = C \quad (2)$$

që do të thotë se komponentja e shpejtësisë këndore ω_3 është konstante dhe fuga rrotullohet me shpejtësi këndore konstante rreth boshtit të simetrisë.

Për të fituar dy komponentet tjera të shpejtësisë këndore e derivojmë ekuacionin e parë të sistemit (1) sipas kohës. Fitojmë:

$$J_1\,\ddot{\omega}_1 - (J_1 - J_3)\,\dot{\omega}_2\,C = 0$$

Kurse nga ekuacioni i dytë rrjedh:

$$\dot{\omega}_2 = \frac{J_3 - J_1}{J_1}\,C\,\omega_1$$

Pasi ta zëvendësojmë do të kemi:

$$\ddot{\omega}_1 + \left(\frac{J_3 - J_1}{J_1}\,C\right)^2 \omega_1 = 0$$

Shënojmë shkurtimisht me

$$D = \frac{J_3 - J_1}{J_1}\,C \quad (3)$$

dhe fitojmë ekuacionin diferencial

$$\ddot{\omega}_1 + D^2\omega_1 = 0 \quad (4)$$

zgjidhja e të cilit është:

$$\omega_1 = a \cos Dt \tag{5}$$

Kur ta zëvendësojmë në ekuacionin e parë të sistemit (1) fitojmë:

$$- Da \sin Dt + D\omega_2 = 0$$

ose

$$\omega_2 = a \sin Dt \tag{6}$$

Vlerat e fituara për komponentet e shpejtësisë këndore ω_1 dhe ω_2 paraqesin projeksionet e shpejtësisë këndore në rrafshin i cili qëndron normal ndaj boshtit të simetrisë së rrotullimit të fugës. Shohim se këto ndërrojnë me kohën, por asisoji që intensiteti i këtij projeksioni

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = a^2$$

mbetet konstant. Pra, pikat e skajshme të projeksionit të shpejtësisë këndore, në rrafshin e cekur përshkruajnë njëtrajtësisht periferinë e një rrethi.

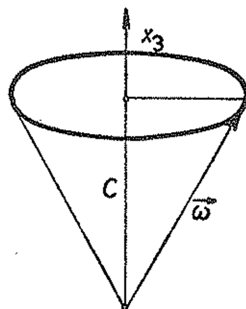


Fig. 49

Nga (2) projeksioni i shpejtësisë këndore në boshtin x_3 është konstant. Kjo është e mundur vetëm nëse vektori i shpejtësisë këndore qëndron vazhdimisht në periferi të një koni, boshti i të cilit është x_3 sikurse tregon fig. 49. Kjo lëvizje e fugës quhet precesion rregular. Nga kjo, boshti i rrotullimit të fugës lëviz njëtrajtësisht nëpër mbështjellësin e një koni rreth vertikales.

Frekuenca e precesionit nga (4) është:

$$\nu = \frac{D}{2\pi}$$

kurse me ndihmën e (3)

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \frac{J_3 - J_1}{J_1} C \tag{7}$$

Shohim se kjo frekuencë është proporcionale me shpejtësinë e rotullimit $C = \omega_3$ rreth boshtit të simetrisë së fugës dhe ndryshimit të momenteve kryesore të inercionit të saj. Pra, nëse fuga rrotullohet shpejt, atëherë edhe precesioni i boshtit të saj ka frekuencë të madhe.

10. KOMPONENTET E SHPEJTËSISË KËNDORE TË SHPREHURA ME KËNDET E OJLERIT

Te fuga kahet e boshteve kryesore të inercionit të saj rrotullohen së bashku me të. Që të lidhim sistemin e koordinatave të lidhur me boshtet kryesore të inercionit të fugës me një sistem të përforcuar koordinatash laboratori do t'i përdorim në tri kënde të cilat quhen kënde të Ojlerit.

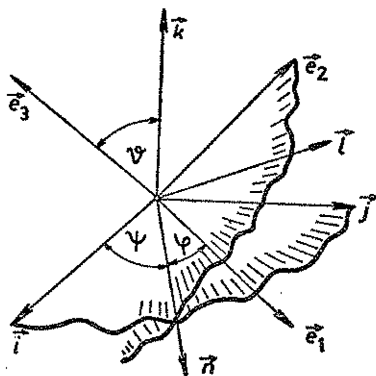


Fig. 50

Në fig. 50 janë vizatuar vektorët unitarë $\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$ të sistemit laboratorik dhe në të njëjtën origjinë vektorët unitarë të sistemit të boshteve kryesore të inercionit të shënuar me $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ dhe $\vec{e}_3$. Rrafshet $\vec{i}\ \vec{j}$ *dhe* $\vec{e}_1\ \vec{e}_2$ prehen në drejtim të vektorit unitar $\vec{n}$. Ky drejtim quhet vijë nyjore e sistemeve. Kjo vijë qëndron ashtu që në rrafshin $\vec{i}\ \vec{j}$ me vektorin $\vec{i}$ mbyll këndin ψ, kurse në rrafshin $\vec{e}_1\ \vec{e}_2$ me vektorin $\vec{e}_1$ mbyll këndin φ. Rrafshet e koordinatave $\vec{i}\ \vec{j}$ dhe $\vec{e}_1\ \vec{e}_2$ në mes veti mbyllin këndin ϑ. Këtë kënd njëkohësisht e mbyllin normalet e tyre $\vec{k}$ dhe $\vec{e}_3$. Këndet e definuara kësisoji ψ, ϑ, φ i lidhin të dy sistemet e koordinatave dhe me ndihmën e tyre mund të përcaktojmë pozitën e njërit sistem ndaj tjetrit. Këto kënde quhen kënde të Ojlerit.

Nga figura shohim se ψ është këndi i rrotullimit rreth boshtit $\vec{k}$, ϑ është këndi i rrotullimit rreth boshtit $\vec{n}$, kurse φ është këndi i rrotullimit rreth boshtit $\vec{e}_3$.

Shpejtësia këndore e rrotullimit të fugës mund të zbërthehet në tri komponente, në kahe të tri boshteve kryesore të inercionit. Këto komponente i shënojmë me ω_1, ω_2 dhe ω_3 dhe do t'i shprehim me ndihmën e këndeve të Eulerit. Prandaj mund të shkruajmë:

$$d\vec{\alpha} = \vec{k}\, d\psi + \vec{n}\, d\vartheta + \vec{e}_3\, \alpha\varphi \tag{1}$$

Kur t'i pjesëtojmë me *dt* fitojmë shpejtësinë këndore:

$$\vec{\omega} = \frac{d\alpha}{dt} = \vec{k}\,\dot{\psi} + \vec{n}\,\dot{\vartheta} + \vec{e}_3\,\dot{\varphi} \tag{2}$$

Që të fitojmë komponenten e saj në kah të $\vec{e}_1$ shprehjen (2) duhet ta shumëzojmë në mënyrë skalare me $\vec{e}_1$. Pra,

$$\omega_1 = \vec{e}_1\,\vec{\omega} = \vec{e}_1\,\vec{k}\,\dot{\psi} + \vec{e}_1\,\vec{n}\,\dot{\vartheta} + \vec{e}_1\,\vec{e}_3\,\dot{\varphi} \tag{3}$$

Nga figura shohim se vlen:

$$\vec{e}_1\,\vec{e}_3 = 0, \quad \vec{e}_1\,\vec{n} = \cos\varphi \tag{4}$$

Ka ngelë të përcaktohet prodhimi i tretë. Vektorin $\vec{k}$ mund ta zbërthejmë me ndihmën e vektorit $\vec{e_3}$ dhe $\vec{l}$ i cili qëndron normal ndaj $\vec{n}$. Nga figura shohim se vlen:

$$\vec{k} = \vec{e_3} \cos\vartheta + \vec{l} \sin\vartheta$$

kurse prodhimi skalar

$$\vec{e_1}\,\vec{k} = \vec{e_1}\,\vec{e_3} \cos\vartheta + \vec{e_1}\,\vec{l} \sin\vartheta$$

anëtari i parë është i barabartë me zero, kurse në anëtarin e dytë paraqitet prodhimi:

$$\vec{e_1}\,\vec{l} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$$

Pra do të kemi:

$$\vec{e_1}\,\vec{k} = \sin\vartheta \sin\varphi \tag{5}$$

Kur këtë dhe (4) e zëvendësojmë në (3) fitojmë:

$$\omega_1 = \dot{\psi} \sin\vartheta \sin\varphi + \dot{\vartheta} \cos\varphi \tag{6}$$

Në mënyrë të ngjashme fitojmë për të dy komponentet tjera:

$$\omega_2 = \dot{\psi} \sin\vartheta \cos\varphi - \dot{\vartheta} \sin\varphi \tag{7}$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} \cos\vartheta + \dot{\varphi} \tag{8}$$

Do t'i shfrytëzojmë shprehjet (6), (7) dhe (8) për përfitimin e energjisë kinetike të fugës simetrike. Sipas formulës (IX.7.16) kemi:

$$T = \frac{1}{2} J_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2$$

ose

$$T = \frac{1}{2} J_1 (\dot{\psi}^2 \sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2} J_3 (\dot{\psi} \cos\vartheta + \dot{\varphi})^2$$

Kjo është shprehja për energji kinetike të fugës simetrike.

11. FUGA SIMETRIKE E RËNDË

Prapë do të shqyrtojmë fugën simetrike e cila rrotullohet rreth njërës pikë të përforcuar. Supozojmë se kjo pikë gjendet në bosht të fugës, por e larguar për l nga qendra e rëndimit të saj. Pesha e fugës mg është forcë e cila vepron vertikalisht dhe me momentin e saj tenton ta rrotullojë. Në këtë rast nuk kemi lëvizje të lirë të fugës, por lëvizje nën veprimin e momentit të peshës. Themi se fuga është e rëndë.

Që të përcaktojmë lëvizjen e fugës së rëndë do ta shfrytëzojmë ekuacionet e Lagranzhit për lëvizje duke i trajtuar këndet e Ojlerit si koordinata të përgjithësuara. Do të kemi:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \tag{3}$$

Së pari do të përcaktojmë funksionin e Lagranzhit. Pasi forca është konservative ky funksion do të ketë formën:

$$L = T - U \tag{4}$$

Këtu me U kemi shënuar energjinë potenciale të forcës së rëndimit,

$$U = m\,g\,z$$

por meqë

$$z = l\cos\vartheta$$

do të kemi:

$$U = m\,g\,l\cos\vartheta \tag{5}$$

Duke shfrytëzuar formulën (IX.10.9) për energji kinetike dhe (5) për Lagranzhian fitojmë:

$$L = \frac{1}{2}J_1(\dot{\psi}^2\sin^2\vartheta\,\dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2}J_3(\dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi})^2 - m\,g\,l\cos\vartheta \tag{6}$$

Shohim se ky funksion nuk varet në mënyrë eksplicite nga ψ dhe φ, prandaj ekuacionet (1) dhe (3) e kanë formën:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = 0$$

të cilat lehtë mund të integrohen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = A \quad \text{dhe} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = B \tag{7}$$

Ekuacioni i tretë i Lagranzhit nuk mund të integrohet lehtë, por në vend të tij mund të marrim ligjin për ruajtjen e energjisë mekanike

$$T + U = E \tag{8}$$

Pasi në (7) dhe (8) i zëvendësojmë vlerat përkatëse fitojmë këtë sistem të ekuacioneve:

$$\frac{1}{2} J_1 (\dot{\psi}^2 \sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2} J_3 (\dot{\psi} \cos\vartheta + \dot{\varphi})^2 + m\,g\,l \cos\vartheta = E \tag{9}$$

$$J_3 (\dot{\psi} \cos\vartheta + \dot{\varphi}) = A \tag{10}$$

$$J_1 \dot{\psi} \sin^2\vartheta + J_3 \cos\vartheta\, (\dot{\psi} \cos\vartheta + \dot{\varphi}) = B \tag{11}$$

Në anëtarin e dytë të formulës (11) e zëvendësojmë vlerën e formulës (10). Fitojmë:

$$J_1 \dot{\psi} \sin^2\vartheta + A \cos\vartheta = B$$

ose

$$\dot{\psi} = \frac{B - A\cos\vartheta}{J_1 \sin^2\vartheta} \tag{12}$$

Pastaj nga (10) rrjedh:

$$\dot{\varphi} = \frac{A}{J_3} - \dot{\psi} \cos\vartheta \tag{13}$$

Pasi të zëvendësojmë vlerën e (10) në (9) fitojmë:

$$\frac{1}{2} J_1 \dot{\vartheta}^2 + \frac{(B - A\cos\vartheta)^2}{2J_1 \sin^2\vartheta} + \frac{A^2}{2J_3} + m\,g\,l \cos\vartheta = E$$

prej nga rrjedh:

$$\dot{\vartheta} = \sqrt{\frac{2}{J_1}\left(E - \frac{A^2}{2J_3} - m\,g\,l\cos\vartheta\right) - \frac{(B - A\cos\vartheta)^2}{J_1^2 \sin^2\vartheta}} \tag{14}$$

Ky është ekuacion diferencial sipas ndryshores ϑ. Pasi t'i ndajmë ndryshoret dhe të integrojmë, do të kemi:

$$t - t_o = \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{\frac{2}{J_1}\left(E - \frac{A^2}{2J_3} - m\,g\,l\cos\vartheta\right) - \frac{(B - A\cos\vartheta)^2}{J_1^2\sin^2\vartheta}}}$$

Do të paraqesim zëvendësimin

$$u = \cos\vartheta$$

kurse

$$d\vartheta = -\frac{du}{\sin\vartheta} = -\frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

dhe integrali merr formën:

$$t - t_o = - J_1 \int \frac{du}{\sqrt{2J_1\,(1 - u^2)\left(E - \frac{A^2}{2J_3} - m\,g\,l\,u\right) - (B - A\,u)^2}} \qquad (15)$$

Nën rrënjën e këtij integrali gjendet ndryshorja në shkallë të tretë, prandaj bën pjesë në kategorinë e integraleve eliptike, të cilët nuk mund të zgjidhen në mënyrë elementare. Për këtë arsye duhet që analizën ta kryejmë përpara integrimit.

Madhësia e cila gjendet nën rrënjë:

$$R = 2J_1\,(1 - u^2)\;\left(E - \frac{A^2}{2J_3} - m\,g\,l\,u\right) - (B - A\,u)^2$$

për $u = 1$, përkatësisht për $\vartheta = 0$ dhe për $u = -1$, d.m.th. për $\vartheta = \pi$ është negative dhe rrënja është imagjinare. Që rrënja të mos jetë, për çfarëdo vlere të ndryshores, imagjinare, duhet supozuar se ekzistojnë dy vlera u_1 dhe u_2 për të cilin $R = 0$ dhe për të gjitha vlerat në mes të këtyre pikave $R > 0$, kurse rrënja do të jetë reale. Këto dy vlera përcaktojnë dy kënde ϑ_1 dhe ϑ_2. Rrënja do të jetë reale për të gjitha vlerat në mes të këtyre këndeve, kurse imagjinare për vlera jashtë këtij intervali. Nga kjo rrjedh se boshti i rrotullimit e ndërron vazhdimisht pozitën vetëm në mes të këndeve ϑ_1 dhe ϑ_2. Lëvizja e këtillë e boshtit të fugës quhet nutacion i saj.

Sipas formulës (12) duhet që edhe shpejtësia $\dot{\psi}$ të lëkundet në mes të vlerave:

$$\dot{\psi}_1 = \frac{B - A\cos\vartheta_1}{J_1\sin^2\vartheta_1}\,,\quad \dot{\psi}_2 = \frac{B - A\cos\vartheta_2}{J_1\sin^2\vartheta_2} \qquad (16)$$

Nga (13) rrjedh se shpejtësia e rrotullimit të fugës rreth boshtit të simetrisë lëviz në kufijtë:

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{A}{J_3} - \frac{B - A\cos\vartheta_1}{J_1 \sin^2\vartheta_1}\cos\vartheta_1$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{A}{J_3} - \frac{B - A\cos\vartheta_2}{J_1 \sin^2\vartheta_2}\cos\vartheta_2 \qquad (17)$$

Mund të diskutojmë për këto tri raste:

1. $B - A\cos\vartheta_1 > 0$

Atëherë $\dot{\phi}$ është vazhdimisht pozitive, shpejtësia e precesionit është gjithmonë pozitive edhe pse nuk është konstante. Prej këtu përfundojmë se kjo shpejtësi vazhdimisht e ndërron kahun. Në sferën me rreze një njësi, lëvizja e boshtit të fugës përshkruan lakoren oshiluese në mes të këndeve ϑ_1 dhe ϑ_2. Kjo lakore është paraqitur në fig. 51a.

2. $B - A\cos\vartheta_1 = 0$

Atëherë lëvizja e boshtit të fugës kryhet sikurse tregon lakorja në fig. 51b.

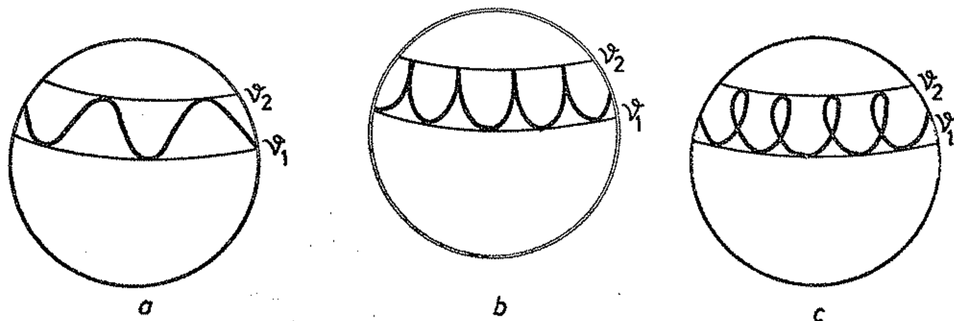


Fig. 51

3. $B - A\cos\vartheta_1 < 0$

Në këtë rast shpejtësia e precesionit për disa vlera të gjerësisë së lartë bëhet edhe negative, që do të thotë se precesioni edhe kthehet prapa. Këtë gjendje e tregon fig. 51c.

Nga ky diskutim shohim se edhe boshti i fugës së rëndë kryen lëvizje precesioni, por kjo nuk kryhet në mënyrë të njëtrajtshme sikurse te fuga e lirë. Në këtë rast kjo është një funksioni i ndërlikuar i kohës. E quajmë precesion jo rregular. Përveç kësaj nga prezenca e nutacionit, boshti i fugës nuk lëviz nëpër mbështjellësin e konit, por lëkundet rreth këtij mbështjellësi.

Prandaj mund të përfundojmë se boshti i fugës së rëndë njëkohësisht kryen dy lloj lëvizjesh: nutacionin dhe precesionin jo rregular.

X. MEKANIKA E TRUPAVE ELASTIKË

1. DEFORMIMET

Trupat e ngurtë përbëhen prej grimcave themelore, molekulave dhe atomeve në mes të të cilëve veprojnë disa forca. Kur në trup nuk veprojnë forcat e jashtme, këto grimca gjenden në pozita ekuilibruese të forcave të brendshme të tërheqjes në mes të grimcave fqinjë. Por, kjo shpërndarje e grimcave do të ndërrojë kur në trup veprojnë forcat e jashtme. Do të ndërrojnë edhe pozitat reciproke të grimcave, forcat e brendshme në mes tyre nuk do të gjenden në ekuilibrim, por do të ngelin disa forca të cilat u kundërvehen forcave të jashtme. Kur këto të fundit pushojnë së vepruari, prapë do të arrihet ekuilibrimi i forcave të brendshme, do të shkaktohet ndërrim i shpërndarjes së grimcave i atillë sikurse ka ekzistuar përpara veprimit të forcave të jashtme. Kështu mund të përfundojmë se në trup të ngurtë ekzistojnë disa forca të brendshme të cilat i kundërvihen veprimit të forcave të jashtme duke tentuar që të vendosin gjendjen fillestare të shpërndarjes së grimcave.

Forcat e jashtme shkaktojnë ndërrimin e largësisë në mes të grimcave dhe si rezultat i veprimit të tyre në trup të ngurtë është ndërrimi i formës së tij. Themi se trupi deformohet. Në anën tjetër, forcat e brendshme në trup tentojnë të eliminojnë këto deformime, prandaj pas ndërprerjes së veprimit të forcave të jashtme, trupi kthehet në formën e përparshme. Forcat e brendshme e kthejnë trupin në formën e përparshme vetëm nëse deformimi nuk është i madh. Në të kundërt, kur ky deformim është mjaft i madh, atëherë arrihet deri te largimi i tepruar i largësive reciproke në mes të grimcave dhe si të tilla nuk do të gjenden në fushën e veprimit të forcave tërheqëse. Këto forca do të pushojnë së vepruari për deformime të mëdha, si i tillë ky i fundit mbetet vazhdimisht. Nëse deformimi është tepër i madh mund të arrihet edhe deri te copëtimi i trupit në pjesë të veta.

Deformimet e këtilla do të jenë jashtë interesit të studimit tonë. Ne do të shqyrtojmë deformimet mjaft të vogla, të cilat janë të përkohshme dhe zgjasin po aq, sa zgjasin veprimet e forcave të jashtme.

Dukuria e eliminimit të deformimeve të vogla nga ana e forcave të brendshme quhet elasticitet. Trupat e këtillë quhen elastikë, kurse këto forca quhen forca elastike.

Edhe pse dukuritë e elasticitetit janë rezultat i forcave ndërmolekulare, teoria e trupave elastikë mund të shqyrtohet duke u bazuar në supozimin se trupat elastikë janë kontinualë. Këtu do të paraqesim fillet e parimeve të kësaj teorie.

Të mendojmë se kemi marrë në shqyrtim një element të vogël të vëllimit në trupin elastik të atillë që mund të mos i përfillim shkallët e larta të largësisë në mes të dy pikave, në krahasim me shkallën e parë të kësaj largësie.

Do të vendosim origjinën e sistemit koordinat në pikën P_o të elementit të këtij vëllimi. Kjo pikë do të ketë koordinatat (O, O, O). Një pikë tjetër e këtij vëllimi do të ketë koordinat (x, y, z). Do ta shënojmë me P dhe është e larguar nga P_o për vektorin

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

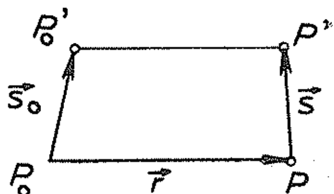


Fig. 52

sikurse shihet nga fig. 52. Supozojmë se në trup si tërësi veprojnë forcat e jashtme të cilat e deformojnë dhe e lëvizin. Për këtë arsye elementi i shqyrtuar i vëllimit do të zhvendoset dhe deformohet. Pika P_o do të zhvendoset në pikën P_o' (ξ_o, η_o, ζ_o) kurse pika P do të zhvendoset në pikën $P'(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)$. Do të përcaktojmë sa është vektori i zhvendosjes

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

Është e qartë se komponentet e tij varen nga pozita e pikës P, pra nga x, y, z. Kemi supozuar në fillim se trupi është kontinual, prandaj të gjitha funksionet të cilat vijnë në shprehje janë të pakuptuara. Meqë dihet zhvendosja e pikës P_o, përkatësisht vektorit

$$\vec{s}_o = \begin{pmatrix} \xi_o \\ \eta_o \\ \zeta_o \end{pmatrix}$$

atëherë duhet kërkuar zhvendosjen e një pike tjetër në afërsi të pikës P_o. Këtë e fitojmë duke i zhvilluar në seri të Tejlorit komponentet e s. Zhvillimin do ta ndërpresim pas anëtarëve linearë, gjë që është në pajtim me hipotezën fillestare.

$$\begin{aligned}
\xi &= \xi_o + \frac{\partial \xi}{\partial x} x + \frac{\partial \xi}{\partial y} y + \frac{\partial \xi}{\partial z} z \\
\eta &= \eta_o + \frac{\partial \eta}{\partial x} x + \frac{\partial \eta}{\partial y} y + \frac{\partial \eta}{\partial z} z \qquad (1) \\
\zeta &= \zeta_o + \frac{\partial \zeta}{\partial x} x + \frac{\partial \zeta}{\partial y} y + \frac{\partial \zeta}{\partial z} z
\end{aligned}$$

Në këtë zhvendosje është shprehur lëvizja e elementit të vëllimit si tërësi si dhe deformimi i tij. Në teori të elasticitetit na intereson vetëm deformimi, prandaj ndërrimet tjera të cilat i pëson trupi si tërësi nuk do t'i shqyrtojmë. Që të arrijmë këtë shprehjet në (1) do t'i shkruajmë ndryshe. Shohim se vlen:

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \qquad (2)$$

dhe në mënyrë të ngjashme për shprehje tjera. Nëse zëvendësojmë në (1) fitojmë:

$$\xi = \xi_o + 0 \cdot x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) z + \frac{\partial \xi}{\partial x} x +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) z$$

$$\eta = \eta_o + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) x + 0 \cdot y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) z +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) x + \frac{\partial \eta}{\partial y} y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) z$$

$$\zeta = \zeta_o + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right) y + 0 \cdot z +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\right) y + \frac{\partial \zeta}{\partial z} z \qquad (3)$$

Shprehjet e shkruara kësisoji për zhvendosje mund t'i ndajmë në tri pjesë, prej të cilave çdo njëra paraqet komponentet e një vektori. Pra mund të shkruajmë:

$$\vec{s} = \vec{s}_o + \vec{s}_1 + \vec{s}_2 \qquad (4)$$

Vektori i parë si komponente përmban anëtarët e parë të (3). Pra,

$$\vec{s}_o = \begin{pmatrix} \xi_o \\ \eta_o \\ \zeta_o \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Ky është i përbashkët për tërë trupin, sepse është konstant. Përfundojmë se tërë trupi zhvendoset për vektorin $\vec{s}_o$, pra $\vec{s}_o$ paraqet vektorin e translacionit të trupit. Lëvizjen e këtillë e përshkruajmë me lë-

vizje të çfarëdo pike të tij, me lëvizje të pikës materiale të cilën e kemi shqyrtuar më parë. Për këtë arsye në vazhdim nuk do të interesohemi për këtë formë të lëvizjes.

Tre anëtarët tjerë janë komponentet e vektorit $\vec{s}_1$. Nëse përdorim këto shkurtime shënimi:

$$\varphi_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial x}\right), \quad \varphi_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right), \quad \varphi_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\right)$$

atëherë mund t'i shkruajmë kësisoji:

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} \varphi_y z - \varphi_z y \\ \varphi_z x - \varphi_x z \\ \varphi_x y - \varphi_y z \end{pmatrix} = \vec{\varphi} \times \vec{r} \qquad (6)$$

Do të tregojmë se zhvendosja s_1 paraqitet nga rrotullimi i tërë trupit. Për këtë duhet treguar se nga $\vec{s}_1$ largësia në mes të pikave P' dhe P_o nuk ndryshon. E njehsojmë këte largësi:

$$|P_oP'|^2 = |\vec{r} + \vec{s}_1|^2 = r^2 + 2\,\vec{r}\,s_1 + \vec{s}_1^{\,2}$$

Anëtari i fundit mund të mos përfillet si shkallë e lartë e zhvendosjes shumë të vogël. Pastaj vlen:

$$\vec{r}_1\,\vec{s}_1 = \vec{r}\,(\vec{\varphi} \times \vec{r}) = \vec{\varphi}\,(\vec{r} \times \vec{r}) = 0$$

prej nga

$$|P_oP'| = r^2 = |P_o|^2$$

Kësisoji vërtetuam se $\vec{s}_1$ është zhvendosje si rezultat i rrotullimit. Edhe rrotullimi është lëvizje të cilës i nënshtrohet trupi si tërësi prandaj si të tillë nuk nuk e shqyrtojmë më tej. Do të përqëndrojmë vëmendjen në anëtarin e tretë i cili është rezultat i deformimit. Derivatet:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}, \frac{\partial\xi}{\partial y}, \ldots,$$

janë konstante sepse i shqyrtojmë në pjesën infinitetimale dhe në vend të tyre mund të shkruajmë simbole të reja:

$$\delta_{xx} = \frac{\partial\xi}{\partial x} \qquad \delta_{xy} = \delta_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$$

$$\delta_{yy} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad \delta_{xz} = \delta_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)$$

$$\delta_{zz} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} \qquad \delta_{yz} = \delta_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) \tag{7}$$

Në këtë mënyrë për komponente të zhvendosjes nga deformimi $\vec{s}_2$ fitojmë:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \delta_{xx}x + \delta_{xy}y + \delta_{xz}z \\ \eta_2 &= \delta_{yx}x + \delta_{yy}y + \delta_{yz}z \\ \zeta_2 &= \delta_{zx}x + \delta_{zy}y + \delta_{zz}z \end{aligned} \tag{8}$$

Koeficientët të cilët përcaktojnë varshmërinë lineare të komponenteve të zhvendosjes së deformimit prej koordinatave mund të shprehen me skemë katrore:

$$\delta = \begin{pmatrix} \delta_{xx} & \delta_{xy} & \delta_{xz} \\ \delta_{yx} & \delta_{yy} & \delta_{yz} \\ \delta_{zx} & \delta_{zy} & \delta_{zz} \end{pmatrix} \tag{9}$$

dhe paraqesin elemente të një madhësie fizike. E quajmë tenzor të deformimit dhe është simetrik sepse për të vlen $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.

Çdo tenzori simetrik mund t'ia shoqërojmë një sipërfaqe të rendit të dytë. Ky është elipsoidi i tij tenzorial. Në rastin tonë këtë e arrijmë duke shprehur prodhimin skalar të vektorëve $\vec{s}_2$ dhe $\vec{r}$.

$$\vec{s}_2\,\vec{r} = (\delta_{xx}x + \delta_{xy}y + \delta_{xz}z)x + (\delta_{yx}x + \ldots =$$

$$= \delta_{xx}x^2 + \delta_{yy}y^2 + \delta_{zz}z^2 + 2\delta_{xy}xy + 2\delta_{zx}zx + 2\delta_{yz}yz = f(x, y, z) \tag{10}$$

Ky prodhim paraqet një funksion katror homogjen të x, y dhe z. Me ndihmën e këtij funksioni lehtë mund t'i shprehim komponentet e zhvendosjes së deformimit. Në të vërtetë shihet se

$$\xi_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{2\partial x} \qquad \eta_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{2\partial y} \qquad \zeta_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{2\partial z} \tag{11}$$

Nëse kërkojmë në të cilat vende funksioni është konstant pra,

$$\vec{s}_2\,\vec{r} = f(x, y, z) = const.$$

atëherë nga (10) fitojmë ekuacionin e këtyre vendeve gjeometrike:

$$\delta_{xx}x^2 + \delta_{yy}y^2 + \delta_{zz}z^2 + 2\delta_{xy}xy + 2\delta_{yz}yz + 2\delta_{zx}zx = const. \qquad (12)$$

ky është ekuacion i sipërfaqes së rendit të dytë dhe paraqet elipsoidin tenzorial për tenzor të deformimit.

E dijmë se te çdo sipërfaqe të rendit të dytë mund ta rrotullojmë sistemin e koordinatave përderisa të mos përputhet me boshtet e asaj sipërfaqe. Nëse i shënojmë koordinatat në sistemin e ri me X_1, X_2 dhe X_3 atëherë ekuacioni i elipsoidit mund të shkruhet në formë të thjeshtë siç vijon:

$$F(X_1, X_2, X_3) = \delta_1 X_1^2 + \delta_2 X_2^2 + \delta_3 X_3^2 = const. \qquad (13)$$

Kahet e boshteve X_1, X_2 dhe X_3 quhen boshte kryesore të tenzorit të deformimit. Nëse sistemi i koordinatave përputhet me boshtet kryesore, atëherë do të ketë vetëm tri elemente të ndryshme nga zeroja. Do të ketë formën:

$$\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}$$

Këto komponente quhen dilatacionet kryesore.

Komponentet e zhvendosjes së deformimit në kah të boshteve kryesore janë:

$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X_1} = \delta_1 X_1, \; U_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X_2} = \delta_2 X_2, \; U_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X_3} = \delta_3 X_3$$

kurse koordinatat e pikës P' në sistemin e ri të koordinatave janë:

$$X_i + U_i = X_i\,(1 + \delta_i) \qquad (14)$$

Madhësitë δ_i janë dilatacionet lineare. Përveç tyre i rëndësishëm është edhe dilatacioni kubik Θ. E definojmë si marrëdhënie në mes të ndërrimit të elementit të vëllimit dhe vet vëllimit të atij elementi. Pra,

$$\Theta = \frac{V'-V}{V} \qquad (15)$$

ku V është vëllimi i elementit para deformimit, kurse V' vëllimi pas deformimit.

Të marrim elementin e vëllimit brinjët e të cilit janë paralele me boshtet kryesore dhe i kanë gjatësitë a_1, a_2 dhe a_3. Atëherë vlen:

$$V = a_1 a_2 a_3 \qquad V' = a_1' a_2' a_3'$$

kurse sipas (14)

$$a_i' = a_i (1 + \delta_i)$$

dhe fitojmë:

$$V' = a_1 a_2 a_3 (1 + \delta_1)(1 + \delta_2)(1 + \delta_3)$$

Nëse nuk i përfillim prodhimet e madhësive të vogla δ fitojmë:

$$V' = V (1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3)$$

ose

$$\Theta = \frac{V' - V}{V} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \tag{16}$$

Shohim se për dilatacion kubik kemi fituar shumën e tri dilatacioneve lineare.

Ky rezultat nuk është i kufizuar vetëm për boshte kryesore, por vlen në përgjithësi. Në rastin e përgjithshëm dilatacioni kubik është i barabartë me shumën e elementeve të diagonales së tenzorit të deformimit. Pra,

$$\Theta = \delta_{xx} + \delta_{yy} + \delta_{zz} \tag{17}$$

Saktësinë e këtij pohimi mund ta vërtetojmë kësisoji: Le të jenë kosinuset e kaheve të këndeve në mes të dy sistemeve të koordinatave të dhëna me skemën vijuese:

	x	y	z
X_1	α_1	β_1	γ_1
X_2	α_2	β_2	γ_2
X_3	α_3	β_3	γ_3

me konditë që

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 \ldots \text{dhe } \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0 \ldots$$

Atëherë ekuacioni i elipsoidit të deformimit transformohet kësisoji

$$F = \sum_i \delta_i X_i^2 = \sum_i \delta_i (\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z)^2 =$$

$$= x^2 \sum \delta_i \alpha_i^2 + y^2 \sum \delta_i \beta_i^2 + z^2 \sum \delta_i \gamma_i^2 + 2xy \sum \delta_i \alpha_i \beta_i + \ldots\ldots$$

Kjo duhet të jetë identike me

$$f = \delta_{xx} x^2 + \delta_{yy} y^2 + \delta_{zz} z^2 + 2\delta_{xy} xy + 2\delta_{yz} yz + 2\delta_{zx} zx$$

Duke i krahasuar fitojmë:

$$\delta_{xx} = \delta_1\alpha_1^2 + \delta_2\alpha_2^2 + \delta_3\alpha_3^2 \qquad \delta_{xy} = \alpha_1\beta_1\delta_1 + \alpha_2\beta_2\delta_2 + \alpha_3\beta_3\delta_3$$

$$\delta_{yy} = \delta_1\beta_1^2 + \delta_2\beta_2^2 + \delta_3\beta_3^2 \qquad \delta_{yz} = \beta_1\gamma_1\delta_1 + \beta_2\gamma_2\delta_2 + \beta_3\gamma_3\delta_3$$

$$\delta_{zz} = \delta_1\gamma_1^2 + \delta_2\gamma_2^2 + \delta_3\gamma_3^2 \qquad \delta_{zx} = \gamma_1\alpha_1\delta_1 + \gamma_2\alpha_2\delta_2 + \gamma_3\alpha_3\delta_3 \qquad (18)$$

Duke i mbledhur tri formulat e para fitojmë:

$$\delta_{xx} + \delta_{yy} + \delta_{zz} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

Kështu kemi treguar se vlen

$$\Theta = \delta_{xx} + \delta_{yy} + \delta_{zz}$$

Pra shprehja nuk varet nga sistemi i koordinatave dhe e quajmë gjurmë të matricës së tenzorit. Për tenzor kjo paraqet një madhësi të pavarur nga pozita e sistemit të koordinatave, pra është invariante e tenzorit të shqyrtuar.

Sipas (7) mund të shkruajmë:

$$\Theta = \delta_{xx} + \delta_{yy} + \delta_{zz} = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = div\,\vec{s} \qquad (19)$$

Në këtë mënyrë dilatacionin vëllimor e kemi lidhur me vektorin e zhvendosjes $\vec{s}_2$ të deformimit.

2. KUPTIMI FIZIK I ELEMENTEVE TË TENZORIT TË DEFORMIMIT

Që të përcaktojmë kuptimin e elementeve të diagonales të mendojmë në boshtin x një gjatësi l me fillim në origjinë të koordinatave kurse mbarimi në vendin me abshisë x sikurse tregon fig. 53. Pas deformimit pika fillestare zhvendoset për ξ_o kurse ajo e mbarimit për ξ. Gjatësinë e re shënojmë me l'. Zgjatja e saj relative është:

$$\frac{l'-l}{l} = \frac{\xi-\xi_o}{x} \qquad (1)$$

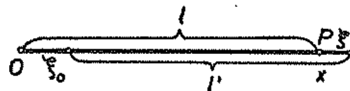


Fig. 53

sepse nga figura është $l' = l + \xi - \xi_o$ dhe $l = x$. Nëse në formulën e parë të (X.1.1) zëvendësojmë koordinatat e pikës $P(x, O, O)$ fitojmë:

$$\xi = \xi_o + \frac{\partial\xi}{\partial x}\,x$$

prandaj është:

$$\frac{\xi-\xi_o}{x}=\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

kurse nga (1) rrjedh

$$\frac{l'-l}{x}=\frac{\partial\xi}{\partial x}=\delta_{xx} \qquad (2)$$

dhe në mënyrë të ngjashme për δ_{yy} dhe δ_{zz}. Pra elementet e diagonalës së tenzorit të deformimit janë të barabarta me zgjatjen relative të gjatësive të cilat qëndrojnë në kah të boshteve të koordinatave. Është e qartë se për shkurtim të gjatësisë elementi përkatës është negativ. Themi se këto komponente përcaktojnë dilatacionet në kah të boshteve të koordinatave.

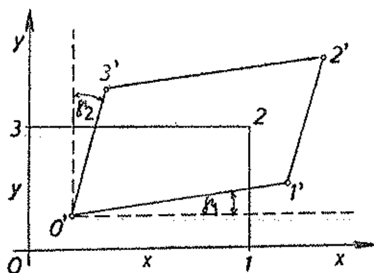


Fig. 54

Që të përcaktojmë kuptimin e elementeve jodiagonal të mendojmë sipërfaqen e formës së katërkëndëshit i cili qëndron në rrafshin xy me njërin kulm në origjinë. Kulmet e këtij katërkëndëshi i kemi shënuar me 0, 1, 2 dhe 3 sikurse tregon fig. 54. Pas deformimit kulmet e tij kalojnë në pikat 0′, 1′, 2′, 3′. Kjo nuk do të jetë më katërkëndësh, por është deformuar në formë të romboidit. Gjatë deformimit këndi i drejt në 0 është shndërruar në kënd të ngushtë. Sikurse shihet nga figura ai është zvogëluar për këndet γ_1 dhe γ_2. Do t'i përcaktojmë këto kënde. Meqë kemi të bëjmë me kënde të vogla mund të shkruajmë:

$$\gamma_1=\operatorname{tg}\gamma_1=\frac{\eta-\eta_o}{x+\xi_1-\xi_o}$$

Indekset pranë ξ dhe η tregojnë pikën për të cilën shqyrtohen. Kur të kryejmë pjesëtimin e thyesës në anën e djathtë fitojmë,

$$\frac{\eta_1-\eta_o}{x+\xi_1-\xi_o}=\frac{\eta_1-\eta_o}{x}-\frac{\eta_1-\eta_o}{x^2}(\xi_1-\xi_o)+\ldots$$

Anëtarët në të cilët paraqitet prodhimi ξ dhe η nuk i përfillim, sepse janë madhësi të vogla të rendit të lartë. Na ngel:

$$\gamma_1=\frac{\eta_1-\eta_o}{x}$$

Nga ekuacioni i dytë i sistemit (X.1.1) fitojmë për pikën $l(x, O, O)$

$$\frac{\eta_1-\eta_o}{x}=\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

Pra

$$\gamma_1 = \frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{3}$$

Në mënyrë të ngjashme do të kemi për,

$$\gamma_2 = \operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{\xi_2 - \xi_o}{y + \eta_2 - \eta_o} = \frac{\xi_2 - \xi_o}{y}$$

ose

$$\gamma_2 = \frac{\partial \xi}{\partial y} \tag{4}$$

Duke i mbledhur (2) dhe (3) fitojmë:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} = 2\delta_{xy}$$

ose

$$\delta_{xy} = \frac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) \tag{5}$$

Sipas kësaj δ_{xy} është gjysma e këndit për të cilin ndërron këndi i drejtë në 0. Ky deformim me të cilin nga katërkëndëshi kënddrejtë fitojmë kënddpjerrët quhet prerje, prandaj elementet jodiagonale të tenzorit të deformimit masin deformimin e prerjes.

Nga kjo që u cek deri tani shohim se çdo gjatësi në kah të boshteve të koordinatave e ndërron madhësinë e vet, kurse çdo figurë e cila qëndron në rrafshin e koordinatave i ndërron këndet e veta. Në përgjithësi deformimi përbëhet prej dilatacionit dhe prerjes, përveç në rastin kur boshtet e koordinatave i kanë kahet e boshteve kryesore të tenzorit të deformimit që paraqitet vetëm dilatacioni.

3. TENSIONET

Elementi i sipërfaqes në trup elastik pas deformimit zhvendoset nga vendi i vet. Në trup veprojnë forcat elastike të cilat tentojnë ta kthejnë në vendin e mëparshëm dhe t'i japin formën që ka pasur. Këto forca varen prej madhësisë së sipërfaqes në të cilën veprojnë, prandaj gjithmonë i njehsojmë në njësi të sipërfaqes. Forcat të cilat veprojnë në njësi të sipërfaqes i quajmë tensione. Madhësia e tyre varet edhe prej pozitës së sipërfaqes në trup elastik. Nëse dëshirojmë të përcaktojmë gjendjen e tensioneve në ndonjë pikë, atëherë duhet të mendojmë në ate pikë elementin e

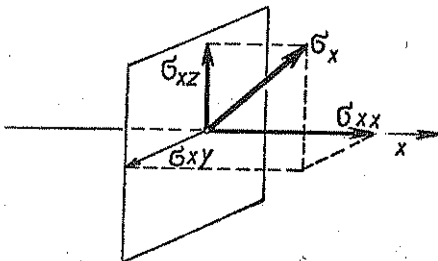


Fig. 55

sipërfaqes të vendosur normal në kahe të boshtit x të sistemit të koordinatave. Tensioni i cili vepron në këte sipërfaqe σ_x, në rast të përgjithshëm nuk do të jetë normal në të. Prandaj këte tension duhet ta zbërthejmë në tri komponente në kahe të tri boshteve të sistemit. Do t'i shënojmë me σ_{xx}, σ_{xy} dhe σ_{xz}, sikurse është paraqitur në fig. 55. Pastaj marrim elementin tjetër të sipërfaqes normale në boshtin y dhe në të gjejmë tensionin përkatës σ_y të cilin prapë e zbërthejmë në komponente σ_{yx}, σ_{yy} dhe σ_{yz}. Më në fund elementi i sipërfaqes normale në boshtin z e ka tensionin σ_z me komponentet σ_{zx}, σ_{zy} dhe σ_{zz}. Në këtë emërtim indeksi i parë pranë simbolit tregon boshtin në të cilin elementi i sipërfaqes është normal, kurse indeksi i dytë kahun e komponentes. Sipas kësaj gjendja e tensionit në ndonjë pikë të trupit elastik përcaktohet me madhësinë σ e cila i ka nëntë komponente të cilat mund t'i shkruajmë në formë të skemës katrore:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Kjo madhësi quhet tenzor i tensionit. Do të tregojmë se ky tenzor është simetrik.

Të mendojmë një element të vëllimit të trupit elastik me brinjë paralele me boshtet e koordinatave gjatësitë e të cilave janë $\triangle x$ $\triangle y$ dhe $\triangle z$. Do të paraqesim konditën e ekuilibrimit të këtij elementi ndaj rrotullimit rreth boshtit z. Nga të gjitha komponentet e tensionit, rrotullimin rreth boshtit z e shkaktojnë vetëm σ_{xy} dhe σ_{yx}, sikurse tregon fig. 56. Komponenta σ_{xy} vepron në forcë $\sigma_{xy}\triangle y\triangle z$ dhe e ka momentin $\frac{\triangle x}{2}\,\sigma_{xy}\triangle y\cdot\triangle z$. Tensioni σ_{yx} e ka momentin $-\frac{\triangle y}{2}\,\sigma_{yx}\triangle x\triangle z$. Parashenja minus tregon se ky moment i jep trupit kah negativ të rrotullimit. Kështu, kondita për rrotullim do të jetë:

$$\frac{\triangle x}{2}\,\sigma_{xy}\triangle y\triangle z - \frac{\triangle y}{2}\,\sigma_{yx}\triangle x\triangle z = 0$$

ose

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \qquad (2)$$

Në mënyrë të ngjashme vërtetohet edhe për $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ dhe $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$, prej të cilave kuptojmë se tenzori i tensionit është simetrik.

Për këtë arsye edhe ky tenzor e ka elipsoidin tenzorial i cili quhet elipsoid i tensionit. Edhe në këtë rast mund të vendoset sistem i koordinatave i atillë që të përputhet me boshtet e elipsoidit. Atëherë, matrica e tenzorit ka formë diagonale me tri elemente σ_1, σ_2 dhe σ_3 të cilat i quajmë tensione kryesore.

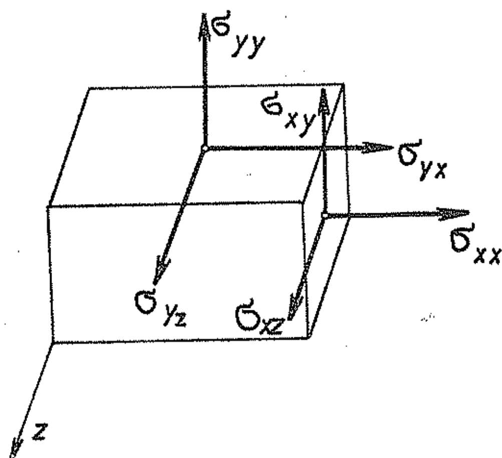


Fig. 56.

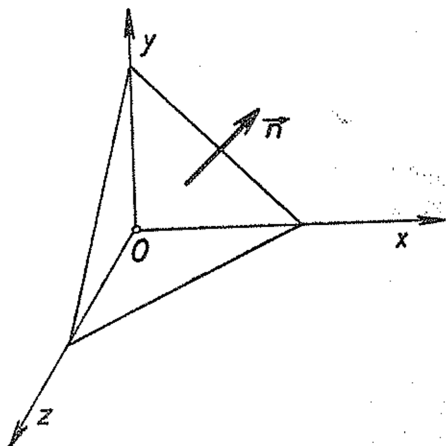


Fig. 57.

Me ndihmën e tenzorit të tensionit gjendja e tensionit në ndonjë vend në trup elastik është plotësisht e përcaktuar, sepse ky tenzor përmban tensionet të cilët veprojnë në elemente të sipërfaqeve të cilat qëndrojnë normalë në njërin prej boshteve të koordinatave. Mund të pyesim: sa është tensioni i cili vepron në element të sipërfaqes e cila ka pozitë arbitrare? Që të përcaktojmë këtë të mendojmë elementin e vëllimit të trupit elastik i cili e ka formën e tetraedrit me kulm në origjinë të koordinatav dhe bazë normale në vektorin unitar $\vec{n}$, sikurse tregon fig. 57. Në këtë sipërfaqe të pjerrët vepron tensioni σ_n të cilin do ta përcaktojmë. Nëse kjo sipërfaqe është dS, atëherë në pozitë të ekuilibrimit forca $\sigma_n dS$ duhet të jetë e barabartë me shumën e forcave të cilat veprojnë në sipërfaqet tjera të tetraedrit:

$$\sigma_n dS = \sigma_x dS_x + \sigma_y dS_y + \sigma_z dS_z \tag{3}$$

Nëse i shënojmë me α, β dhe γ këndet që mbyll vektorin $\vec{n}$ me boshtet e koordinatave atëherë do të kemi:

$$ds_x = dS \cos\alpha$$

$$dS_y = dS \cos\beta$$

$$dS_z = dS \cos\gamma$$

I zëvendësojmë në (3) dhe fitojmë:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos\alpha + \sigma_y \cos\beta + \sigma_z \cos\gamma \tag{4}$$

ose në formë të zbërthyer:

$$\sigma_{nx} = \sigma_{xx}\cos\alpha + \sigma_{yx}\cos\beta + \sigma_{zx}\cos\gamma$$

$$\sigma_{ny} = \sigma_{xy}\cos\alpha + \sigma_{yy}\cos\beta + \sigma_{zy}\cos\gamma \tag{5}$$

$$\sigma_{nz} = \sigma_{xz}\cos\alpha + \sigma_{yz}\cos\beta + \sigma_{zz}\cos\gamma$$

Kështu përcaktohen tensionet të cilat veprojnë në sipërfaqe të orientuar në mënyrë arbitrare në hapësirë.

4. MARRËDHËNIA NË MES TË DEFORMIMIT DHE TENSIONIT

Të supozojmë se trupi të cilin po e shqyrtojmë është izotrop, që do të thotë se vetitë fizike të tij në të gjitha kahet janë të njëjta. Lidhjen në mes të tensionit dhe deformimit e shprehim me ndihmën e një serie potencash. Sikurse edhe më parë, edhe në këtë rast në seri nuk do t 'i përfillim anëtarët me shkallë më të lartë se anëtarët linearë. Atëherë, fitojmë për komponente të tensionit funksione lineare të elementeve të deformimit. Këtë fakt e shpreh ligji i Hukut i cili është vërtetuar për trupa elastikë përderisa nuk kalohet kufiri i caktuar. Do të kufizohemi për tensione të cilat gjenden në këtë kufi.

Të mendojmë elementin e vëllimit paralel me boshtet kryesore. Në të veprojnë vetëm tensionet kryesore σ_1, σ_2 dhe σ_3 të cilat janë normalë në sipërfaqet kufitare të elementit. Për këtë arsye paraqitet vetëm dilatacioni i këtij elementi. Meqë deformimet e prerjes nuk paraqiten, kuptojmë se kemi të bëjmë me elipsoid të deformimit të shndërruar në boshte kryesore. Nga kjo rrjedh se boshtet kryesore të elipsoidit të deformimit përputhen me boshtet kryesore të elipsoidit të tensionit. Pra tensionet σ_1, σ_2 dhe σ_3 shkaktojnë vetëm dilatacionet kryesore δ_1, δ_2 dhe δ_3. Meqë supozojmë se lidhja në mes tyre është lineare, mund të shkruajmë:

$$\sigma_1 = (2\mu + \lambda)\,\delta_1 + \lambda\delta_2 + \lambda\delta_3 \tag{1}$$

ku λ dhe μ janë konstante. Për δ_2 dhe δ_3 janë shkruar të njëjtit koeficient, kurse për δ_1 është marrë i formës tjetër si rezultat i veprimit të tensionit në kah të vet.

Formulën (1) mund ta shkruajmë edhe në formën

$$\sigma_1 = 2\mu\delta_1 + \lambda\,(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) \tag{2}$$

Në mënyrë të ngjashme fitojmë edhe për dy tensionet tjera kryesore. Prandaj mund të shkruajmë në përgjithësi

$$\sigma_i = 2\mu\delta_i + \lambda\,(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) \quad i = 1, 2, 3 \tag{3}$$

Është shumë lehtë të kryejmë transformimin për rastin kur elementi i vëllimit nuk është i orientuar paralel me kahet e boshteve kryesore. Sipas shprehjeve (X 1.18) kemi:

$$\delta_{xx} = \alpha_1^2\delta_1 + \alpha_2^2\delta_2 + \alpha_3^2\delta_3$$

$$\sigma_x = \alpha_1^2\sigma_1 + \alpha_2^2\sigma_2 + \alpha_3^2\sigma_3$$

E shumëzojmë (3) me radhë me α_i^2 dhe fitojmë:

$$\sigma_{xx} = 2\mu\delta_{xx} + \lambda\,(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)\,(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)$$

dhe me që vlen

$$\sum \alpha_i^2 = 1 \quad \text{dhe} \quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \delta_{xx} + \delta_{yy} + \delta_{zz}$$

do të kemi:

$$\sigma_{xx} = 2\mu\delta_{xx} + \lambda\,(\delta_{xx} + \delta_{yy} + \delta_{zz}) \tag{4}$$

dhe në mënyrë të ngjashme për σ_{yy} dhe σ_{zz}.

Po ashtu nga formulat tjera të (X.1.18) kemi:

$$\delta_{xy} = \alpha_1\beta_1\delta_1 + \alpha_2\beta_2\delta_2 + \alpha_3\beta_3\delta_3$$

$$\sigma_{xy} = \alpha_1\beta_1\delta_1 + \alpha_2\beta_2\delta_2 + \alpha_3\beta_3\delta_3$$

Kur me radhë (3) shumëzohet me $\alpha_i\beta_i$ fitojmë:

$$\sigma_{xy} = 2\mu\delta_{xy} + \lambda\,(\beta_1\alpha_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)\,(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)$$

dhe meqë vlen

$$\sum \alpha_i\beta_i = 0$$

fitojmë:

$$\sigma_{xy} = 2\mu\delta_{xy} \tag{5}$$

dhe në mënyrë të ngjashme për komponentet tjera të tensionit.

Formulat (3) dhe (4) shprehin varshmërinë e tensioneve prej deformimeve. Shpeshherë është e nevojshme t'i shprehim anasjelltas. Që të fitojmë këtë do t'i mbledhim të gjitha formulat (3). Fitojmë:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = (2\mu + 3\lambda)\,(\delta_{xx} + \delta_{yy} + \delta_{zz})$$

dhe nga (4)

$$\delta_{xx} = \frac{1}{2\mu}\left[\sigma_{xx} - \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\right]\,(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \tag{6}$$

dhe në mënyrë të ngjashme

Nga (5) kemi:

$$\delta_{xy} = \frac{1}{2\mu}\,\sigma_{xy} \tag{7}$$

dhe në mënyrë të ngjashme.

Sikurse shohim në këto formula paraqiten dy konstante λ dhe μ të cilat janë specifike për mjedis elastik. I quajmë konstante të Lames për elasticitet. Meqë këto nuk kanë kuptim të caktuar fizik në vend të tyre do të paraqesim dy konstante tjera të cilat definohen nga të dhënat eksperimentale, në këtë mënyrë.

Të mendojmë thuprën e cila nga njëra anë është e përforcuar kurse në anën tjetër vepron forca e cila e zgjatë. Atëherë tensioni është:

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

ku me S e kemi shënuar sipërfaqen e prerjes së thuprës. Meqë ky vetëm e zgjatë thuprën, njëkohësisht paraqet tension kryesor. Zgjatja kryesore e thuprës është:

$$\delta = \frac{\Delta l}{l}$$

ku l është gjatësia fillestare,kurse Δl zgjatja. Herësi

$$\frac{\sigma}{\delta} = E \tag{8}$$

është konstant dhe quhet modul i elasticitetit ose modul i Jangut. Kjo madhësi përcaktohet eksperimentalisht dhe për çdo material e gjejmë në tabela të konstanteve specifike.

Zgjatjen e thuprës gjithmonë e përcjell edhe ngushtimi i prerjes tërthore. Herësi në mes të zvogëlimit të prerjes δ' dhe zgjatjes së gjatësisë δ

$$\frac{\delta'}{\delta} = -\nu \tag{9}$$

paraqet një konstante tjetër specifike për material dhe quhet konstant e Puasonit. Me ndihmën e saj përcaktohet ngushtimi tërthor:

$$\delta' = -\nu\delta = -\frac{\nu}{E}\,\sigma \tag{10}$$

Nëse në vend të tensionit normal vepron forca tangjentore T sikurse në fig. 58, atëherë tensioni tangjentor $\tau = T/S$ shkakton deformimin e prerjes. Madhësinë e kësaj prerje e përcaktojmë me këndin γ për të cilin zvogëlohet këndi i drejtë. Marrëdhënia

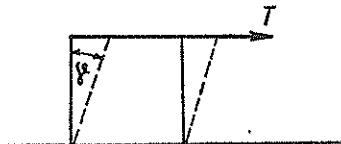


Fig. 58

$$\frac{\tau}{\gamma} = G \qquad (11)$$

është konstante dhe quhet modul i prerjes.

Në vazhdim do të gjejmë lidhjen në mes të konstanteve elastike eksperimentale dhe atyre teorike. Kjo më së lehti arrihet nga (11). Nëse në trup elastik e vendosim sistemin e koordinateve kështu që boshti x e ka kahun e gjatësisë së tij atëherë komponenta tangjentore e tensionit është:

$$\tau = \sigma_{xy}$$

Pastaj e dijmë nga (X.2.5) se γ të cilin atje e kemi shënuar me $\gamma_1 + \gamma_2$ është i barabartë me $2\delta_{xy}$, kështu që vlen

$$\frac{\sigma_{xy}}{2\delta_{xy}} = G$$

kurse nga (5)

$$\sigma_{xy} = 2\mu\delta_{xy}$$

që tregon se

$$\mu = G \qquad (12)$$

Pra koeficienti μ është identik me modulin e prerjes.

Që të përcaktojmë lidhjet me konstante tjera të mendojmë elementin e vëllimit me brinjë paralele me boshtet e koordinatave në të cilin veprojnë tensionet kryesore σ_1, σ_2, σ_3. Deformimi δ_1 është rezultat i zgjatjes nga σ_1 dhe shkurtimit nga σ_2 dhe σ_3. Sipas formmuleve (8) dhe (9)

$$\delta_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1+\nu}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

apo në rast të përgjithshëm

$$\delta_i = \frac{1+\nu}{E}\sigma_i - \frac{\nu}{E}\sum \qquad (13)$$

ku $\sum = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ **(14)**

Duke i mbledhur këto shprehje fitojmë:

$$\Theta = \frac{1-2\nu}{E} \sum \text{ ose } \sum = \frac{E}{1-2\nu} \Theta$$

kurse zëvendësimi në (13) na jep

$$\sigma_i = \frac{E}{1+\nu} \left(\delta_i + \frac{\nu}{1+2\nu} \Theta \right) \tag{15}$$

Shprehja e fundit duhet të jetë identike me (2). Duke i krahasuar fitojmë:

$$2\mu = \frac{E}{1+\nu}, \ \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{16}$$

Në këtë mënyrë koeficientët e Lames i kemi shprehur me ndihmën e modulit të elasticitetit dhe konstantes së Puasonit.

5. EKUACIONI I LËVIZJES SË TRUPIT ELASTIK

Të mendojmë në trup elastik elementin e vëllimit me brinjë paralele me boshtet e koordinatave. Ekuacioni i lëvizjes së këtij elementi është:

$$\rho \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} = \sum \vec{F}_i \tag{1}$$

Këtu me ρ e kemi shënuar dendësinë, me $\vec{s}$ zhvendosjen, kurse në anën e djathtë gjendet shuma e të gjitha forcave të cilat veprojnë në këtë element, kështu që çdonjëra ka të bëjë me njësi të vëllimit. Për këtë arsye në anën e majtë e kemi shënuar masën e njësisë së vëllimit. Në element të shqyrtuar veprojnë tensionet elastike dhe forcat e jashtme. Do të përcaktojmë komponenten x të këtyre forcave. Në sipërfaqen normale ndaj boshtit x vepron tensioni σ_{xx} i cili jep formën $\sigma_{xx} dy\, dz$, sepse $dy\, dz$ paraqet madhësinë e sipërfaqes së shqyrtuar. Në sipërfaqen e majtë të elementit të vëllimit, sikurse shihet nga fig. 59 kjo forcë është negative

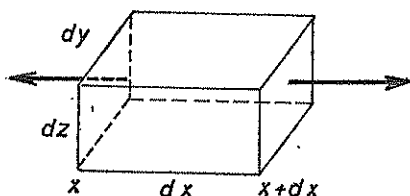


Fig. 59

$$-\sigma_{xx}(x)\, dy\, dz$$

kurse në anën e djathtë kjo forcë është

$$\sigma_{xx}(x+dx)\, dy\, dz$$

Vlerën e tensionit në vendin me abshizë $x + dx$ e përcaktojmë me serinë e Tejlorit

$$\sigma_{xx}(x + dx) = \sigma_{xx}(x) + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\, dx \qquad (2)$$

Kur t'i mbledhim kontributet e të dy sipërfaqeve fitojmë:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t}\, dx\, dy\, dz$$

Në mënyrë të ngjashme fitohen x-komponentet e forcës të cilat veprojnë në sipërfaqet e elementit që janë normal në boshtin y,

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y}\, dy\, dx\, dz$$

kurse ato të cilat veprojnë në sipërfaqe normale të boshtit z

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$$

Pra tensionet e x-komponentes kontribuojnë me forcën:

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

Pasi që forcat i njehsojmë në njësi të vëllimit, këtë duhet pjesëtuar me $dx\ dy\ dz$. Kur t'i shtojmë edhe x-komponenten e forcave të jashtme fitojmë:

$$\sum F_{ix} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + F_x \qquad (3)$$

Në vend të elementeve të tenisonit σ_{ik} do të paraqesim elementet e deformimit sipas (X.4.4 dhe 5). Do të kemi:

$$\sum F_{ix} = 2\mu\, \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \lambda\, \frac{\partial \Theta}{\partial x} + 2\mu\, \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + 2\mu\, \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + F_x$$

I zëvendësojmë për δ_{ik} vlerat nga (X.1.7)

$$\sum F_{ix} = 2\mu\, \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \lambda\, \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z}\right) + F_x =$$

$$= \mu\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right) + \lambda\, \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu\, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) + F_x$$

Sipas (X.1.19) shprehja në kllapën e fundit është e barabartë me Θ kurse në kllapën e parë gjendet shprehja e operatorit të Laplasit. Mund të shkruajmë shkurtimisht:

$$\sum F_{ix} = \mu\Delta\xi + (\lambda + \mu)\ \frac{\partial\Theta}{\partial x} + F_x$$

Në mënyrë të ngjashme fitojmë edhe për komponentet tjera të formës. Të gjitha i shkruajmë në formë vektoriale:

$$\sum F_i = \mu \Delta s + (\lambda + \mu)\ grad\,\Theta + \vec{F}$$

E dijmë nga (X.1.19) se $\Theta = div\,\vec{s}$ dhe kur të gjitha i zëvendësojmë në (1) fitojmë ekuacionin e lëvizjes:

$$\rho\ \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} = \mu \Delta s + (\lambda + \mu)\ grad\ div\,\vec{s} + \vec{F} \qquad (4)$$

Konditën për ekuilibrim të trupit elastik e fitojmë kur zëvendësojmë $d^2s/dt^2 = 0$, sepse atëherë trupi gjendet në qetësi. Kjo konditë është:

$$\mu \Delta \vec{s} + (\lambda + \mu)\ grad\,\Theta + \vec{F} = 0 \qquad (5)$$

Kështu kemi fituar ekuacionin themelor të statikës së trupit elastik.

6. PËRKULJA E THUPRËS ELASTIKE

Le të jetë e përforcuar në njërin skaj thupra me gjatësi l dhe prerje tërthore konstante. Në pjesën e lirë të saj le të veprojë forca F në kah normal të gjatësisë. Nga veprimi i kësaj force thupra do të përkulet.

Teorinë e përkuljes së thuprës elastike e ka paraqitur Bernuli, të cilën do ta paraqesim.

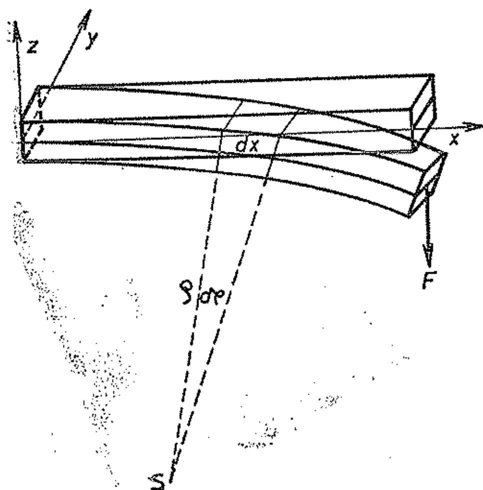


Fig. 60

Të mendojmë se thuprën mund ta ndajmë në shtresa shumë të holla me rrafshe paralele. Para veprimit të forcës shtresat janë të rrafshta dhe njësoj të gjata. Kur vepron forca, thupra përkulet, së bashku me të edhe shtresat, por edhe gjatësitë e tyre ndryshojnë. Në thupër ekziston një shtresë e cila vetëm përkulet, por gjatë kësaj e ruan gjatësinë e mëparshme. Këtë shtresë e quajmë shtresë neutrale. Nga fig. 60 shohim se të gjitha shtresat mbi shtresën neutrale janë zgjatur, kurse ato nën të janë shkurtuar. Pra, derisa shtresat e larta janë deformuar me zgjatje ato të ulëta deformohen me shkurtim. Këto deformime janë më të mëdha sa më larg gjenden shtre-

sat nga shtresa neutrale. Do të vendosim boshtin x për së gjati të thuprës së padeformuar, kurse normal ndaj gjatësisë në rrafshin e përkuljes boshtin z sikurse tregon figura.

Do të marrim në shtresën neutrale një gjatësi të vogël dx dhe do të shikojmë prerjen tërthore të thuprës në skaje të saj. Para deformimit prerjet janë paralele, por në thuprën e përkulur do të mbyllin një kënd të vogël $d\varphi$, kurse rrafshet e prerjes tërthore prehen në qendër të përkulshmërisë S të shtresës neutrale. Rrezja e përkulshmërisë së kësaj shtrese në vendin e shikuar është ρ, kurse gjatësia e harkut $\rho d\varphi$. Nëse shqyrtojmë ndonjë shtresë tjetër të larguar për z nga shtresa neutrale, atëherë gjatësia e harkut të saj është $(\rho + z)d\varphi$. Prandaj ndryshimi i gjatësive të këtyre dy shtresave është:

$$(\rho + z)d\varphi - \rho d\varphi = z d\varphi$$

që të fitojmë deformimin relativ duhet ta pjesëtojmë me gjatësinë fillestare dx. Fitojmë:

$$\delta = z \frac{d\varphi}{dx} \qquad (1)$$

Meqë është:

$$dx = \rho d\varphi$$

fitojmë:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{\rho}$$

Prandaj deformimi relativ është:

$$\delta = \frac{z}{\rho} \qquad (2)$$

Pjesën e forcës e cila vepron në elementin e shqyrtuar të thuprës e shënojmë me df, kurse për tension do të kemi:

$$\sigma = \frac{df}{dy\,dz} \qquad (3)$$

Sipas formulës (X.4.8) kemi:

$$\frac{df}{dy\,dz} = E\frac{z}{\rho}$$

ose

$$df = \frac{E}{\rho} z\,dz\,dy$$

Për të fituar tërë forcën duhet të integrojmë nëpër tërë sipërfaqen

$$f = \frac{E}{\rho} \int\int z \, dz \, dy \qquad (4)$$

Në gjendje ekuilibrimi kjo forcë duhet të jetë e barabartë me zero.

$$\int\int z \, dz \, dy = 0 \qquad (5)$$

Në anën e majtë gjendet shprehja për përcaktimin e z-komponentes së rëndimit të prerjes së thuprës. Meqë $z = 0$ përcakton shtresën neutrale, rrjedh përfundimi se shtresa neutrale e thuprës gjithmonë kalon nëpër qendër të rëndimit të prerjes së saj. Kështu e kemi përcaktuar pozitën e shtresës neutrale. Pra kur thupra e ka prerjen e formës së katërkëndëshit, atëherë shtresa neutrale kalon nëpër pikën e prerjes së diagonaleve, kurse kur e ka formën e rrethit atëherë kalon nëpër qendër të tij.

Forcat elastike tentojnë ta drejtojnë thuprën. Pra tentojnë ta rrotullojnë prerjen e thuprës rreth një boshti i cili është paralel me boshtin y. Prandaj forcat elastike e japin një moment intensiteti i së cilit është:

$$|M| = \int z \, df = \frac{E}{\rho} \int\int z^2 \, dy \, dz \qquad (6)$$

Integrali në këtë shprehje na përkujton integralin për njehsimin e momentit të inercionit. Ndryshon prej tij vetëm pse nuk figuron masa. Do ta quajmë moment sipërfaqësor i inercionit dhe e shkruajmë:

$$J = \int\int z^2 \, dy \, dz \qquad (7)$$

Duke shfrytëzuar këtë shënim (6) merr formën

$$|M| = \frac{E}{\rho} J \qquad (8)$$

Momenti sipërfaqësor i inercionit të prerjes së thuprës varet prej formës së saj. Për prerje të formës katërkëndëshi me gjerësi a dhe lartësi b me integrim fitojmë:

$$J = \frac{1}{12} a b^3 \qquad (9)$$

kurse për prerje rrethore me rreze R fitohet:

$$J = \frac{1}{4} R^4 \qquad (10)$$

Momenti i rrotullimit të sipërfaqes së prerjes së thuprës, është rezultat i momentit të forcës F e cila vepron në skaj të thuprës. Nëse elementi i shikuar e ka abshisën x, atëherë nga fundi i thuprës është i larguar për $l-x$, prandaj forca F në këtë prerje vepron me momentin

$$M = F(l - x) \tag{11}$$

E barazojmë me (8) dhe fitojmë:

$$\frac{E\,J}{\rho} = F(l - x) \tag{12}$$

Me ndihmën e kësaj shprehje do të përcaktojmë ekuacionin e shtresës neutrale të thuprës së përkulur. Meqë përkulja është relativisht e vogël mund të përafrojmë kësisoji

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2z}{dx^2} \tag{13}$$

Parashenja minus duhet shkruar ngase pjesa konkave e shtresës neutrale është e kthyer në kah negativ të boshtit z.

Pasi të zëvendësojmë (13) në (12) fitojmë ekuacionin diferencial të përkuljes së shtresës neutrale:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{F}{E\,J}(l - x) \tag{14}$$

E integrojmë:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{F}{E\,J}\,lx - \frac{x^2}{2} + C_1$$

dhe për së dyti:

$$z = -\frac{F}{E\,J}\left(l\,\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_1x + C_2 \tag{15}$$

Meqë vlen: për $x = 0$, $z = 0$, $z' = 0$, atëherë $C_1 = 0$ dhe $C_2 = 0$ atëherë në (15) ngel:

$$z = -\frac{F}{E\,J}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \tag{16}$$

Shohim se shtresa neutrale përkulet në formë të parabolës kubike. Nëse dëshirojmë të dijmë për sa është lëshuar krahu i lirë i thuprës, atëherë në (16) duhet zëvendësuar $x = l$. Fitojmë:

$$z_l = -\frac{F}{EJ}\frac{l^3}{3} \tag{17}$$

Pra, për thupër me prerje tërthore të formës katërkëndëshi, krahu i lirë zhvendoset për gjatësi të shprehur me (17). Te thuprat me prerje tërthore rrethore kjo madhësi është proporcionalisht e zhdrejtë me shkallën e katërt të rrezes rrethore.

7. PËRDREDHJA E CILINDRIT RRETHOR

Të mendojmë cilindrin rrethor me lartësi l dhe rreze të prerjes tërthore R. Supozojmë se njëra bazë e tij është e përforcuar, kurse në tjetrën vepron një moment rrotullues M i cili e rrotullon për një kënd ϕ rreth boshtit të cilindrit. Cilindri do të deformohet në atë mënyrë që shtresat e veçuara të tij rrotullohen ndaj shtresave fqinjë për një kënd të vogël. Nga kjo, drejtimet në mbështjellës deformohen në formë spiraleje. Deformimi i këtillë quhet përdredhje e cilindrit. Të cekim se me përdredhje janë të ngarkuara të gjitha boshtet, kur ndonjë moment rrotullues i rrotullon rreth boshteve të tyre gjeometrike.

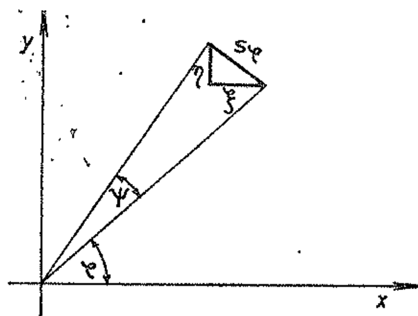


Fig. 61

Do të shfrytëzojmë sistemin e koordinatave cilindrike me bosht i cili qëndront në bosht të cilindrit. Në këtë sistem zhvendosjet e përdredhjes paraqiten vetëm në kah të ndërrimit të koordinatës φ. Prandaj mund të shkruajmë:

$$s_r = 0,\ s_z = 0 \tag{1}$$

Nga fig. 61 shohim se vlen

$$s_\varphi = r\phi \tag{2}$$

Kalojmë në koordinata kënddrejta të cilat janë të lidhura me koordinatat cilindrike me formulat

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned} \tag{3}$$

Nga figura shohim se

$$\xi = -s_\varphi \sin\varphi = -r\phi\sin\varphi$$

kurse nga (3)

$$\xi = -\psi y \tag{4}$$

Në mënyrë të ngjashme fitojmë:

$$\eta = s \quad \cos\varphi = r\psi \cos\varphi$$

ose

$$\eta = \psi x \tag{5}$$

dhe

$$\zeta = s_z = 0 \tag{6}$$

Pasi i kemi gjetur zhvendosjet, lehtë mund t'i përcaktojmë elementet e tenzorit të deformimit. Nga (X.1.7) kemi:

$$\delta_{xx} = \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad \delta_{yy} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad \delta_{zz} = \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0$$

$$\delta_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = 0 \tag{7}$$

$$\delta_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) = -\frac{y}{2}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \delta_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) = \frac{x}{2}\frac{\partial \psi}{\partial z}$$

Tani do t'i përcaktojmë elementet e tenzorit të tensionit. Sipas formulave (X.4.4 dhe 5) rrjedh:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0$$

$$\sigma_{xz} = 2\mu\delta_{xz}, \quad \sigma_{yz} = 2\mu\delta_{yz} \tag{8}$$

Shkruajmë:

$$\mu = G$$

dhe zëvendësojmë në (7)

$$\sigma_{xz} = -Gy\frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$\sigma_{yz} = Gx\frac{\partial \psi}{\partial z} \tag{9}$$

Peshën e cilindrit nuk do ta marrim në konsiderim, sepse nuk ka ndikim të theksuar. Për këtë arsye në formulat (X.5.3) në anën e djathtë nuk vijnë në shprehje komponentet e forcave të jashtme. Nëse dëshirojmë të paraqesim kondicat e ekuilibrimit, atëherë shuma e të gjitha forcave duhet të jetë e barabartë me zero, prandaj bien edhe anëtarët në anën e majtë të tyre. Mbetet:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

Pasi t'i zëvendësojmë vlerat nga (8) dhe (9) fitojmë ekuacionet:

$$\begin{aligned} - Gy \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= 0 \\ Gx \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= 0 \\ - Gy \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + Gx \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Dy ekuacionet e para japin:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

ose

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = a = const. \tag{11}$$

Kjo shprehje tregon se këndi ψ ndërron me shpejtësi konstante me lartësinë. Me (11) edhe ektuacioni i tretë i (10) njëkohësisht është i kënaqur. Kur të zëvendësojmë në (9) shprehjen (11) fitojmë tensionet

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= - G\, y\, a \\ \sigma_{yz} &= G\, x\, a \end{aligned} \tag{12}$$

Do të marrim në çfarëdo prerje të cilindrit elementin e sipërfaqes:

$$dS = r\, dr\, d\varphi$$

Në këtë element tensionet veprojnë me komponente të forcës

$$\begin{aligned} d\,F_x &= \sigma_{xz} dS = - G\, y\, a\, r\, dr\, d\varphi \\ d\,F_y &= \sigma_{yz} dS = G\, x\, a\, r\, dr\, d\varphi \end{aligned} \tag{13}$$

Kjo forcë shkakton një moment rrotullimi rreth boshtit të cilindrit, komponentja e të cilit është:

$$d\,M_z = x\,dF_y - y\,d\,F_x$$

kurse me ndihmën e (13):

$$d\,M_z = G\,a\,r\,dr\,d\varphi\,(x^2 + y^2) = G\,a\,r^3 dr\,d\varphi \qquad (14)$$

Që të fitojmë tërë momentin duhet (14) ta integrojmë nëpër sipërfaqe të prerjes rrethore

$$M_z = G\,a \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3\,dr\,d\varphi = 2\pi\,G\,a\,\frac{R^4}{4}$$

$$M_z = \frac{1}{2}\,G\,a\,\pi\,R^4 \qquad (15)$$

E përcatktojmë këtë moment për sipërfaqen e sipërme të cilindrit. Supozojmë se nga përdredhja kjo është rrotulluar për këndin ψ_o. Nga (11) mund të shkruajmë:

$$a = \frac{\psi_o}{l}$$

kurse nga (15) fitojmë:

$$M_z = \frac{1}{2}\,G\,R^4\,\pi\,\frac{\psi_o}{l} \qquad (16)$$

Ky moment i rrotullimit ekuilibrohet me momentin M të forcës e cila e shkakton përdredhjen.

Nga (16) fitojmë këndin e rrotullimit të bazës së lirë të cilindrit

$$\psi_o = \frac{2Ml}{G\pi R^4} \qquad (17)$$

Shohim se ky kënd është proporcional me gjatësinë e cilindrit dhe të momentit që e shkakton përdredhjen dhe proporcional i zhdrejtë me shkallën e katërt të rrezes së cilindrit.

8. OSHILIMET E TRUPAVE ELASTIKË

Trupat elastikë mund t'i kryejnë tri lloje të lëvizjeve oshiluese. Këto janë oshilimet të cilat paraqiten për shkak të zgjatjes së trupit, oshilimet nga përdredhja dhe oshilimet të cilat paraqiten nga përkulja e trupit. Do të shqyrtojmë çdonjërën prej tyre.

a) Oshilimet e zgjatjes

Le të kemi një thupër vertikale nga materiali elastik të përforcuar në njërin skaj, kurse në tjetrin është e varur masa m. Nga pesha e kësaj mase thupra do të zgjatet, kurse kjo do të gjendet në pozitën e vet ekuilibruese. Nëse këtë masë e zhvendosim te lart apo teposhtë dhe e lëshojmë të lëvizë, sikurse do të shohim trupi do të oshilojë.

Origjinën e sistemit koordinat e vendosim në skajin e lartë të thuprës me boshtin z në kah të gjatësisë së kthyer teposhtë. E dijmë se zgjatja relative e thuprës është e lidhur me tensionin sipas shprehjes:

$$\delta = \frac{\sigma}{E} \tag{1}$$

ku: E është moduli i elasticitetit të materialit. Le të jetë gjatësia e thuprës l. Nëse z është gjatësia e thuprës së ngarkuar, atëherë

$$\delta = \frac{z-l}{l} \tag{2}$$

E shënojmë me F forcën e cila vepron në skajin e lirë të thuprës, kurse me S sipërfaqen e prerjes tërthore të saj. Për tension do të kemi

$$\sigma = \frac{F}{S} \tag{3}$$

Për forcë e cila vepron duhet të merret pesha e trupit të varur, por nëse trupi lëviz duhet shtuar edhe forcën inerciale — $m\ddot{z}$. Pra,

$$F = mg - m\ddot{z} \tag{4}$$

Nga (1), (3) dhe (4) fitojmë:

$$\frac{z-l}{l} = \frac{mg - m\ddot{z}}{ES} \tag{5}$$

Paraqesim zëvendësimin

$$z = u + l + \frac{mgl}{ES} \tag{6}$$

kurse (5) merr formën:

$$\frac{u}{l} + \frac{mg}{ES} = \frac{mg}{ES} + \frac{m\ddot{u}}{ES}$$

ose

$$\ddot{u} + \frac{E\,S}{m\,l}\,u = 0 \tag{7}$$

Me shkurtim shënimi:

$$\omega^2 = \frac{E\,S}{m\,l} \tag{8}$$

(7) kalon në

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \tag{9}$$

Ky është ekuacioni diferencial i oshilimeve harmonike, zgjidhja e të cilit na është e njohur. Shkruajmë:

$$u = A \sin(\omega t + \varphi) \tag{10}$$

Kur e zëvendësojmë në (6) fitojmë:

$$z = l + \frac{m\,g\,l}{E\,S} + A \sin(\omega t + \varphi) \tag{11}$$

Kjo shprehje tregon se skaji i thuprës me koordinatë z ndërron në mënyrë oshiluese rreth gjatësisë:

$$z_o = l + \frac{m\,g\,l}{E\,S} \tag{12}$$

Kjo gjatësi i përgjigjet pozitës ekuilibruese të oshilimeve dhe përbëhet prej gjatësisë l dhe zgjatjes së saj nga ngarkesa.

Frekuencën e oshilimeve e gjejmë nga (8)

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{E\,S}{m\,l}} \tag{13}$$

Kjo tregon se frekuenca është proporcionale me rrënjën e sipërfaqes së prerjes së thuprës dhe të modulit të elasticitetit, por proporcionale e zhdrejtë me rrënjën e gjatësisë dhe masës së varur në të.

b) Oshilimet e përdredhjes

Teli i hollë cilindrik me gjatësi l dhe rreze R le të jetë i varur në njërin skaj, kurse në skajin tjetër të tij vepron një moment rrotullimi M. Rrotullimi kryhet në rrafshin e prerjes së tij. Këtë kënd e shënojmë me ψ.

Nga lëvizja rrotulluese e trupit të ngurtë kemi:

$$M = - J \ddot{\psi} \tag{14}$$

ku: J është momenti i inercionit. Kemi treguar në (X.7.17) se për kënd të përdredhjes fitohet formula:

$$\psi = \frac{2 M l}{G \pi R^4} \tag{15}$$

ku: G është moduli i përdredhjes së materialit të telit. E zëvendësojmë (14) në (15) dhe fitojmë:

$$\psi = \frac{2 J l}{G \pi R^4} \ddot{\psi}$$

ose

$$\ddot{\psi} + \frac{G \pi R^4}{2 J l} \psi = 0 \tag{16}$$

Duke zëvendësuar konstantën para ndryshores ψ me ω^2, (16) merr formën:

$$\omega^2 = \frac{G \pi R^4}{2 J l} \tag{17}$$

$$\ddot{\psi} + \omega^2 \psi = 0 \tag{18}$$

Edhe ky është i njëjti ekuacion sikurse më parë, prandaj zgjidhja e tij është:

$$\psi = \psi_o \sin (\omega t + \delta) \tag{19}$$

Skaji i poshtëm i telit rrotullohet këndej-andej rreth pozitës ekuilibruese duke kryer oshilime harmonike. Këto oshilime janë rezultat i përdredhjes së telit. Frekuenca e tyre përcaktohet nga (17)

$$\nu = \frac{R^2}{2\pi} \sqrt{\frac{G \pi}{2 J l}} \tag{20}$$

Shohim se frekuenca është proporcionale me katrorin e rrezes së telit, por proprocionale e zhdrejtë me rrënjën katrore të gjatësisë së telit dhe momentit të inercionit.

c) Oshilimet e përkuljes

Le të jetë njëri skaj i thuprës i përforcuar, kurse tjetri i ngarkuar me një masë m. Nëse e përkulim atë, e pastaj e lëshojmë, atëherë skaji i lirë do të kryejë lëvizje oshiluese.

Sipas formulës (X.6.17) skaji i lirë i thuprës përkulet për gjatësinë:

$$z = - \frac{F}{EJ} \frac{l^3}{3} \tag{21}$$

këtu me J kemi shënuar momentin e inercionit të prerjes së thuprës. Nëse kjo ka formë katërkëndëshi, atëherë:

$$J = \frac{ab^3}{12} \tag{22}$$

Për forcë duhet të marrim forcën inerciale e cila ekziston nga lëvizja e masës e cila është e përforcuar në skajin e lirë të thuprës. Pra,

$$F = - m \ddot{z} \tag{23}$$

Zëvendësojmë në (21)

$$z = - \frac{m}{EJ} \frac{l^3}{3} \ddot{z} \tag{24}$$

Duk shfrytëzuar (22) për thupër me prerje tërthore katërkëndëshi fitojmë ekuacionin e lëvizjes:

$$\ddot{z} + \frac{E a b^3}{4 m l^3} z = 0 \tag{25}$$

Ky kalon në ekuacion të oshilimeve harmonike, nëse për konstante shënojmë:

$$\omega^2 = \frac{E a b^3}{4 m l^3} \tag{26}$$

Zgjidhja e ekuacionit

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0 \tag{27}$$

është:

$$z = z_o \sin (\omega t + \delta) \tag{28}$$

dhe tregon se lartësia e skajit të lirë të thuprës ndërron në mënyrë oshiluese. Frekuenca e lëkundjeve përcaktohet nga (26) dhe e ka vlerën:

$$\nu = \frac{b}{4\pi l}\sqrt{\frac{E\,a\,b}{m\,l}} \tag{29}$$

Në fund duhet cekur se perioda përkatësisht frekuenca e oshilimeve mund të matet mjaft lehtë. Kësisoji formulat e fituara mund t'i shfrytëzojmë për përcaktimin e modulit të elasticitetit d.m.th. modulin e përdredhjes së disa materialeve.

9. VALËT E RRAFSHTA NË MJEDIS PA MBARIM ELASTIK

Ekuacioni i lëvizjes së trupit elastik (X.5.4) thjeshtësohet mjaft nëse supozojmë se në të nuk veprojnë forcat e jashtme. Prandaj do të supozojmë se $\vec{F} = 0$ dhe se zhvendosja $\vec{s}$ varet vetëm prej ndryshores x. Për komponente të zhvendosjes fitojmë këto ekuacione:

$$\begin{aligned} \rho\,\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= (2\mu+\lambda)\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} \\ \rho\,\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= \mu\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} \\ \rho\,\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= \mu\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} \end{aligned} \tag{1}$$

Këto janë ekuacionet e valëve të rrafshta të cilat përhapen në kah të x. Kjo do të thotë se një turbullirë në mjedis elastik përhapet nëpër të në formë të valëve.

Meqë x paraqet kahun e valëve, duhet të dallojmë dy lloje valësh: longitudionale me zhvendosjen ξ dhe transverzale me zhvendosjet η dhe ζ. Sipas formulës së përgjithshme për valë të rrafshta, koeficienti përpara $\partial^2/\partial x^2$ është i barabartë me katrorin e shpejtësisë së përhapjes së valëve. Nga formulat tona për valë longitudionale kemi këtë shpejtësi:

$$c_l = \sqrt{\frac{2\mu+\lambda}{\rho}}$$

kurse nga (X.4.16) kemi:

$$2\mu+\lambda = \frac{E}{1+\nu} + \frac{E\nu}{(1+\nu)\,(1-2\nu)} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)\,(1-2\nu)}$$

Prandaj

$$c_l = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)\,(1-2\nu)}} \tag{2}$$

Për shpejtësi të valëve transverzale fitojmë formulën:

$$c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

dhe pasi të zëvendësojmë vlerën e μ do të kemi për shpejtësi të përhapjes

$$c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \qquad (3)$$

Këto rezultate tregojnë se valët longitudionale dhe transverzale nuk përhapen me të njëjtën shpejtësi në mjedis elastik. Te valët e termeteve më shpejt përhapen valët longitudionale se transverzale, prandaj edhe më përpara arrijnë deri te aparati i matjes. Nga ndryshimi i këtyre shpejtësive mund të caktohen vetitë elastike të korës së Tokës.

Njehsimet tona vlejnë vetëm për mjedise të pakufizuara. Sikur mjedisi të ishte i kufizuar atëherë duhet marrë në konsiderim edhe kondiitat kufitare.

Në rast se trupi elastik e ka formën e thuprës së hollë dhe është mjaft i gjatë, ashtu që dimensionet tërthore janë të vola në krahasim me këtë gjatësi, shkurtimi i prerjes tërthore te valët longitudionale mund të mos përfillet. Atëherë $\nu = 0$, kurse shprehja (2) thjeshtësohet në

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (4)$$

E dijmë se valët e tingullit paraqesin valë longitudionale, prandaj shprehja e fundit paraqet shpejtësinë e përhapjes së valëve të tingullit në thupër elastike.

XI. HIDROMEKANIKA

1. EKUACIONI THEMELOR I HIDROSTATIKËS

Në fizikën teorike me emrin fluid kuptojmë edhe lëngjet edhe gazet, sepse ligjet mekanike për këto dy gjendje agregate janë të njëjtë. Ndryshimi paraqitet vetëm në ndrydhshmërinë e tyre. Përderisa lëngjet shprehin rezistencë të madhe ndaj zvogëlimit të vëllimit të vet, gazet tregojnë ngjeshje mjaft të madhe, pra vëllimi i tyre mund të zvogëlohet mjaft. Ne do të shqyrtojmë në kuadër të hidromekanikës së bashku edhe mekanikën e lëngjeve edhe mekanikën e gazeve. Vetëm te ato dukuri ku ekzistojnë dallime të theksuara si të tilla do t'i shqyrtojmë veçmas.

Së pari do të përqëndrojmë vëmendjen në statikën e fluideve, pra të fluideve të cilat janë në qetësi ndaj enëve në të cilat gjenden.

Në fluide ekzistojnë dy lloje të forcave. Të parat veprojnë në vëllim të fluidit, kurse të dytat në sipërfaqen e tij.

Forcat të cilat veprojnë në vëllim të fluidit do t'i shprehim si forca në njësi të vëllimit $\vec{f}$. Meqë forca ndërron nga vendi në vend, do ta ndajmë vëllimin në elemente shumë të vogla $d\tau$. Në një element të këtillë vepron forca $f \cdot d\tau$. Që të fitojmë forcën e cila vepron në tërë vëllimin, duhet t'i mbledhim kontributet për forcë nga të gjitha elementet. Fitojmë integralin vëllimor $\int \vec{f} \cdot d\tau$.

Forcat të cilat veprojnë në sipërfaqe të fluidit i quajmë presione. Si presion definohet forca e cila vepron në njësi të sipërfaqes. Do ta shënojmë me p. Edhe kjo forcë varet funksionalisht nga vendi i veprimit, prandaj sipërfaqen e ndajmë në elemente të vogla të saj dS. Në një element të këtillë të sipërfaqes vepron forca $-p.d\vec{S}$. Këtu duhet shënuar parashenjën minus, sepse si kah pozitiv të normales në sipërfaqe e marrim kahun nga jashtë, kurse presioni vepron në kah të kundërt. Që të fitojmë tërë forcën e cila vepron në sipërfaqe, duhet të integrojmë nëpër tërë sipërfaqen e fluidit. Fitojmë integralin $-\oint p\, dS$.

Meqë forca tjera nuk ka, kurse për ekuilibrim duhet që shuma e të gjitha forcave të jetë e barabartë me zero, do të kemi:

$$\int \vec{f}\, d\tau - \oint p\, d\vec{S} = 0$$

Integralin sipërfaqësor e shndërrojmë në integral vëllimor duke shfrytëzuar teoremën e Gausit

$$\oint p\, d\vec{S} = \int grad\, p\, d\tau$$

Prandaj

$$\int (\vec{f} - grad\, p)\, d\tau = 0$$

Që të jetë e kënaqur për të gjitha forcat, funksioni nën integral duhet të jetë i barabartë me zero

$$\vec{f} - grad\, p = 0 \qquad (1)$$

Ky është ekuacioni themelor diferencial i hidrostatikës dhe jep mundësi që nga shpërndarja e njohur e forcave të jashtme të përcaktojmë shpërndarjen e presioneve.

2. PRESIONI HIDROSTATIK

a) Ligji i presionit hidrostatik

Të supozojmë se fluidi është në ekuilibrim nën veprimin e peshës së vet. Atëherë si forcë e jashtme $\vec{f}$ paraqitet pesha e njësisë së vëllimit. Masën e njësisë së vëllimit e shënojmë me ρ dhe kur ta shumëzojmë me nxitimin e rëndimit tokësor $\vec{g}$ fitojmë peshën. Do të shfrytëzojmë sistemin e koordinatave në të cilin boshti z e ka kahun e forcës së rëndimit (vertikalisht teposhtë). Nëse me $\vec{k}$ e shënojmë vektorin unitar të këtij drejtimi, për forcë do të kemi:

$$\vec{f} = \rho g\, \vec{k}$$

E zëvendësojmë në ekuacionin themelor të hidrostatikës:

$$\rho g\, \vec{k} - grad\, p = 0 \qquad (1)$$

Është e qartë se vektori *grad p* duhet të ketë kahun e $\vec{k}$, prandaj shkruajmë vetëm komponenten z të formulës (1). Do të kemi:

$$\rho g - \frac{dp}{dz} = 0$$

Në këtë ekuacion diferencial për njehsimin e p mund t'i ndajmë ndryshoret

$$dp = \rho g\, dz$$

E integrojmë:

$$p = \rho g z + A$$

Nëse me p_o e shënojmë presionin i cili zotëron në vendin $z = 0$, për konstante të integrimit fitojmë, $A = p_o$ dhe formulën përfundimtare

$$p = p_o + \rho g z \tag{2}$$

Presioni i cili vepron në fluid për shkak të peshës vehtiake quhet presion hidrostatik. Formula (2) tregon se është proporcional me thellësin z.

Nëse kemi të bëjmë për lëng, atëherë origjinën e vendosim në sipërfaqe të lirë. Në këtë rast p_o është presioni atmosferik i cili vepron në sipërfaqen e lirë të lëngut, ndërsa anëtari $\rho g z$ paraqet peshën e shtyllës së lëngut e cila gjendet mbi njësinë e sipërfaqes në të cilën e masim presionin. Gjatë kësaj është e parëndësishme se a është ky presioni në fund të enës apo presioni në çfarëdo sipërfaqe tjetër, të themi në sipërfaqen e ndonjë trupi të ngurtë të zhytur në lëng. Me rëndësi është se në shprehje nuk paraqiten kurrfarë madhësish të cilat varen nga forma e enës. Prandaj në këtë formulë përmbahet edhe paradoksi i njohur hidrostatik, sipas të cilit presioni në fund të enës nuk varet nga forma e saj.

Formula (2) është përfituar nga supozimi se dendësia e fluidit është gjithkund e njëjtë. Prandaj si e tillë vlen për lëngje dhe gaze dendësia e të cilave është konstante.

b) Presioni atmosferik

Formula e përfituar (2) nuk mund të zbatohet për presion të atmosferës, sepse dihet se dendësia e ajrit në atmosferë zvogëlohet me lartësinë. Prandaj në atmosferën e lirë ekziston varshmëria funksionale e dendësisë nga presioni. Do të supozojmë se kjo varshmëri shprehet me ligjin e Boil-Mariotit

$$p\,V = konst.$$

Duke zbatuar këtë ligj paraqesim supozimin se temperatura e atmosferës në të gjitha lartësitë është e njëjtë. Kjo, kuptohet se nuk është e saktë, por rezultatet te të cilat na çon supozimi janë realizuar në kufij mjaft të gjerë.

E dijmë se lidhja në mes të vëllimit dhe dendësisë shprehet në formën:

$$V = \frac{m}{\rho}$$

E zëvendësojmë këtë në ligjin e Boil-Mariotit dhe i mbledhim të gjitha konstantet në një. Fitojmë:

$$\rho = C p \tag{3}$$

Do të marrim kahun pozitiv të boshtit z vertikalisht përpjetë. Në këtë rast pesha e njësisë së vëllimit të ajrit është:

$$\vec{f} = -\rho g \vec{k} = -C g p \vec{k}$$

dhe ekuacioni i hidrostatikës e merr formën:

$$C g p \vec{k} + grad\, p = 0$$

Edhe në këtë rast ekziston vetëm z-komponentja e gradientit, prandaj mund të shkruajmë:

$$\frac{dp}{dz} = -C g p$$

ose

$$\frac{dp}{p} = -C g\, dz$$

E integrojmë

$$ln\, p = -C g z + A$$

Për përcaktimin e konstantes së integrimit nisemi nga përvoja se në fund të atmosferës zotëron presioni p_o. Ky është presioni barometrik në lartësi të detit. Këtë lartësi e marrim për fillim të z, atëherë për $z = 0$ duhet të vlejë $p = p_o$, kurse konstantja A e ka vlerën

$$A = ln\, p_o$$

Fitojmë

$$p = p_o e^{-C g z} \tag{4}$$

Shohim se presioni në atmosferë zvogëlohet eksponencialisht me lartësinë. Shprehja (4) paraqet formulën për matjen barometrike të lartësisë. Në të vërtetë, në lartësi të mëdha presioni barometrik është i vogël, prandaj nga (4) dhe presionit barometrik të matur mund të njehsojmë lartësinë mbidetare të vendit të matjes.

c) Ligji i Arkimedit

Kur ndonjë trup zhytet në fluid, atëherë fluidi në trup vepron në të gjitha anët me presione. Rezultantja e të gjitha presioneve është një forcë e cila vepron te lartë. Quhet shtytje. Do të njehsojmë vlerën e forcës së shtytjes.

Në një element të sipërfaqes së trupit të zhytur vepron forca

$$d\vec{F} = -p\, d\vec{S}$$

kurse në tërë sipërfaqen e tij

$$\vec{F} = -\oint p\, d\vec{S}$$

E shndërrojmë këte integral në vëllimor

$$\oint p\, d\vec{S} = \int grad\, p\, d\tau$$

dhe për forcë kemi:

$$\vec{F} = -\int grad\, p\, d\tau$$

Nga formula (1) kemi:

$$grad\, p = \rho \vec{g}$$

ose

$$\vec{F} = -\vec{g} \int \rho\, d\tau$$

Këtu ρ është dendësia e fluidit, prandaj $\int \rho\, d\tau$ është masa e atij vëllimi të fluidit, vëllimin e të cilit e zenë trupi i ngurtë. Zakonisht themi se kjo është masa e fluidit të zhvendosur nga zhytja e trupit në të.

$$\vec{F} = -\vec{g}\, m = -\vec{P}_ç \qquad (5)$$

Prodhimi i fundit paraqet peshën e fluidit të zhvendosur $\vec{P}_ç$. Pra, fluidi vepron në trup të ngurtë me forcë të shtytjes e cila është e barabartë me peshën e fluidit të zhvendosur. Kjo e dhënë paraqet përmbajtjen e ligjit të Arkimedit. Parashenja minus tregon se forca e shtytjes vepron në kah të kundërt të veprimit të forcës së rëndimit.

3. RROTULLIMI I FLUIDIT

Kur enën me fluid e rrotullojmë rreth boshtit të saj, vërejmë se sipërfaqja e lirë deformohet. Në mes do të jetë më e thellë, kurse në skaje ngritet. Nga fërkimi në mes të enës dhe fluidit dhe fërkimit në vetë fluidin, pas një kohe fluidi rrotullohet me të njëjtën shpejtësi këndore sikurse ena. Kësisoji fluidi relativisht pushon ndaj saj dhe kemi problem statik. Do të përcaktojmë formën e sipërfaqes së lirë të fluidit në enë e cila rrotullohet.

Një sistem të koordinatave e lidhim me enën ashtu që edhe ky rrotullohet me të. Boshti z i këtij sistemi i drejtuar te lartë përputhet me boshtin e rrotullimit. Në njësi të vëllimit të fluidit veprojnë dy forca: pesha e tij $-\rho g\vec{k}$ dhe forca centrifugale $\rho\omega^2\vec{r}$ e cila gjithmonë paraqitet në sistem të koordinatave rrotulluese. Me ω shënojmë shpejtësinë këndore të rrotullimit. Do të kemi:

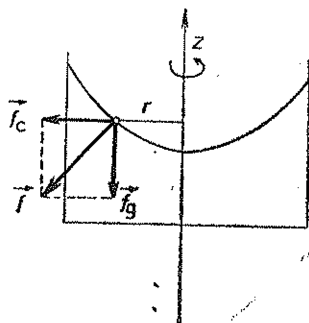


Fig. 62

$$\vec{f} = \rho\omega^2\vec{r} - \rho g\vec{k}$$

Rezultantja e këtyre dy forcave është vizatuar në fig. 62. Vlerën e kësaj force e zëvendësojmë në ekuacionin themelor të hidrostatikës. Fitojmë:

$$\rho\omega^2\vec{r} - \rho g\vec{k} - grad\, p = 0$$

Gradientin e zbërthejmë në komponente:

$$\left(\rho\omega^2 r - \frac{\partial p}{\partial r}\right)\vec{r}_o - \left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z}\right)\vec{k} = 0$$

prej nga rrjedh:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

E shkruajmë formulën për diferencial total të presionit

$$dr = \frac{\partial p}{\partial r}dr + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

dhe i zëvendësojmë vlerat e derivateve parciale

$$dp = \rho\omega^2 r\, dr - \rho\, gdz$$

E integrojmë

$$p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho\, gz + A$$

Që të përcaktojmë konstanten e integrimit e vendosim origjinën e sistemit koordinat në pikën e boshtit rrotullues në sipërfaqen e lirë. Presionin në sipërfaqen e lirë e shënojmë me p_o. Prandaj vlen

$$r = 0 \text{ për } z = 0 \text{ dhe } p = p_o$$

Fitojmë:

$$A = p_o$$

kurse shprehja përfundimtare e ka formën:

$$p - p_o = \frac{1}{2} \rho\omega^2 r^2 - \rho g z \quad (1)$$

Për të gjetur formën e sipërfaqes së lirë zëvendësojmë $p = p_o$,

$$gz = \frac{1}{2} \rho\omega^2 r^2$$

ose

$$z = \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2) \quad (2)$$

Ky është ekuacioni i paraboloidit rrotullues. Pra, sipërfaqja e lirë deformohet në sipërfaqe rrotulluese me prerje boshtore parabolike.

Në skaj të enës $r = R$, kurse lartësia është $z = h$. Fitojmë:

$$h = \frac{\omega^2}{2g} R^2 \quad (3)$$

Shohim se thellësia e parabolës është proporcionale me katrorin e shpejtësisë këndore të rotullimit. Kjo shprehje mund të shfrytëzohet për ndërtimin e aparateve për matjen e shpejtësisë këndore të rrotullimit. Quhen tahometra.

4. TENSIONI SIPËRFAQËSOR DHE PRESIONI KAPILAR

a) Tensioni sipërfaqësor

Sipërfaqja e lirë e lëngut tregon një veti të veçantë. Ajo zotëron sikur membranë e ngrehur dhe themi se lëngu ka tension sipërfaqësor. Është e qartë se këtë veti e tregojnë vetëm lëngjet, sepse gazet nuk kanë sipërfaqe të lirë.

Tensioni sipërfaqësor është rezultat i forcave ndërmolekulare. Në molekulat të sipërfaqes së lëngut veprojnë forcat tërheqëse të molekuleve fqinjë vetëm në njërën anë, nga ana e brendshme e lëngut. Për

këtë arsye molekulat sipërfaqësore janë pak më tepër të tërhequra se ato të brendshmet dhe sipërfaqja e lirë zotëron ndryshe nga shtresat tjera të lëngut.

Nëse dëshirojmë ta rrisim sipërfaqen e lirë të lëngut, atëherë duhet nga brendësia t'i bartim molekulat deri në sipërfaqe. Gjatë kësaj duhet të zotërohen forcat e cekura, pra duhet të kryejmë punë. Vërejmë se sipërfaqja e lirë e lëngut i kundërshton zmadhimit të vetvetes, që është plotësisht njësoj thuajse sipërfaqja tenton të merrë pozitë të atillë që të jetë sa më e vogël. Këtë dukuri e quajmë tension sipërfaqësor.

Gjatë zmadhimit të sipërfaqes për dS duhet të kryejmë punë për dA. Marrëdhënia e tyre

$$\alpha = \frac{dA}{dS} \tag{1}$$

paraqet një konstante specifike për çdo lëng dhe quhet konstante e vet kapilare. Këtë konstante mund ta shprehim edhe në formën

$$\alpha = \frac{df}{dl} \tag{2}$$

Këtu df është forca e të cilën duhet zotëruar kur vija e cila e mbyll sipërfaqen e lirë zmadhohet për dl.

Se këto dy definicione të konstantes kapilare janë ekuivalente mund të tregojmë nëse fillojmë nga (1). Elementi i punës është

$$dA = df \cdot dl$$

kurse elementi i sipërfaqes

$$dS = (dl)^2. \text{ Pra}$$

$$\alpha = \frac{df \cdot dl}{dl \cdot dl} = \frac{df}{dl}$$

gjë që është në pajtim me formulën (2).

b) Presioni kapilar

Meqë tensioni sipërfaqësor tenton ta zvogëlojnë sipërfaqen e lirë të lëngut, në sipërfaqet e përkuluara ekziston një presion i cili tenton ta drejtojë këtë sipërfaqe. Ky gjithmonë vepron kah ana konkave e sipërfaqes së përkulur pa marr parasysh a është ana konkave e kthyer kah brendësia e lëngut apo nga ana e jashtme e tij.

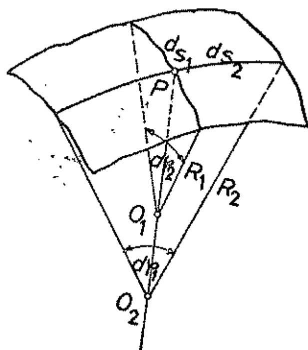


Fig. 63

Të mendojmë elementin e përkulur të sipërfaqes së lëngut sikurse tregon fig. 63. Në pikën P të kësaj sipërfaqje është vizatuar normalja PO_2. Nëpër këtë normale mund të vendosim pa mbarim shumë rrafshe të cilat e presin sipërfaqen. Çdo prerje e këtillë quhet prerje normale e sipërfaqes. Qendra e përkulshmërisë së prerjes normale gjendet në vetë normalen, kurse largësia e kësaj pike nga pika P quhet rreze e përkulshmërisë së prerjes normale. Nga gjeometria e dijmë se ekzistojnë dy prerje normale për të cilat rrezet e përkulshmërisë i kanë vlerat ekstremale. Njëra prej rrezeve është më e madhe, kurse tjetra më e vogël. Tregohet gjithashtu në gjeometri se rrafshet me rreze ekstremale të përkulshmërisë qëndrojnë normal njëra ndaj tjetrës. Në figurë janë paraqitur harqet e këtyre prerjeve ds_1 dhe ds_2, kurse rrezet e përkulshmërisë janë R_1 dhe R_2. I shënojmë me $d\varphi_1$ dhe $d\varphi_2$ këndet me të cilat shihen harqet ds_1 dhe ds_2 nga pikat O_1 dhe O_2. Atëherë: do të kemi

$$ds_1 = R_1\, d\varphi_1$$

$$ds_2 = R_2\, d\varphi_2$$

kurse elementi i sipërfaqes është:

$$dS = ds_1 \cdot ds_2 = R_1 R_2\, d\varphi_1 d\varphi_2 \tag{3}$$

Të mendojmë se pikën P e kemi zhvendosur në kah të normales për gjatësinë dn. Kësisoji deformohet tërë elementi i sipërfaqes. Rrezet e përkulshmërisë pas deformimit janë $R_1 + dn$ dhe $R_2 + dn$. Sipërfaqja e elementit të rij është:

$$dS_1 = (R_1 + dn)\,(R_2 + dn)\, d\varphi_1 d\varphi_2$$

Supozojmë se gjatë këtij deformimi këndet qendrore nuk kanë ndryshuar. E kryejmë shumëzimin dhe nuk do të përfillim anëtarin dn^2 si madhësi e vogël e rendit të lartë. Do të kemi:

$$dS_1 = R_1 R_2\, d\varphi_1 d\varphi_2 + (R_1 + R_2)\, dn\, d\varphi_1 d\varphi_2$$

Anëtari i parë sipas (3) paraqet sipërfaqen e elementit para zhvendosjes:

$$dS_1 - dS = (R_1 + R_2)\, dn\, d\varphi_1 d\varphi_2 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) dn\, R_1 R_2\, d\varphi_1 d\varphi_2$$

$$dS_1 - dS = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) dn\, dS$$

Puna të cilën e kryejmë gjatë deformimit të elementit të sipërfaqes sipas (1) është:

$$dA = \alpha\,(dS_1 - dS) = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) dn\, dS$$

Nëse në sipërfaqe ekziston ndonjë presion p, atëherë në element të sipërfaqes vepron forca $p\,dS$ dhe që të fitojmë punën duhet ta shumëzojmë me zhvendosjen dn. Pra,

$$dA = p\, dS\, dn$$

Kur t'i barazojmë këto shprehje fitojmë:

$$p = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (4)$$

Madhësia $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ quhet përkulje mesatare e sipërfaqes në pikë të shikuar.

Shohim, pra, se presioni kapilar në sipërfaqet e përkuluara është proprocional me përkuljen mesatare të tyre.

Në sipërfaqe të rrafshtë R_1 dhe R_2 tentojnë kah pambarimi dhe presioni kapilar është i barabartë me zero. Nëse sipërfaqja e ka formën e sferës, atëherë $R_1 = R_2 = R$ dhe për presion kapilar fitohet formula:

$$p = \frac{2\alpha}{R}$$

Këso sipërfaqesh kemi te fluska e sapunit, por kjo i ka dy sipërfaqe të lira, prandaj presioni është dy herë më i madh

$$p = \frac{4\alpha}{R}$$

Shohim në këtë rast, se presioni është proporcional i zhdrejtë me rrezen.

c) Forma e sipërfaqes pranë murit të enës

Në vendin ku sipërfaqja e lirë takohet me murin e ngurtë të enës paraqitet një deformim i kësaj sipërfaqe. Do të përcaktojmë formën e sipërfaqes së lirë pranë murit të enës.

Për thjeshtësim njehsimi do të supozojmë se muri i enës është mjaft i gjatë dhe i rrafshtë, teoretikisht pa mbarim i gjatë. Atëherë dukuria në të gjitha prerjet normale me mur është e njëjtë, kurse ne problemin mund ta shqyrtojmë si njëdimensional. Një prerje normale në mur e paraqet fig. 64.

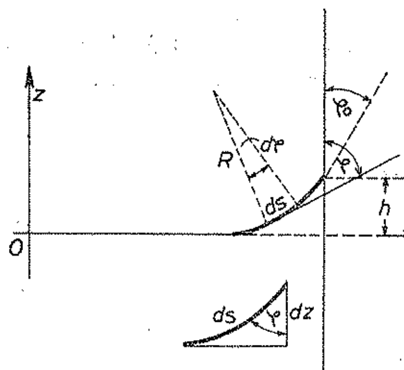


Fig. 64

Pranë murit të enës sipërfaqja është deformuar kurse në largësi nga ky ajo është e rrafshtë sikurse tregon figura. Në figurë është vizatuar rasti kur sipërfaqja e lirë pranë murit të enës është e ngritur. Do të marrim një element të harkut ds të sipërfaqes së ngritur. Sipas formulës (4) në të vepron presioni kapilar

$$p = \frac{\alpha}{R}$$

sepse nga supozimi jonë rrezja tjetër e përkulshmërisë tenton kah pambarimi, pra $R_2 \to \infty$ dhe si e tillë nuk vjen në shprehje.

Tangjentja në elementin e harkut ds me murin e enës mbyll këndin φ. Nga trekëndëshi infinitezimal në figurë fitojmë:

$$ds = \frac{dz}{\cos\varphi}$$

Në anën tjetër shohim se vlen

$$ds = R\, d\varphi$$

I barazojmë dhe fitojmë:

$$R\, d\varphi = \frac{dz}{\cos\varphi}$$

prej nga

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{dz}$$

Këtë vlerë e zëvendësojmë në shprehjen për presin kapilar

$$p = \alpha\, \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{dz}$$

Presioni kapilar vepron kah ana konkave e sipërfaqes, në rastin tonë pra, vepron te lartë. Që të arrihet ekuilibrimi duhet të ekzistojë edhe një presion në kah të kundërt. Ky është presioni hidrostatik i pjesës së ngritur të lëngut. Për këtë presion kemi treguar se vlen

$$p = -\rho g z$$

Këto dy presione duhet të jenë të barabartë. Pra,

$$-\rho g z \, dz = \alpha \cos\varphi \, d\varphi$$

E integrojmë:

$$\frac{1}{2} \rho g z^2 = -\alpha \sin\varphi + A$$

Për përcaktimin e konstantes së integrimit e vendosim origjinën e sistemit të koordinatave në sipërfaqe të lirë të lëngut larg murit të enës.

Në këtë vend $z = 0$, kurse nga figura shohim se $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Pra,

$$0 = -\alpha + A$$

ose

$$A = \alpha$$

E zëvendësojmë vlerën e fituar

$$\rho g z^2 = 2\alpha (1 - \sin\varphi)$$

$$z^2 = \frac{2\alpha}{\rho g} (1 - \sin\varphi) \tag{6}$$

Kjo është shprehja e cila përcakton formën e sipërfaqes së lirë të lëngut pranë murit të enës.

Nuk është vështir të përcaktojmë ngritjen e lëngut pranë këtij muri. Do ta shënojmë me h. Tangjentja e tërhequr në pikën ku lëngu takohet me murrin e enës mbyll këndin φ_o me këtë mur. Ky kënd është karakteristik si për materiale të murit të enës, si për vetë lëngjet dhe përcaktohet eksperimentalisht. Pra sipas (6) kemi:

$$h = \sqrt{\frac{2\alpha}{\rho g} (1 - \sin\varphi_o)} \tag{7}$$

Duhet cekur se ky kënd për lëngje të cilat e lagin murin e enës është i ngushtë, kurse për lëngje të cilat nuk e lagin është kënd i gjerë. Prandaj, sipërfaqja e lëngut i cili e lag murin e enës është e ngritur, kurse sipërfaqja e lëngut i cili nuk e lag këtë mur është e lëshuar te poshtë.

Sikur lagia e murit të ishte ideale, atëherë këndi $\varphi_o = 0$ dhe për ngritje të lëngut pranë murit të enës do të fitonim formulën

$$h = \sqrt{\frac{2\alpha}{\rho g}}$$

Shpeshherë lagia e murit të enës është aq e mirë, sa që mund të përdoret formula e fundit.

d) Ngritja kapilare

Kapilarë quhen gypat me prerje tërthore mjaft të vogël. Meqë gypat kanë formë cilindrike dhe në të gjitha anët muret janë shumë afër, sipërfaqja e lirë do të deformohet në formë të kalotës sferike e cila zakonisht quhet meniskus. Në këtë sipërfaqe zotëron presioni i cili e detyron që kjo të ngritet në nivel tjetër ndaj sipërfaqes së lëngut jashtë gypit kapilar.

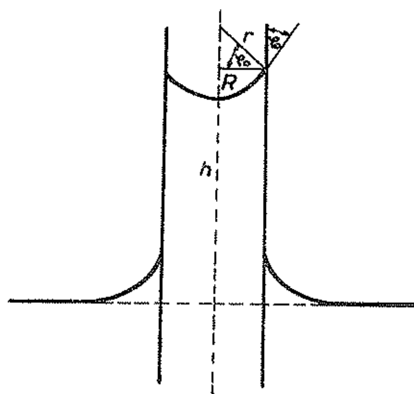


Fig. 65

Në fig. 65 është paraqitur prerja e gypit kapilar me rreze R mjaft e zmadhuar, si dhe prerja e kalotës së sferës me rreze r. Prandaj presioni kapilar në të është:

$$p = \frac{2\alpha}{r}$$

Nga figura shohim se vlen

$$r = \frac{R}{\cos\varphi_o}$$

ku φ_o është këndi kufitar i lëngut me murin e kapilarës. E zëvendësojmë këtë në formulë për presion

$$p = \frac{2\alpha \cos\varphi_o}{R}$$

Ky presion qëndron në ekuilibrim me presionin hidrostatik të shtyllës së lëngut mbi nivelin e sipërfaqes së jashtme të tij. Ky e ka vlerën:

$$p = \rho g\, h$$

I barazojmë këto presione dhe fitojmë:

$$\rho g\, h = \frac{2\alpha \cos\varphi_o}{R}$$

prej nga fitojmë lartësinë e ngritjes së lëngut në gyp kapilar

$$h = \frac{2\alpha \cos\varphi_o}{\rho g R} \tag{8}$$

Te lëngjet të cilat e lagin murin e gypit $\varphi_o < \frac{\pi}{2}$, prandaj nga (8) h është pozitive, pra ekziston ngritje kapilare. Si shembull mund të cekim ujin në gyp të qelqit. Te lëngjet të cilat nuk e lagin murin e gypit kapilar, si zhiva në gyp të qelqit, atëherë $\varphi_o > \frac{\pi}{2}$ dhe $\cos\varphi_o < 0$. Nga (8) fitojmë $h < 0$. Për këtë rast themi se ekziston depresioni kapilar, përkatësisht zbritje e nivelit të lëngut në gyp kapilar ndaj nivelit të sipërfaqes së jashtme. Formula (8) tregon se lartësia e ngritjes kapilare apo zbritjes së nivelit të lëngut në gyp është proporcional e zhdrejtë me rrezen e gypit kapilar.

5. EKUACIONET THEMELORE DIFERENCIALE TË HIDRODINAMIKËS

a) Ekuacioni i kontinuitetit

Njëri prej ekuacioneve themelore të hidrodinamikës është ekuacioni i kontinuitetit, i cili matematikisht shpreh ligjin mbi ruajtjen e masës së fluidit.

Të mendojmë një sipërfaqe të mbyllur. Së pari do të përcaktojmë masën e tërësishme të cilën e përmban kjo. E ndajmë vëllimin e saj në elemente të vogla të vëllimit. Në vëllimin e zgjedhur $d\tau$ gjendet masa $\rho d\tau$. Masat e tërë fluidit në sipërfaqe të mbyllur shprehet me integralin

$$M = \int \rho \, d\tau$$

Kjo masë mund të ndërrojë gjatë kohës vetëm nëse hyn apo del nëpër sipërfaqe e cila e mbyll vëllimin e saj, prandaj do të përcaktojmë fluksin e masës së fluidit nëpër sipërfaqe. Për këtë e ndajmë sipërfaqen në elemente të vogla dS. Le të jetë shpejtësia e rrymimit të fluidit $\vec{v}$ në njërin element të saj. Në përgjithësi, kahja e shpejtësisë nuk do të përputhet me kahjen e normales në element të sipërfaqes. Do të shënojmë me α këndin që mbyll këto dy drejtime. Nëpër element të shqyrtuar të sipërfaqes, në njësi të kohës kalon ai vëllim i fluidit i cili gjendet në prizmin e pjerrët, baza e të cilës është elementi i sipërfaqes dS, kurse lartësia është e barabartë me shpejtësinë $\vec{v}$, sepse kjo shprehet si rrugë në njësi kohe. Meqë prizmi është i pjerrët, lartësia e saj është $v \cos\alpha$, kurse vëllimi $v \cos\alpha \, dS$. Nëse elementin e sipërfaqes e shprehim si vektor i cili e ka kahjen e normales, kurse intensitetin dS, atëherë vëllimi i fituar është i barabartë me prodhimin skalar të vektorëve $\vec{v}\,\vec{dS}$. Që ta fitojmë masën e fluidit në këtë element të vëllimit,

duhet të shumëzojmë me dendësinë ρ. Pra, fitojmë $\rho\, \vec{v}\, \vec{dS}$. Ky është kontributi i fluksit të fluidit të elementit të sipërfaqes. Që të fitojmë tërë fluksin, këtë duhet ta integrojmë nëpër sipërfaqen e cila e mbyll vëllimin e fluidit. Pra:

$$\Phi = \oint \rho\, \vec{v}\, \vec{dS}$$

Nëse masa gjatë kohës ruhet, atëherë fluksi duhet të jetë i barabartë me ndërrimin kohor të masës së fluidit brenda sipërfaqes

$$-\frac{\partial M}{\partial t} = \Phi$$

I barazojmë integralet

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \cdot d\tau = \oint \rho\, \vec{v}\, \vec{dS}$$

Integralen në anën e djathtë e kthejmë në integral vëllimor

$$-\int \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau = \int div\, (\rho\, \vec{v})\, d\tau$$

Që kjo shprehje të kënaqet për çfarëdo rasti të mundshëm, funksionet nën integrale duhet të jenë të barabarta. Pra:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\, (\rho\, \vec{v}) = 0 \qquad (1)$$

Ky ekuacion diferencial shpreh ligjin mbi ruajtjen e masës së fluidit dhe quhet ekuacion i kontinuitetit.

Te fluidet e pangjeshura $\rho = const.$ anëtari i parë në (1) nuk ekziston, prandaj fitojmë

$$div\, \vec{v} = 0 \qquad (2)$$

Kështu shprehet ekuacioni i kontinuitetit për fluide të pangjeshura.

b) Ekuacioni i Ojlerit

Do të paraqesim ekuacionin diferencial të lëvizjes së fluidit ideal i cili njihet me emrin ekuacion i Ojlerit.

Fluid ideal quajmë fluidin i cili nuk ka fërkim me muret e gypit nëpër të cilin lëviz, por as në mes të shtresave të cilat lëvizin me shpejtësi të ndryeshme. Fluidi i këtillë realisht nuk ekziston, por në shumicën e rasteve të lëvizjes së tij fërkimi është mjaft i vogël dhe mund të

mos përfillet. Natyrisht, ekzistojnë edhe raste kur fërkimi duhet të merret në konsiderim. Fluidet te të cilat fërkimi është i konsiderueshëm quhen fluide viskoze. Për këto fluide vlejnë ekuacione të tjera.

Ekuacioni i Ojlerit shpreh ligjin themelor të mekanikës, sipas të cilit prodhimi i masës dhe i nxitimit është i barabartë me rezultanten e të gjitha forcave.

Do ta ndajmë edhe në këtë rast fluidin në element të vogla të vëllimit $d\tau$. Në njërin element të këtillë gjendet masa $\rho\, d\tau$, kurse nxitimi $d\vec{v}/dt$. Prodhimi i tyre është $\rho\, d\vec{v}/dt \cdot d\tau$. Duke i mbledhur të gjitha elementet e vëllimit, fitojmë shprehjen për integral vëllimor i cili duhet të jetë i barabartë me rezultanten e të gjitha forcave. Në hidrostatikë kemi treguar se këto forca shprehen me dy integrale. Do të kemi:

$$\int \rho \frac{d\vec{v}}{dt}\, d\tau = \int \vec{f}\, d\tau - \oint p\, d\vec{S}$$

Integralin e fundit e shndërrojmë në integral vëllimor dhe i barazojmë funksionet. Fitojmë:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - grad\, p \qquad (3)$$

Kjo është një formë e ekuacionit të Ojlerit. Që të fitojmë formën tjetër do të zhvillojmë anëtarin në anën e majtë. Meqë shpejtësia varet funkisonalisht nga koha t dhe koordinatet x, y dhe z, derivatin total mund ta zbërthejmë kësisoji:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\, \nabla)\, \vec{v}$$

Shfrytëzojmë formulën për gradient të ndryshores në katrorë

$$grad\, \frac{1}{2}\, \vec{v}^2 = \vec{v} \times rot\, \vec{v} + (\vec{v}\, \nabla)\, \vec{v}$$

dhe do të kemi

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{dt} + grad\, \frac{1}{2}\, v^2 - \vec{v} \times rot\, \vec{v}$$

E zëvendësojmë në (3) shprehjen e fundit

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho\, grad\, \frac{1}{2}\, v^2 - \rho\, \vec{v} \times rot\, \vec{v} = \vec{f} - grad\, p \qquad (4)$$

Ky është ekuacioni i Ojlerit i shprehur në formë tjetër. Ekuacioni shpreh përmbajtjen e ligjit themelor të mekanikës, prandaj paraqet ekuacionin themelor diferencial të hidrodinamikës. Në te shpejtësia e fluidit është e lidhur me forcat e jashtme dhe presionet, prandaj me ndihmën e tij, duke njohur shpërndarjen e forcave dhe presioneve, mund të përcaktojmë shpërndarjen e shpejtësive.

6. INTEGRALI I BERNULIT

a) Rrymimi stacionar

Kemi vërejtur në mekanikë të pikës materiale se për disa kondita ekuacioni i lëvizjes mund të integrohet në rast të përgjithshëm. Edhe në hidrodinamikë e gjejmë një rast të tillë. Ekuacioni i Ojlerit mund të integrohet për disa kondita. Integrali i fituar quhet ekuacion i Bernulit.

Së pari do të supozojmë se forca e jashtme është konservative, pra forcë e cila mund të shprehet me potencialin e vet në formën:

$$\vec{f} = - \, grad \, U \tag{1}$$

Do të supozojmë, gjithashtu, se rrymimi i fluidit është stacionar. Te rrymimi stacionar shpejtësia nuk varet nga koha, por vetëm nga vendi. Për këtë rrymim vlen:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

E zëvendësojmë këtë në ekuacionin e Ojlerit (XI.5.4):

$$grad \, \frac{1}{2} \, \rho \, v^2 - \rho \, \vec{v} \times rot \, \vec{v} = - \, grad \, U - grad \, P$$

ose

$$grad \left(\frac{1}{2} \, \rho \, v^2 + U + p \right) = \rho \, \vec{v} \times rot \, \vec{v}$$

Këtë ekuacion mund ta integrojmë për dy raste:

1. Nëse e kryejmë integralin vijor nëpër vijë të rrymimit. Vijë të rrymimit quajmë vijën te e cila në çdo pikë vektori i shpejtësisë e ka kahjen e tangjentes. Kjo është ajo vijë të cilën e përshkruan grimca e fluidit te rrymimi stacionar.

Meqë vija e integrimit është në kahje të vektorit $\vec{v}$, atëherë prodhimi $\vec{v} \times rot \, \vec{v}$ gjithmonë është normal ndaj vijës së rrymimit dhe integrali vijor në anën e djathtë është i barabartë me zero. Do të fitojmë:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + U + p = C \qquad (2)$$

Konstantja C për çdo vijë të rrymimit ka vlerë tjetër.

2. Nëse rrymimi është potencial. Rrymimi quhet potencial nëse shpejtësia mund të shprehet me ndihmën e gradientit të një funksioni skalar:

$$\vec{v} = -\,grad\,\Phi \qquad (3)$$

Funksioni Φ quhet potencial i shpejtësisë. E dimë se fushat vektoriale potenciale nuk kanë shtjella, prandaj vlen:

$$rot\,\vec{v} = 0 \qquad (4)$$

Atëherë në anën e djathtë të shprehjes nuk figuron $\vec{v} \times rot\,\vec{v}$ dhe me integrim fitojmë

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + U + p = G \qquad (5)$$

Kjo formulë është identike me (2) me të vetmin dallim se në këtë rast konstantja G është e njëjtë për tërë vëllimin e fluidit.

Shprehjet (2) dhe (5) paraqesin ekuacionin e Bernulit. Ky ekuacion e lidh shpejtësinë me presion dhe potencial të forcës së jashtme dhe mundëson përcaktimin e shpërndarjes së shpejtësisë në varshmëri prej tyre.

Nëse si forcë të jashtme kemi peshën e fluidit, atëherë:

$$U = \rho g z,$$

kurse ekuacioni (5) e merr formën

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{d}{\rho g} + z = const. \qquad (6)$$

Në këtë formë të paraqitjes që të tre anëtarët kanë kuptim fizik të lartësisë. Anëtari i parë paraqet lartësinë e shpejtësisë, kjo është ajo lartësi prej së cilës fluidi duhet të bie që të arrijë shpejtësinë $\vec{v}$. Anëtari i dytë paraqet lartësinë e presionit, kjo është ajo lartësi e shtyllës së fluidit e cila e jep presionin p. Anëtari i tretë paraqet lartësinë e vendit. Shohim se shuma e tri lartësive duhet të jetë konstante.

b) Rrymimi jo stacionar

Ekuacioni i Ojlerit mund të integrohet në rast të përgjithshëm edhe kur rrymimi nuk është stacionar, por duhet të jetë medoemos potencial. Pra, kur janë të kënaqura kondita (3) dhe (4). Atëherë ekuacionin e Ojlerit e shkruajmë në formën:

$$- \rho \, grad \, \frac{\partial \Phi}{\partial t} + grad \, \frac{1}{2} \rho v^2 = - grad \, U - grad \, p$$

ose

$$grad \left(- \rho \, \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho v^2 + U + p \right) = 0$$

Me integrim fitojmë:

$$- \rho \, \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho v^2 + U + p = C \qquad (7)$$

Ky është ekuacioni i modifikuar i Bernulit për rrymimet jo stacionare të fluidit.

c) Zbatimi i ekuacionit të Bernulit për rrjedhjen e lëngut dhe gazit

Ekuacionin e Bernulit (5) mund ta shkruajmë ashtu që trinomi të paraqesë gjendjen në dy vende të ndryshme

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z = \frac{1}{2} \rho v_o{}^2 + p_o + \rho g z_o \qquad (8)$$

Do të shqyrtojmë së pari rrjedhjen e lëngut të pa ngjeshur nëpër hapje në fund të enës. Le të paraqesin të dhënat për hapje me anën e majtë të (8), kurse të dhënat për sipërfaqe me anën e djathtë. Origjinën e sistemit koordinat do ta vendosim në hapje të enës, prandaj vlenë

$$z = 0, \; z_o = h$$

ku: h është lartësia e sipërfaqes së lirë nga hapja. Le të jetë ena mjaft e gjerë ashtu që lartësia e fluidit ndërron pak. Kësisoji mund të supozojmë se vlen $v_o \approx 0$. Pastaj, vepron i njëjti presion si në hapje si në sipërfaqe të lëngut, pra $p = p_o$. Kur t'i zëvendësojmë këto të dhëna në (8), fitojmë:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 = \rho gh$$

ose

$$v = \sqrt{2gh} \qquad (9)$$

Kemi fituar formulën e Toriçelit për shpejtësi të rrymimit të lëngut ideal. Shohim nga (9) se kjo është e barabartë me atë shpejtësi të cilën do ta arrinte sikur lëngu të binte lirisht nga lartësia h.

Si shembull tjetër do ta marim rrymimin e gazit nga ena e mbyllur nëpër hapje të vogël. Prapë e shfrytëzojmë shprehjen (8), ashtu që të dhënat në anën e majtë paraqesin gjendjen në hapje, kurse në anën e djathtë gjendjen në brendësi të enës. Në këtë rast $z = z_o$. Le të jetë ena mjaft e madhe ashtu që vlen brenda saj $v_o = 0$. Do të kemi:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p = p_o$$

ose

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_o - p)} \qquad (10)$$

Kjo është formula e Bunzenit për shpejtësi të rrymimit të gazit.

7. VALËT E TINGULLIT NË FLUIDE

a) Ekuacioni i valëve

Nëse në ndonjë vend në ajër shkaktohet ndërrim i dendësisë apo presionit, atëherë ky ndërrim do të përhapet nëpër te. Në vend të ajrit mund të flasim edhe për lëngje apo mjedise gazore. Do të tregojmë se përhapja e ndërrimeve kryhet në formë të valëve. Këto janë valët e tingullit.

Fillojmë nga ekuacionet themelore të hidrodinamikës, nga ekuacioni i Ojlerit dhe ekuacioni i kontinuitetit:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + grad\, \rho \frac{v^2}{2} - \rho \vec{v} \times rot\, \vec{v} = \vec{f} - grad\, p \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\, (\rho \vec{v}) = 0 \qquad (2)$$

Që t'i shjeshtojmë këto ekuacione, do të paraqesim disa supozime. Do të marrim së pari se lëvizja e fluidit është pa shtjella, prandaj $rot\, \vec{v} = 0$, pastaj që shpejtësitë e lëvizjes janë relativisht të vogla, ashtu

që nuk do t'i përfillim të gjithë anëtarët e shkallës së lartë. Pra, $v = 0$.

Më në fund do të supozojmë se forca e jashtme $\vec{f} = 0$, sepse si forcë e jashtme vjen në shprehjen vetëm pesha e cila te valët e tingullit nuk ka ndikim. Në bazë të këtyre supozimeve ekuacioni (1) merr formën

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = - grad\, p \tag{3}$$

Do të supozojmë gjithashtu se dendësia ndërron pak. Le të jetë dendësia e fluidit përpara ndërrimit ρ_o, ndërsa dendësia e fluidit është:

$$\rho = \rho_o + d\rho \tag{4}$$

Këtu nuk do të përfillim as prodhimin $vd\rho$ në pajtim me supozimin e cekur më parë. Prandaj do të kemi:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \rho_o \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

dhe

$$\rho v = \rho_o v$$

Në bazë të kësaj që u cek deri tash (2) dhe (3), do të kenë formën:

$$\rho_o \frac{\partial v}{\partial t} = - grad\, p \tag{5}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\, (\rho_o \vec{v}) = 0 \tag{6}$$

Në dy shprehjet e fundit paraqiten tri të panjohura, funksionet ρ, $\vec{v}$ dhe p, kurse këto janë të pamjaftuara për zgjidhjen e tyre. Këtu është i nevojshëm edhe një ekuacion i cili lidh presionin me dendësi. Natyrisht, mund ta marrim në përgjithësi se presioni varet në mënyrë funksionale prej dendësisë:

$$p = p(\rho) \tag{7}$$

Nga ekuacionet (5), (6) dhe (7) duhet të eliminohen dy funksione të panjohura. Për këtë së pari e kryejmë gradientin e (7) sipas rregullës së gradientit të funksionit të përbërë:

$$grad\, p = \frac{dp}{d\rho}\, grad\, \rho$$

Shënojmë shkurtimisht:

$$\frac{dp}{d\rho} = c^2 \qquad (8)$$

dhe shkruajmë:

$$grad\, p = c^2\, grad\, \rho \qquad (9)$$

Zëvendësojmë në (5)

$$\rho_o \frac{\partial v}{\partial t} = - c^2\, grad\, \rho \qquad (10)$$

Kësisoji është eliminuar funksioni p. Që ta eliminojmë $\vec{v}$ nga (6) dhe (10), e derivojmë (6) sipas kohës:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t} + div\left(\rho_o \frac{\partial v}{\partial t}\right) = 0$$

E zëvendësojmë (10 në shprehjen e fundit:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c^2\, div\, grad\, \rho = 0$$

ose

$$\Delta \rho = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \qquad (11)$$

Për dendësi kemi fituar ekuacionin diferencial të valëve. Kësisoji kemi treguar se dendësia ndërron sipas ligjeve të ndërrimit të valëve. Konstantja e paraqitur c ka kuptim fizik të shpejtësisë së përhapjes së valëve. Kjo paraqet shpejtësinë e përhapjes së valëve të tingullit.

Do të përcaktojmë edhe ekuacionin për presionin p. E kryejmë divergjencën e (9):

$$div\, grad\, p = c^2\, div\, grad\, \rho$$

Pastaj është:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

dhe

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$$

I zëvendësojmë këto në (11) dhe fitojmë:

$$\Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \tag{12}$$

Edhe për presion kemi fituar ekuacionin e valëve, prandaj edhe ky, gjithashtu, ndërron sipas ligjit të ndërrimit të valëve.

b) Shpejtësia e tingullit

Për shpejtësi të tingullit e kemi formulën (8). Pra:

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \tag{13}$$

Që ta përcaktojmë këtë shpejtësi, duhet të dimë ligjin e varshmërisë së presionit prej dendësisë. Këtu duhet të dallojmë dy mundësi, a kemi të bëjmë me lëngje apo gaze.

Së pari do të marrim në shqyrtim përhapjen e valëve në lëng. Në këtë rast nuk guxojmë të marrim lëngun si të pangjeshëm, sepse atëherë $d\rho = 0$ dhe nuk e arsyeton mundësinë e përhapjes së valëve. Prandaj, do të supozojmë se edhe lëngjet sado pak mund të ngjeshen. Do të zbatojmë ligjin e Hukut për trupa elastikë të modifikuar për lëngje. Sipas këtij ligji deformimi relativ është proporcional me tensionin që e shkakton atë deformim. Në rast të lëngut rolin e tensionit e merr presioni, sepse edhe tensioni edhe presioni janë forca që veprojnë në njësi të sipërfaqes. Si deformim duhet të marrim ndërrimin relativ të vëllimit. Nëse këtë ndërrim e shënojmë me dV, atëherë ndërrimi relativ është dV/V. Prandaj, këtë ligj mund ta shkruajmë:

$$dp = -K \frac{dV}{V} \tag{14}$$

Kur me K e kemi sënuar faktorin e proporcionalitetit që paraqet një konstante specifike për elasticitetin e lëngut. E quajmë modul të ngjeshjes.

Do të paraqesim, në vend të vëllimit, dendësinë ρ me shprehjen:

$$V = \frac{m}{\rho}$$

kurse

$$\frac{dV}{V} = \frac{-\frac{m d\rho}{\rho^2}}{\frac{m}{\rho}} = -\frac{d\rho}{\rho} \tag{15}$$

Prandaj vlen:

$$dp = K \frac{d\rho}{\rho}$$

ose

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{K}{\rho}$$

kurse nga (13) kemi

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \tag{16}$$

Shohim se shpejtësia e përhapjes së tingullit në lëngje është proporcionale me rrënjën katrore të modulit të ngjeshjes dhe proporcionale e zhdrejtë me rrënjën katrore të dendësisë së lëngut.

Për shpejtësi të përhapjes së tingullit në gaze qysh Njutni e ka përfituar formulën, duke supozuar se në këto valë ndërrimet e dendësisë janë izometrike. Është treguar se formula e Njutnit jep rezultate që nuk përputhen me të dhënat eksperimentale. Për këtë arsye Laplasi e ka kryer të njëjtin njehsim, duke supozuar se ndërrimet e gazit në valë të tingullit janë adiabatike. Është treguar se ky supozim është i saktë. Kjo mund të arsyetohet edhe nga fakti se ndërrimet e dendësisë së gazit në valë të tingullit janë shumë të shpejta dhe nuk ka kohë të mjaftueshme për barazimin e temperaturës. Prandaj, ndërrimet nuk mund të jenë izometrike.

Ndërrimet adiabatike të gazeve shprehen me ekuacionin e Pausonit

$$pV^{\gamma} = cons.t \tag{17}$$

Këtu me $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ e kemi shënuar konstanten adiabatike të gazeve. Diferenciali i saj është

$$V^{\gamma} dp + \gamma V^{\gamma-1} p \;\, dV = 0$$

ose

$$dp + p\gamma \, \frac{dV}{V} = 0$$

E paraqesim dendësinë sipas (15)

$$dp - p\gamma \, \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{p\gamma}{\rho}$$

prej nga

$$c = \sqrt{\frac{p\gamma}{\rho}} \tag{18}$$

Kjo është formula e Laplasit për shpejtësi të përhapjes së tingullit në gaze.

8. VALËT NË SIPËRFAQE TË UJIT

a) Potenciali i shpejtësisë

Do të përcaktojmë teorikisht përhapjen e valëve në sipërfaqe të lëngut. Në shqyrtim do të marrim valët në sipërfaqe të ujit, sepse nga përvoja e përditshme këtë dukuri e njohim më së miri. Do të supozojmë se uji nuk mund të ngjeshet, prandaj ekuacioni i kontinuitetit e ka formën:

$$div \, \vec{v} = 0 \tag{1}$$

Supozojmë, gjithashtu, se lëvizja valore është pa shtjella, prandaj

$$rot \, \vec{v} = 0$$

kurse shpejtësia mund të shprehet si gradient i potencialit të vet

$$\vec{v} = - \, grad \, \Phi \tag{2}$$

Pasi të zëvendësojmë (2) në (1) fitojmë:

$$\Delta\Phi = 0 \tag{3}$$

Ky është ekuacioni diferencial i Laplasit, prandaj potenciali i shpejtësisë paraqet një zgjidhje të tij.

Supozojmë se në valë kemi ndërrime harmonike gjatë kohës, prandaj faktorin kohor do ta marrim në formë të funksionit $e^{-i\omega t}$. Përveç kësaj, do të shqyrtojmë vetëm valët e rrafshta dhe në kahje të përhapjes së tyre do të vendosim boshtin x të sistemit të koordinateve. Boshti z qëndron në pozitë vertikale. Në këtë mënyrë asgjë nuk varet nga y dhe ekuacionin e Laplasit e shkruajmë në formën:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{4}$$

Këtë ekuacion diferencial parcial e zgjidhim me metodën e ndarjes së ndryshoreve. Supozojmë se zgjidhja e tij e ka formën:

$$\Phi = f(x) \cdot g(z)\, e^{-i\omega t} \tag{5}$$

dhe kur ta zëvendësojmë në (4) fitojmë:

$$gf'' + fg'' = 0$$

ose

$$\frac{f''}{f} = -\frac{g''}{g}$$

Në anën e majtë gjendet shprehja e cila varet prej x dhe është e barabartë me shprehjen në anë të djathtë e cila fare nuk varet prej tij. Kjo është e mundur vetëm nëse të dy anët janë të barabarta me të njëjtën konstante. Do ta shënojmë me $-k^2$, kurse ekuacioni zbërthehet në dy të kësaj forme:

$$f'' + k^2 f = 0$$

$$g'' - k^2 g = 0$$

I pari e ka zgjidhjen:

$$f(x) = e^{ikx}$$

kurse të dytin e kënaqin funksionet hiperbolike. Pra:

$$g(z) = A\, ch(kz + \delta)$$

Nga këto zgjidhje (5) do të ketë formën:

$$\Phi = A\, ch(kz + \delta) e^{i(kx - \omega t)}$$

Tani duhet të përcaktojmë konstanten e integrimit δ. Le të jetë h thellësia e ujit. Atëherë $z = -h$ shpreh fundin e tij, prandaj në këtë vend shpejtësia nuk mund të ketë z-komponenten. Pra, vlen:

$$v_z = 0 \text{ për } z = -h$$

Nga shprehja (2) është:

$$v_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

kurse kondita merr formën:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \text{ për } z = -h$$

Kërkojmë derivatin e potencialit të shpejtësisë sipas z:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = Ak\, sh(-hk + \delta)\, e^{i(kx - \omega t)}$$

Kjo mund të jetë e barabartë me zero vetëm nëse është:

$$\delta = hk$$

Zgjidhja për potencial të shpejtësisë e ka formën:

$$\Phi = A\, ch(z + h)\, e^{i(kx - \omega t)}$$

dhe vetëm pjesa reale e saj:

$$\Phi = A\, ch\, k(z + h) \cos (kx - \omega t) \tag{6}$$

Ky është ekuacioni i valës së rrafshtë e cila përhapet në kahje të boshtit x. Amplituda e saj

$$Ach\, k(z + h)$$

varet nga thellësia z në të cilën vala shqyrtohet.

b) Shpejtësia e valëve në uj

Gjithë këtë që e përfituam ishte e bazuar në ekuacionin e kontinuitetit (1). E dimë se për lëvizje të fluidit duhet të kënaqet edhe ekuacioni i Ojlerit. Meqë lëvizja e lëngut në valë është potenciale, menjëherë mund të shfrytëzojmë integralin e parë të tij, ekuacionin e modifikuar të Bernulit në (XI.6.7):

$$-\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\rho v^2+p+U=const. \qquad (7)$$

Shpejtësitë e grimcave janë të vogla dhe katrorin e tyre nuk e përfillim, pra $v^2=0$. Si potencial të forcës së jashtme e marrim potencialin e forcës së rëndimit

$$U=\rho g z$$

kurse për presion, presionin kapilar të tensionit sipërfaqësor:

$$p=-\frac{\alpha}{R}$$

Për përkulshmëri të sipërfaqes e marrim formulën e njohur nga gjeometria:

$$\frac{1}{R}=\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}\approx\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Këtu $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$ nuk e përfillim në pajtim me supozimin e paraqitur. I zëvendësojmë në (7):

$$-\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\rho g z-\alpha\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=const.$$

E derivojmë sipas kohës:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\frac{\alpha}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)-g\frac{\partial z}{\partial t}=0$$

Do të tentojmë të gjitha t'i shprehim sipas Φ. E dimë se:

$$\frac{\partial z}{\partial t}=v_z=-\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

Fitojmë ekuacionin:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-\frac{\alpha}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)+g\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0 \qquad (8)$$

Zëvendësojmë zgjidhjen (6):

$$\Phi = A\, ch\, k(z+h) \cos(kx - \omega t)$$

Derivatet përkatëse japin:

$$\frac{\partial z}{\partial \Phi} = A\, k\, sh(z+h) \cos(kx - \omega t) = k\, th\, k(z+h) \cdot \Phi$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) = -k^3\, th\, k(z+k)\, \Phi$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\omega^2 \Phi$$

I zëvendësojmë në (8):

$$-\omega^2 + \frac{\alpha}{\rho}\, k^3\, th\, k(z+h) + g\, k\, th(z+h) = 0$$

ose

$$\omega^2 = \left(\frac{\alpha}{\rho}\, k^3 + g\, k\right) th\, k(z+h)$$

Duke njohur frekuencën, mund ta gjejmë shpejtësinë e përhapjes së valëve:

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\rho}\, k + \frac{g}{k}\right) th\, k(z+h)}$$

dhe meqë

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

gjejmë përfundimisht:

$$c = \sqrt{\left(\frac{2\pi\alpha}{\lambda\rho} + \frac{g\lambda}{2\pi}\right) th\, \frac{2\pi}{\lambda}\,(z+h)} \qquad (9)$$

Kjo është shprehja për shpejtësi të përhapjes së valëve në sipërfaqe të ujit. Shohim se varet prej gjatësisë valore. Për valë të këtilla, te të cilat shpejtësia e fazës varet prej gjatësisë valore, themi se kanë dispersion. Përveç kësaj, kjo shpejtësi varet edhe prej thellësisë në të cilën vala përhapet. Në fund të ujit, për $z = -h$ është e barabartë me zero dhe rritet kah sipërfaqja.

Neve na intereson vala në sipërfaqe, prandaj shkruajmë $z = 0$. Në këtë vend shpejtësia është:

$$c = \sqrt{\left(\frac{2\pi\alpha}{\lambda\rho} + \frac{g\lambda}{2\pi}\right) th \frac{2\pi h}{\lambda}} \tag{10}$$

Shihet se shpejtësia e përhapjes së valëve edhe në vetë sipërfaqen varet prej thellësisë h. Që të kemi një kuptim më të thjeshtë, do të ndalemi në diskutimin e dy rasteve ekstremale, për rast të ujit tepër të thellë dhe tepër të cekët.

1. Le të jetë uji tepër i thellë:

$$\frac{h}{\lambda} \to \infty, th\, 2\pi \frac{h}{\lambda} \to 1$$

kurse për shpejtësi kemi

$$c = \sqrt{\frac{2\pi\alpha}{\lambda\rho} + \frac{2\pi}{g\lambda}} \tag{11}$$

Prapë paraqiten dy mundësi. Së pari shqyrtojmë valët e gjata. Atëherë anëtari i parë është i vogël në krahasim me të dytin dhe për shpejtësi të tyre kemi:

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \tag{12}$$

Këto janë valët e njohura të cilat paraqiten nga veprimi i erërave në sipërfaqe të detit apo liqenit. Shohim se këto valë qëndrojnë nga veprimi i forcës së rëndimit.

Mundësia e dytë paraqitet për valë shumë të shkurtëra. Në këtë rast në (11) ngel vetëm anëtari i parë, vlera e të cilit është:

$$c = \sqrt{\frac{2\pi\alpha}{\rho\lambda}} \tag{13}$$

Këto janë valë shumë të imta dhe paraqiten nga tensioni sipërfaqësor. Për këtë quhen valë kapilare.

Në të dy rastet shpejtësia e fazës varet prej gjatësisë së valës. E dimë se valët formojnë grup valësh, prandaj mund të njehsojmë edhe shpejtësinë e grupit të tyre. Kemi treguar se kjo shpejtësi përcaktohet me formulën:

$$c_g = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} \tag{14}$$

Sipas (12) për valë të rëndimit:

$$\frac{dc}{d\lambda} = \frac{g}{2\pi} \frac{1}{2c}$$

ose

$$c_g = c - \frac{g\lambda}{2\pi}\,\frac{1}{2c} = c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2} \tag{15}$$

Pra, shpejtësia e grupit të valëve të rëndimit është sa gjysma e shpejtësisë së fazës.

Do të përsërisim të njëjtin njehsim për valë kapilare. Fitojmë:

$$\frac{dc}{d\lambda} = -\frac{2\pi\alpha}{\rho}\,\frac{1}{\lambda^2}\,\frac{1}{2c}$$

ose

$$c_g = c + \frac{2\pi\alpha}{\lambda\rho}\,\frac{1}{2c} = c + \frac{c}{2} = \frac{3}{2}\,c \tag{16}$$

Pra, shpejtësia e grupit të valëve kapilare është për 50% më e madhe se shpejtësia e fazës.

2. Të shqyrtojmë përhapjen e valëve në ujë tepër të cekët. Në këtë rast $\frac{h}{\lambda}$ është shumë i vogël dhe për tangjensin hipërbolik mund të marrim vetëm anëtarin e parë. Pra:

$$th\,\frac{2\pi h}{\lambda} = 2\pi\,\frac{h}{\lambda}$$

kurse për shpejtësi të fazës fitojmë formulën:

$$c = \sqrt{\left(\frac{2\pi\alpha}{\lambda\rho} + \frac{g\lambda}{2\pi}\right)\frac{2\pi h}{\lambda}} \tag{17}$$

Për valët e rëndimit mund të mos përfillet anëtari i parë, prandaj vlen:

$$c = \sqrt{gh} \tag{18}$$

Në këtë rast nuk figuron gjatësia valore λ. Këto valë nuk tregojnë dispersion dhe shpejtësia e përhapjes së tyre është e barabartë me shpejtësinë e fazës. Shpejtësia e kësaj përhapje është proporcionale me rrënjën katrore të thellësisë së ujit.

c) Lëvizja e grimcës në valë

Do të shënojmë amplitudën e funksionit (6) me

$$u = A\,ch\,k(z + h) \tag{19}$$

Atëherë potenciali i shpejtësisë shkruhet në formën:

$$\Phi = u \cos (kx - \omega t) \qquad (20)$$

Komponentet e shpejtësisë së grimcës janë:

$$v_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = k\,u \sin (kx - \omega t)$$

$$v_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = - u' \cos (kx - \omega t)$$

Për komponente mund të shkruajmë derivatet e koordinatave sipas kohës:

$$\frac{dx}{dt} = k\,u \sin (kx - \omega t)$$

$$\frac{dz}{dt} = - u' \cos (dx - \omega t)$$

Integrojmë sipas kohës:

$$x - x_o = \frac{k}{\omega}\, u \cos (kx - \omega t)$$

$$z - z_o = \frac{u'}{\omega} \sin (kx - \omega t)$$

Shënojmë shkurtimisht amplitudat me

$$a = \frac{k\,u}{\omega}, \quad b = \frac{u'}{\omega}$$

kurse ekuacionet e sipërme e marrin formën:

$$\frac{x - x_o}{a} = \cos (kx - \omega t)$$

$$\frac{x - x_o}{b} = \sin (kx - \omega t)$$

I ngrisim në katrorë dhe i mbledhim:

$$\left(\frac{x - x_o}{a}\right)^2 + \left(\frac{z - z_o}{b}\right)^2 = 1$$

Shohim se çdo grimcë në valë përshkruan elipsë. Pra, te valët në ujë grimcat nuk lëvizin poshtë-lartë, sikurse e mendojmë në formën më të thjeshtë, por oshilojmë rreth pozitave të tyre ekuilibruese (x_o, y_o), duke përshkruar rreth tyre elipsa.

Gjysmëboshtet e këtyre elipsave janë:

$$a = \frac{k}{\omega} u = A \frac{k}{\omega} ch\, k(z+h)$$

$$b = \frac{u'}{\omega} = A \frac{k}{\omega} sh\, k(z+h)$$

Kurse marrëdhënia e tyre:

$$\frac{b}{a} = th\, k(z+h) \tag{21}$$

Siç shihet, kjo marrëdhënie ndërro me z. Në fund të ujit $z = -h$ kjo marrëdhënie është e barabartë me zero, pra $b = 0$ dhe elipsa degjenerohet në drejtëz horizontale. Kah sipërfaqja kjo marrëdhënie rritet, duke marrë vlerë më të madhe në vetë sipërfaqen:

$$\frac{b}{a} = th \frac{2\pi h}{\lambda} \tag{22}$$

Ekscentriciteti i këtyre elipsave është

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = A \frac{k}{\omega} \tag{22}$$

gjithkund njësojë.

Nëse uji është shumë i thellë, atëherë $h/\lambda \to \infty$, kurse $th\ (2\pi h/\lambda) \to 1$. Nga shprehja (21) do të kemi:

$$b = a$$

kurse grimcat në sipërfaqe të ujit përshkruajnë rrathë.

9. LIGJI I PUAZELIT

Ky është ligji i rrjedhjes së lëngut viskoz nëpër gyp kapilar. Për lëngjet viskoze, Njutni ka paraqitur shprehjen për forcë të fërkimit në mes të dy shtresave fqinje të cilat lëvizin me shpejtësi të ndryshme. Kjo formulë shprehet në formën:

$$T = \eta S \frac{dv}{dx} \tag{1}$$

Kjo tregon se forca e fërkimit të brendshëm është proporcionale me sipërfaqen e takimit të shtresave dhe ndërrimit të shpejtësisë në njësi

të gjatësisë në kahje normale të sipërfaqes së takimit. Faktori i proporcionalitetit η paraqet konstante specifike të lëngut dhe përcakton vetitë e tij për fërkim të brendshëm. E quajmë koeficient të lëngut viskoz.

Do të supozojmë se në gypin kapilar lëngu rrjedh në shtresa. Kjo do të thotë se në çdo shtresë shpejtësia është konstante dhe si e tillë ndërron vetëm nga shtresa në shtresë. Në gypin kapilar shtresat e kanë formën e cilindrit të hollë dhe të zbrazët, sikurse tregon fig. 66. Le të jetë rrezja e brendshme e sipërfaqes së shtresës r. Në këtë sipërfaqe sipas (1) vepron forca e fërkimit

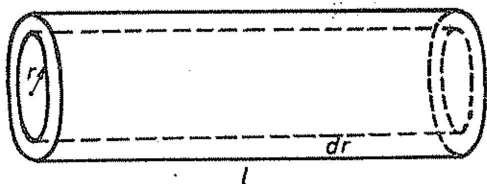


Fig. 66

$$T = \eta\, 2\pi r l \, \frac{dv}{dr} \tag{2}$$

Sipërfaqja e jashtme e ka rrezen $r + dr$, kurse forca e fërkimit që vepron në te është:

$$T = -\eta\, 2\pi l (r + dr) \left(\frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2} dr\right) =$$

$$= -2\eta\pi l \left(r \frac{dv}{dr} + r \frac{d^2v}{dr^2} dr + \frac{dv}{dr} dr\right) \tag{3}$$

Këtu nuk e kemi përfill anëtarin $(dr)^2$ si madhësi të vogël të rendit të lartë.

Përveç këtyre forcave, në shtresë veprojnë edhe forcat në baza, rezultantja e të cilave është e barabartë me ndërrimin e presioneve $p_1 - p_2$. Kjo duhet të shumëzohet me sipërfaqen e bazës $2\pi r dr$. Pra:

$$f = (p_1 - p_2)\, 2\pi r dr \tag{4}$$

Kur shtresa lëviz me shpejtësi konstante, atëherë ekziston ekuilibrimi dinamik në mes të forcave, prandaj forca e fërkimit duhet të jetë e barabartë me forcën lëvizëse. Pra:

$$\eta 2\pi l r \frac{dv}{dr} - \eta 2\pi l \left(r \frac{dv}{dr} + r \frac{d^2v}{dr^2} dr + \frac{dv}{dr} dr\right) = (p_1 - p_2)\, 2\pi r dr$$

Dy anëtarët e parë majtas thjeshtohen, pastaj pjestojmë me $2\pi dr$. Do të ngelë:

$$\eta l \left(r \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{dv}{dr}\right) = -(p_1 - p_2)\, r$$

ose

$$\frac{d}{dr}\left(r\ \frac{dv}{dr}\right)=-\ \frac{p_1-p_2}{\eta l}\ r$$

E integrojmë

$$r\ \frac{dv}{dr}=-\ \frac{p_1-p_2}{2\eta l}\ r^2+C$$

$$\frac{dv}{dr}=-\ \frac{p_1-p_2}{2\eta l}\ r+\frac{C}{r}$$

E integrojmë edhe një herë:

$$v=-\ \frac{p_1-p_2}{4\eta l}\ r^2+C\cdot ln\, r+D \qquad (5)$$

Kanë ngelur të përcaktohen konstantet e integrimit. Kuptojmë se duhet të merret $C=0$, sepse në të kundërtën për $r=0$ shpejtësia $v\to\infty$ që fizikisht nuk ka kuptim. Për përcaktimin e konstantes së integrimit D do të marrim konditën kufitare:

$$v=0 \text{ për } r=R$$

ku me R e kemi shënuar rrezen e gypit. Zëvendësojmë:

$$0=-\ \frac{p_1-p_2}{4\eta l}\ R^2+D$$

prej nga:

$$D=\frac{p_1-p_2}{4\eta l}\ R^2$$

Kur këtë e zëvendësojmë në (5) fitojmë:

$$v=\frac{p_1-p_2}{4\eta l}\ (R^2-r^2) \qquad (6)$$



Fig. 67

Kjo është formula e shpërndarjes së shpejtësive në prerjen tërthore të gypit kapilar. Varshmëria në mes të v dhe r është parabolike. Pra, nëse në prerjen tërthore të gypit e vizatojmë në çdo pikë vektorin e shpejtësisë, këta do të jenë të shpërndarë në sipërfaqen e një paraboloidi rrotullues, sikurse tregon fig. 67.

Do të përcaktojmë vëllimin e lëngut i cili kalon nëpër gyp kapilar në njësi të kohës. E njehsojmë sipas shprehjes:

$$Q=\int v\, dS \qquad (7)$$

Për element të sipërfaqes marrim bazën e shtresës. Pra, $dS = 2\pi r dr$. Zëvendësojmë në (7) shprehjen (6) dhe do të kemi:

$$Q = \int_0^R \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2) \, 2\pi r dr =$$

$$= \frac{\pi (p_1 - p_2)}{2\eta l} \int_0^R (R^2 r - r^3) \, dr$$

$$Q = \frac{\pi (p_1 - p_2)}{2\eta l} \left(R^2 \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{\pi (p_1 - p_2) R^4}{8\eta l} \tag{8}$$

Kjo është formula e Puazelit për rrjedhjen e lëngut viskos. Sikurse shihet nga (8) vëllimi i lëngut i cili kalon nëpër gyp kapilar në njësi të kohës është proporcional me shkallën e katërt të rrezes së gypit kapilar dhe ndryshimit të presioneve në fund dhe në fillim të tij. Gjithashtu, është proporcional i zhdrejtë me gjatësinë e gypit, por varet prej llojit të lëngut. Lëngjet viskoze me koeficient të viskozitetit më të madh më ngadalë lëvizin nëpër gyp.

Njehsimi i deritashëm vlen vetëm për gypa të hollë, sepse jemi bazuar në supozimin e rrymimit shtresor. Në gypa të gjerë, rrymimi i lëngut viskoz nuk është shtresor dhe nuk mund të shfrytëzohet shprehja (8).

10. EKUACIONI I NAVIER-STOKSIT

Për lëvizje të fluideve ideale vlen ekuacioni i Ojlerit (XI.5.4) dhe si i tillë nuk mund të përdoret për lëvizje të fluideve viskoze. Kur lëviz fluidi viskoz, në te veprojnë edhe forcat e fërkimit të brendshëm të cilat duhen të shprehen në ekuacionin e lëvizjes, prandaj për lëvizjen e tyre vlen ekuacion tjetër. Këtë ekuacion e kanë paraqitur Navieri dhe Stoksi prej nga edhe e mban emrin. Ky ekuacion, ndryshon nga ekuacioni i Ojlerit vetëm për anëtarin i cili në vetvete përmban veprimin e fërkimit të brendshëm. Qëllimi ynë është që të përcaktojmë këtë anëtar.

Do ta zbërthejmë shpejtësinë e lëvizjes në tri komponente. Komponentja e saj x në largësi të vogla ndërron për:

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy + \frac{\partial v_z}{dz} \partial z \tag{1}$$

Këtë formulë do ta plotësojmë duke i shtuar dhe zbritur dy anëtarë në këtë mënyrë:

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}\,dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)dz +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)dz \qquad (2)$$

Kuptojmë se dy anëtarët e fundit paraqesin komponentet e një rrotullimi, kurse tre anëtarët e parë elementet e një deformimi. Në mënyrë të ngjashme mund të shkruajmë edhe formulat për ndërrimin e komponenteve tjera të shpejtësisë. Nga (2) dhe formulat tjera të ngjashme përfitojmë elementet e tenzorit të deformimit të ndërrimit të shpejtësisë, të cilat do t'i shënojmë me $\dot{\delta}$. Matrica e tij është:

$$\dot{\delta} = \begin{pmatrix} \dot{\delta}_{xx} & \dot{\delta}_{xy} & \dot{\delta}_{xz} \\ \dot{\delta}_{yx} & \dot{\delta}_{yy} & \dot{\delta}_{yz} \\ \dot{\delta}_{zx} & \dot{\delta}_{zy} & \dot{\delta}_{zz} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

me këto elemente:

$$\dot{\delta}_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x},\; \dot{\delta}_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right),\; \dot{\delta}_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)$$

$$\dot{\delta}_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y},\; \dot{\delta}_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right),\; \dot{\delta}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad (4)$$

Këto deformime janë rrjedhim i veprimit të ndonjë force. Nëse këto forca i marrim në një të sipërfaqes, fitojmë presionet. Presionet janë rezultat i viskozitetit dhe gjithashtu formojnë një tenzor. Elementet e tenzorit të presionit do të jenë proporcional me elementet e tenzorit të deformimit (3). Prandaj shkruajmë:

$$t_{ik} = K\dot{\delta}_{ik} \qquad (5)$$

Do të përcaktojmë faktorin e proporcionalitetit K. Fillojmë nga formula e Njutnit (XI.9.1), e cila për presione e ka formën:

$$t = \eta\,\frac{\partial v_x}{\partial z} \qquad (6)$$

Në atë rast ajo vlen për lëvizje të fluidit vetëm në kahje të boshtit x, prandaj $v_y = v_z = 0$. Meqë ndërrimi i shpejtësisë është në kahje të boshtit z në formulën (6) duhet të shkruajmë t_{xz}, kurse nga (5) dhe (4) kemi:

$$\eta\,\frac{dv_x}{dz} = K\,\frac{1}{2}\,\frac{dv_x}{dz}$$

prej nga përfundojmë se:

$$K = 2\eta$$

Kurse shprehjen (6) duhet ta shkruajmë kësisoji:

$$t_{ik} = 2\eta\dot{\delta}_{ik} \tag{7}$$

Kjo është lidhja në mes të elementeve të tenzorit të presionit të viskozitetit dhe tenzorit të deformimit të shpejtësisë.

Të mendojmë një element të vëllimit të fluidit brinjët e të cilit janë paralel me boshtet e koordinatave me gjatësitë e tyre dx, dy dhe dz. Në sipërfaqen $dy \cdot dz$, e cila është normal ndaj boshtit x, veprojnë komponentet e presionit p_{xx}, p_{yx} dhe p_{zx}. Në sipërfaqen e majtë të këtij elementi vepron forca e fërkimit me x-komponenten:

$$-t_{xx}(x)\, dy \cdot dz$$

kurse në sipërfaqen e djathtë është:

$$t_{xx}(x + dx)\, dy \cdot dz$$

E zhvillojmë në seri të Tejlorit:

$$t_{xx}(x + dx) = t_{xx}(x) + \frac{\partial t_{xx}}{\partial x}\, dx$$

Kurse shuma e këtyre dy forcave është:

$$T_{xx} d\tau = \frac{\partial t_{xx}}{\partial x}\, dx\, dy\, dz$$

ose

$$T_{xx} = \frac{\partial t_{xx}}{\partial x}$$

Kurse nga (7) dhe (4) kemi:

$$T_{xx} = 2\eta\, \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \tag{8}$$

Në sipërfaqe të elementit të vëllimit të cilat qëndrojnë normal ndaj boshtit y vepron x-komponentja e presionit t_{yx} dhe në mënyrë të ngjashme fitojmë:

$$T_{yx} = \frac{\partial t_{yx}}{\partial y}$$

kurse nga (7) dhe (4) kemi:

$$T_{yx} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} \right) \tag{9}$$

Më në fund për x-komponenten e forcës e cila vepron në sipërfaqet e elementit të vëllimit të cilat qëndrojnë normal ndaj boshtit z kemi:

$$T_{zx} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} \right) \tag{10}$$

pasi t'i mbledhim (8), (9) dhe (10) fitojmë x-komponenten e forcës së fërkimit në element të vëllimit. Pra:

$$T_x = \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) =$$

$$= \eta \Delta v_x + \eta \frac{\partial}{\partial x} (div \vec{v})$$

Te fluidet e pangjeshuri $div \vec{v} = 0$, prandaj anëtari i dytë nuk figuron. Mbetet

$$T_x = \eta \Delta v_x$$

Në mënyrë të ngjashme fitojmë edhe për komponentet tjera të presionit të forcës së fërkimit. Kur t'i shprehim në formë vektoriale fitojmë:

$$\vec{T} = \eta \Delta \vec{v} \tag{11}$$

Këtë anëtar duhet t'ia shtojmë ekuacionit të Ojlerit në anën e djathtë dhe fitojmë:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \, grad \, \frac{v^2}{2} - \rho \vec{v} \times rot \, \vec{v} = \vec{f} - grad \, p + \eta \Delta \vec{v} \tag{12}$$

Ky është ekuacioni i Navier-Stoksit për lëvizjen e fluideve viskoze.

11. FORMULA E STOKSIT PËR REZISTENCË TË FËRKIMIT TË SFERËS

Le të rrjedh lëngu viskoz me shpejtësi relativisht të vogël në një kahje. Në rrugë të këtij rrymimi le të gjendet sfera me rreze a prej materialit të ngurtë. Nga presioni dhe fërkimi i lëngut me sipërfaqen e sferës ky do të veprojë në sferë me një forcë. Formulën për këtë forcë e ka përcaktuar Stoksi. E njëjta formulë mund të përdoret edhe kur lëngu pushon, ndërsa sfera lëviz me shpejtësi konstante nëpër lëng. Forca në këtë rast paraqet rezistencën e lëngut.

Për përfitimin e formulës së Stoksit fillojmë nga ekuacioni i Navier-Stoksit (X.10.12). Në rastin tonë problemi është stacionar, prandaj shpejtësia nuk varet nga koha ashtu që anëtari i parë në anën e majtë të ekuacionit nuk figuron. Do të supozojmë që shpejtësia e lëngut është e vogël dhe mund të mos i përfillin anëtarët te të cilët paraqiten katrorët e saj apo prodhimet. Kësisoji nuk do të paraqiten edhe dy anëtarët tjerë në anën e majtë. Gjithashtu, supozojmë se nuk ekzistojnë forcat e jashtme, prandaj $\vec{f} = 0$. Atëherë nga ekuacioni i lëvizjes mbetet:

$$grad\, p = \eta \Delta v \tag{1}$$

Së bashku me te duhet të vlejë edhe ekuacioni i kontinuitetit:

$$div\, \vec{v} = 0 \tag{2}$$

Përveç këtyre ekuacioneve, duhet të paraqesim edhe konditat kufitare. Në largësi të madhe nga sfera fusha e rrymimit është homogjene dhe vlen $\vec{v} = \vec{v}_o$, ku $\vec{v}_o$ është shpejtësia e këtij rrymimi, kur nuk ekziston sfera.

Problemin do ta zgjidhim në koordinate polare me origjinë në qendër të sferës dhe bosht polar në kahje të rrymimit. Në këtë mënyrë fusha e rrjedhjes nuk varet prej koordinatës φ. Shpejtësinë e rrjedhjes do ta zbërthejmë në dy komponente, sikurse tregon fig. 68.

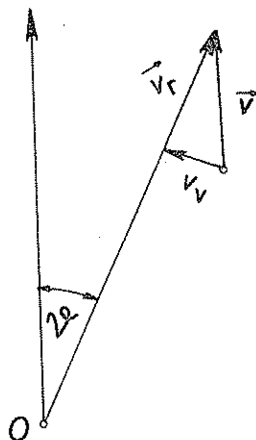


Fig. 68

$$\begin{aligned} v_r &= v_o \cos\vartheta \\ v &= -v_o \sin\vartheta \end{aligned} \tag{3}$$

kur $r \to \infty$. Parashenja minus pranë v tregon se ka kahje të kundërt nga zmadhimi i këndit ϑ.

Në vetë sferën vlen kondita:

$$v_r = v = 0 \text{ për } r = a \tag{4}$$

sepse sfera është në qetësi dhe nga fërkimi edhe shpejtësia e lëngut në sipërfaqe të saj duhet të jetë e barabartë me zero.

Kësisoji problemi është shtruar matematikisht. Duhet të zgjidhim ekuacionet (1) dhe (2), duke i shfrytëzuar konditat (3) dhe (4). Këtu kemi dy funksione të panjohura: presionin p dhe shpejtësinë v. Për të eliminuar njërën shfrytëzojmë formulën e njohur:

$$rot\, rot\, v = grad\, div\, v - \Delta v$$

kurse nga (2) ngel:

$$\triangle \vec{v} = - rot\, rot\, \vec{v}$$

kurse (2) e merr formën:

$$grad\, p = - \eta\, rot\, rot\, \vec{v} \tag{5}$$

Kërkojmë divergjencën e shprehjes së fundit

$$div\, grad\, p = 0$$

sepse divergjenca e rotorit gjithmonë është e barabartë me zero. Ekuacionin e fituar mund ta shkruajmë kësisoji

$$\triangle p = 0 \tag{6}$$

E zhvillojmë laplasjanin në koordinate polare

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right) = 0$$

Anëtarin e tretë nuk e kemi shkruar, sepse p nuk varet nga φ. Do të tentojmë që si zgjidhje të këtij ekuacioni të marrim funksionin:

$$p = A\, r^n \cos\vartheta \tag{7}$$

dhe të përcaktojmë shkallën e n ashtu që (7) të kënaqë (6). E zëvendësojmë:

$$\frac{\partial}{\partial r}\,(n\, r^{n+1}) \cos\vartheta - \frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial \vartheta}\,(\sin^2\vartheta)\, r^n = 0$$

ose

$$n(n+1)\, r^n \cos\vartheta - 2r^n \cos\vartheta = 0$$

prej nga

$$n^2 + n - 2 = 0$$

Zgjidhjet e këtij ekuacioni janë:

$$n = -2 \ \text{dhe} \ n = 1$$

Në konsiderim vjen vetëm zgjidhja e parë, sepse e dyta dërgon deri te mundësia që potenciali të bëhet pambarim i madh, çka nuk ka kuptim. Nga zgjidhja e parë për n, (7) do të ketë formën

$$p = \frac{A}{r^2}\cos\vartheta \tag{8}$$

Më tutje duhet t'i kërkojmë komponentet e shpejtësisë. Fillojmë nga shprehja (2) të cilën duhet ta zhvillojmë në koordinata polare. Do të kemi:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r)+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\, v_\vartheta)+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}=0$$

Edhe këtu anëtari i tretë nuk vjen në konsiderim, sepse asgjë nuk varet prej φ. Nga shprehja e fundit gjejmë:

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial_\vartheta}(\sin\vartheta\, r\cdot v_\vartheta)=-\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) \tag{9}$$

E kryejmë derivatin sipas r:

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_\vartheta)\right]=-\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^2 v_r) \tag{10}$$

Do ta zhvillojmë shprehjen (5) në koordinata polare. Nga matematika është e njohur se komponentet polare të rotorit janë:

$$rot_r\,\vec{v}=\frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\, v_\varphi)-\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\varphi}\right]$$

$$rot_\vartheta\,\vec{v}=\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_\varphi) \tag{11}$$

$$rot_\varphi\,\vec{v}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_\vartheta)-\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\vartheta}$$

Meqë në rastin që po e shqyrtojmë $v_\varphi=0$ dhe $\dfrac{\partial}{\partial\varphi}=0$ *rrjedh:*

$$rot_r\vec{v}=rot_\vartheta\,\vec{v}=0$$

Por, neve në (5) na nevojitet rotori i dyfishtë. Sipas shprehjes së parë dhe të tretë të (11) dhe $\partial/\partial\varphi=0$ kemi:

$$rot_r rot\,\vec{v}=\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{\sin\vartheta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_\vartheta)-\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\vartheta}\right]\right\}$$

Në anëtarin e parë paraqitet shprehja (10), prandaj e zëvendësojmë dhe nga (5) fitojmë:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^2 v_r)+\frac{1}{r^2\sin\partial}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial v_r}{\partial\vartheta}\right)=\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial r}=-\frac{2A}{\eta r^3}\cos\vartheta \tag{12}$$

Kësisoji e kemi eliminuar v_ϑ.

Do të marrim se v_r përcaktohet me shprehjen:

$$v_r = f(r)\cos\vartheta \tag{13}$$

ku $f(r)$ është funksioni të cilin duhet ta përcaktojmë. E zëvendësojmë këtë shprehje në (12) të cilën së pari e kemi shumëzuar me r^2.

$$\frac{d}{dr}(2rf + r^2 f')\cos\vartheta + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}(-\sin^2\vartheta) f = -\frac{2A}{\eta r}\cos\vartheta$$

ose

$$r^2 f'' + 4rf' = -\frac{2A}{\eta r} \tag{14}$$

Kësisoji kemi fituar ekuacionin diferencial për përcaktimin e funksionit f. Ky është jo homogjen dhe një integral partikular i tij është:

$$f = \frac{A}{\eta r} \tag{15}$$

për çka mund të bindemi lehtë nëse e zëvendësojmë në (14).

Për zgjidhjen e ekuacionit homogjen:

$$r^2 f'' + 4rf' = 0 \tag{16}$$

e shumëzojmë me r^2 dhe e shkruajmë në formën:

$$\frac{d}{dr}(r^4 f') = 0$$

E integrojmë

$$f' = \frac{B}{r^4}$$

kurse integrimi i dytë na jep

$$f = -\frac{B}{3r^3} + C \tag{17}$$

Shumën e (17) dhe (15) e zëvendësojmë në (13). Fitojmë:

$$v_r = \left(\frac{A}{\eta r} - \frac{B}{3r^2} + C\right)\cos\vartheta \tag{18}$$

Që të fitojmë komponenten e dytë të shpejtësisë e shumëzojmë (18) me r^2 dhe e derivojmë sipas r:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) = \left(\frac{A}{\eta} + \frac{B}{3r^2} + 2Cr\right)\cos\vartheta$$

Këte e zëvendësojmë në (9):

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial_\vartheta}(\sin\vartheta\, v_\vartheta) = -\left(\frac{A}{\eta r} + \frac{B}{3r^3} + 2C\right)\cos\vartheta$$

E integrojmë sipas ϑ:

$$\sin\vartheta\, v_\vartheta = -\left(\frac{A}{\eta r} + \frac{B}{3r^3} + 2C\right)\int \sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta + D$$

Vlera e integralit është:

$$\frac{1}{2}\sin^2\vartheta$$

prandaj kemi:

$$v_\vartheta = -\left(\frac{A}{2\eta r} + \frac{B}{6r^3} + C\right)\sin\vartheta + \frac{D}{\sin\vartheta}$$

Kuptojmë se konstantja D duhet të jetë e barabartë me zero, sepse në të kundërtën për $\vartheta = 0$ komponentja e kësaj shpejtësie bëhet pambarim e madhe. Prandaj, kjo komponent do të jetë:

$$v_\vartheta = -\left(\frac{A}{2\eta r} + \frac{B}{6r^3} + C\right)\sin\vartheta \qquad (19)$$

Kanë ngelur të përcaktohen konstantet e integrimit me ndihmën e konditave kufitare. Për $r \to \infty$ fitojmë:

$$v_r = C\cos\vartheta$$

dhe kur ta krahasojmë me (3) shohim se është:

$$C = v_o$$

Për $r = a$, nga (18), (19) dhe kondita (4) kemi:

$$0 = \frac{A}{\eta a} - \frac{B}{3a^3} + v_o$$

$$0 = \frac{A}{2\eta a} + \frac{B}{6a^3} + v_o$$

Nga këto fitojmë:

$$\frac{A}{\eta} = -\frac{2}{3} v_o a$$

$$B = -\frac{3}{2} v_o a^3$$

Në bazë të tyre (18), (19) dhe (8) do të kemi formën përfundimtare:

$$v_r = \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\right) v_o \cos\vartheta \tag{20}$$

$$v_\vartheta = \left(-1 + \frac{3a}{4r} + \frac{a^3}{4r^3}\right) v_o \sin\vartheta \tag{21}$$

$$p = -\frac{3 v_o a}{2 r^2} \eta \cos\vartheta \tag{22}$$

Kalojmë tani në njehsimin e forcës me të cilën lëngu vepron në sferë. Së pari do ta njehsojmë forcën e cila është rezultat i presionit. Në sipërfaqe të sferës, për $r = a$ vepron presioni në kahje të boshtit polar:

$$-p\cos\vartheta = \frac{3}{2}\frac{v_o}{a}\eta\cos^2\vartheta$$

Elementi i sipërfaqes së sferës është:

$$dS = 2a^2\pi \sin\vartheta\, d\vartheta$$

kurse tërë forcën e fitojmë, duke integruar nëpër sipërfaqe të sferës:

$$F_1 = 3 a v_o \eta\pi \int_0^\pi \cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta$$

Meqë integrali e ka vlerën 2/3, fitojmë:

$$F_1 = 2\pi v_o \eta a \tag{23}$$

Në sferë veprojnë edhe forcat e fërkimit të cilat shkaktojnë presionet sipas (XI.10.7):

$$t_{ik} = -2\eta\dot{\delta}_{ik}$$

Në sipërfaqe të sferës veprojnë vetëm ato presione të cilat janë normal në elemente të sipërfaqes së saj dhe këto fitohen për indeks $i = r$.

Indeksi i dytë nuk mund të jetë r, sepse presionet e fërkimit janë tangjencial. Gjithashtu, nuk mund të jetë as φ, sepse nga kjo ndryshore asgjë nuk varet, nuk varet as lëvizja në kahje të saj. Prandaj, ka ngelur vetëm elementi aktiv:

$$t_{r\vartheta} = -2\,\eta\dot{\delta}_r \tag{24}$$

Tregohet në matematikë se në koordinate polare është:

$$2\,\dot{\delta}_{r\vartheta} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - \frac{v_\vartheta}{r} \tag{25}$$

Pra:

$$t_{r\vartheta} = -\eta\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - \frac{v_\vartheta}{r}\right) \tag{26}$$

Kur të zëvendësojmë në (26) shprehjet (20) dhe (21) fitojmë:

$$t_{r\vartheta} = \frac{3}{2}\,\frac{\eta v_o}{a}\sin\vartheta \tag{27}$$

Komponentja e këtij presioni në kahje të lëvizjes së lëngut është:

$$t_{r\vartheta}\sin\vartheta = \frac{3\,\eta v_o}{2\,a}\sin^2\vartheta$$

E integrojmë dhe do të kemi:

$$F_2 = 3\,\pi v_o \eta a \int_0^\pi \sin^3\vartheta\, d\vartheta$$

Ky integral e ka vlerën 4/3, prandaj vlen:

$$F_2 = 4\,\pi\eta v_o a \tag{28}$$

Kësaj force duhet t'ia shtojmë forcën (23) dhe përfundimisht fitojmë:

$$F = 6\,\pi\eta v_o a \tag{29}$$

Kjo është formula e Stoksit për forcë të rezistencës së sferës në rrjedhjen e lëngut viskoz.

PJESA E DYTË

ELEKTRODINAMIKA

XII. ELEKTROSTATIKA

1. FUSHA ELEKTROSTATIKE NË BOSHLLËK

a) Rekapitulim i njohurive nga kursi i përgjithshëm

Do të ndërtojmë teorinë e fushës elektrostatike, duke u bazuar në të dhënën eksperimentale të cilën e shpreh ligji i Kulonit. Kuloni me matje e ka përcaktuar ligjin e forcës me të cilën tërhiqen apo dëbohen dy sasi pikësorë të elektricitetit. Ka treguar se kjo forcë është proporcionale me sasitë e elektricitetit, por proporcionale e zhdrejtë me katrorin e largësive të qendrave të tyre. Nëse sasitë e elektriciteteve i shënojmë me q_1 dhe q_2, kurse largësinë reciproke të tyre me r, atëherë ky ligj shprehet në formën:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{1}$$

Kjo shprehje e përcakton vetëm intensitetin e saj. Por, forca është madhësi vektoriale, është dëbuese apo tërheqëse, që do të thotë se vepron në kahje të vijës e cila i bashkon sasitë e elektriciteteve. Kjo është kahja e vektorit $\vec{r}$, prandaj mund të shkruajmë:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r} \tag{2}$$

Meqë ekzistojnë dy lloje të elektriciteve, pozitiv dhe negativ, sasitë q_1 dhe q_2 janë madhësi me parashenjë. E dimë se në mes të elektriciteve të kundërta vepron forca tërheqëse, prandaj në këte rast prodhimi $q_1 q_2$ është negativ dhe forca ka kahje të kundërt nga largësia r. Ajo tenton ta zvogëlojë këtë gjatësi. Në të kundërtën, kur elektricitetet janë të një lloji, prodhimi $q_1 q_2$ është pozitiv, forca ka kahje të vektorit $\vec{r}$ dhe tenton të zmadhojë largësinë në mes të elektriciteve. Si e tillë është forcë dëbuese.

Në shprehjet (1) dhe (2) paraqitet faktori i proporcionalitetit k. Vlera e kësaj konstante varet prej njësive me të cilat i shprehim madhësitë në ligjin e Kulonit. Ne do të shfrytëzojmë sistemin e racionalizuar të *M-K-S njësive*. Në këtë sistem, sasia e elektricitetit shprehet me Kulon (amper sekondë), largësia në metër, ndërsa forca në njutën. Kësisoji, kjo konstante e ka vlerën:

$$k = 8{,}987 \cdot 10^9 \ \frac{N\,m^2}{C^2} \tag{3}$$

ose në mënyrë të rrumbullakuar:

$$k = 9 \cdot 10^9 \ \frac{N\,m^2}{C^2} \tag{3a}$$

Në fund duhet cekur se ligji i Kulonit vlen vetëm për sasi pikësore të elektriciteteve, sepse vetëm atëherë largësia në mes tyre është e përcaktuar gjeometrikisht. Por, sasitë e elektriciteteve pikësore nuk ekzistojnë. Ky mund të jetë i shpërndarë në ndonjë vëllim apo nëpër ndonjë sipërfaqe. Për fat elektriciteti i cili është i shpërndarë në mënyrë të njëtrajtshme nëpër sipërfaqe të sferës zotëron ashtu thuase është i koncentruar në qendër të saj. Prandaj, sasinë pikësore të elektricitetit mund ta zëvendësojmë me një sferë të vogël në sipërfaqe të së cilës njëtrajtësisht është i shpërndarë elektriciteti.

Të mendojmë se në vëllim të caktuar kemi elektricitet të shpërndarë. Atëherë në hapësirë rreth tij diktojmë një veprim. Nëse në çdo pikë të hapësirës bartim një elektricitet provues, atëherë mund të masim forcën e cila vepron në te. Në pika të ndryshme të hapësirës kjo forcë do të jetë e ndryshme edhe për nga intensiteti edhe për nga kahja e veprimit. Themi se në këtë hapësirë zotëron një fushë e forcës të cilën e quajmë fushë elektrike.

Meqë forca elektrike varet edhe nga sasia e elektricitetit provues, me marrëveshje merret që kjo sasi është +1. Kësisoji intensitetin e fushës elektrike mund ta definojmë si forcë me të cilën fusha vepron në elektricitetin +1. Fusha është grumbull vektorësh në të gjitha pikat e saj. Çfarë është ajo, varet prej atij elektriciteti i cili e shkakton atë. Këtë elektricitet e quajmë burim të fushës.

Fushën elektrike do ta shënojmë me simbolin $\vec{E}$. Nëse në fushë gjendet sasia q e elektricitetit, atëherë fusha në te vepron me forcë:

$$\vec{F} = q\vec{E} \tag{4}$$

Kjo është e qartë sepse $\vec{E}$ paraqet forcën me të cilën fusha vepron në njësi të elektricitetit, ndërsa në elektricitetin q vepron me forcë q herë më të madhe.

Fusha elektrike është fushë vektoriale. Sikurse çdo fushë vektoriale, edhe këtë mund ta shprehim me ndihmën e vijave vektoriale të cilat i quajmë vija të forcës së fushës elektrike. Këto vija kanë formë të atillë që kahja e fushës elektrike në çdo pikë të tyre përputhet me tangjenten. Numri i vijave të forcës i përgjigjet intensitetit të fushës elektrike në atë vend, kështu që vendet ku ato janë të dendura tregojnë se fusha është e fuqishme, kurse në ato vende ku ato janë të rralla fusha është e dobët. Pasi fusha elektrike në çdo pikë të hapësirës e ka

vetëm një kahje të vetme, duhet të merret se nëpër çdo pikë kalon vetëm një vijë e forcës. Kësisoji, vijat e forcës së fushës elektrike formojnë sistem vijash të cilat nuk prehen në mes vete.

Një formë e veçantë e fushës elektrike është fusha homogjene. Kjo fushë në çdo pikë të hapësirës së shqyrtuar është e njëjtë, kurse vijat e forcës së saj janë drejtëza paralele dhe ekuidistante.

Me ndihmën e vijave të forcës elektrike mund të definojmë fluksin elektrik. Të mendojmë në fushë elektrike një sipërfaqe të çfarëdoshme. Fluksi elektrik paraqet numrin e vijave të forcës elektrike të cilat kalojnë nëpër sipërfaqe të dhënë. Për përcaktimin e fluksit duhet të definojmë kahjen pozitive të normales në sipërfaqe. Të gjitha vijat e forcës elektrike të cilat me normalen pozitive mbyllin kënd të ngushtë japin kontribut pozitiv të fluksit, kurse ato të cilat mbyllin kënd të gjerë japin kontribut pozitiv të fluksit, kurse ato të cilat mbyllin kënd të gjerë japin kontribut negativ.

Meqë dendësia e vijave të forcës është e barabartë me numrin e tyre në njësi të sipërfaqes të vendosur normal, rrjedh se intensiteti i fushës elektrike është i barabartë me fluksin në njësi të sipërfaqes të vendosur normal në vija të forcës. Çfarëdo sipërfaqe të dhënë e ndajmë në numër të madh të elementeve të saj. Meqë elementi i sipërfaqes nuk është i përcaktuar plotësisht me madhësinë e vet, sepse ka edhe orientim të caktuar në hapësirë, është e nevojshme që elementin e sipërfaqes ta shprehim si vektor i cili ka kahje të normales pozitive në sipërfaqe, kurse madhësinë e barabartë me madhësinë e sipërfaqes.

Le të jetë një element i tillë $\vec{dS}$. Në përgjithësi kahja e fushës $\vec{E}$ nuk do të përputhet me normalen në sipërfaqe, por këta dy vektorë mbyllin një kënd α. Projeksioni i elementit të sipërfaqes në rrafshin normal në kahje të fushës do të jetë:

$$dS \cos\alpha$$

Meqë intensiteti i fushës është i barabartë me fluksin në njësi të sipërfaqes, duhet ta shumëzojmë me komponenten normale të elementit të sipërfaqes që të fitojmë fluksin nëpër atë element. Pra:

$$d\Phi = E \cos\alpha \cdot dS$$

Në anën e djathtë gjendet vlera e prodhimit skalar, prandaj e shkruajmë shkurtimisht:

$$d\Phi = \vec{E}\,\vec{dS}$$

Që të fitojmë fluksin nëpër tërë sipërfaqen e dhënë duhet t'i mbledhim kontributet për fluks nga të gjitha elementet. Kjo mbledhje na shpie te integrali sipërfaqësor:

$$\Phi = \int \vec{E}\,\vec{dS} \tag{5}$$

Pra, fluksi elektrik nëpër sipërfaqe të dhënë është i barabartë me integralin sipërfaqësor të vektorit të fushës në atë sipërfaqe.

b) Teorema e Gausit për fluksin elektrik

Do të përcaktojmë fluksin e fushës elektrike, burim i së cilës është sasia pikësore e elektricitetit q. Në këtë rast intensitetin e fushës e shprehim me ligjin e Kulonit. Burimi i fushës, elektriciteti q, vepron në elektricitetin +1 në largësi r me forcën:

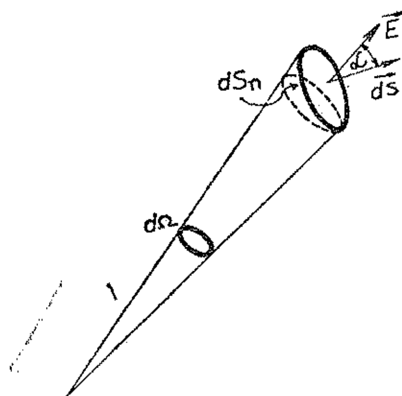


Fig. 69

$$E = k \frac{q}{r^2} \qquad (6)$$

Sipërfaqen e dhënë e ndajmë në elemente të vogla të saj. Në fig. 69 është vizatuar një element i sipërfaqes $\vec{dS}$. Vektori i fushës ka kahje radiale, prandaj duhet të merret komponentja normale e këtij elementi e cila e ka vlerën

$$dS_n = dS \cos\alpha$$

kurse fluksi e ka vlerën

$$d\Phi = E\, dS_n$$

Elementin e sipërfaqes mund ta shprehim me ndihmën e këndit hapësinor $d\Omega$ me të cilin ky element shihet nga burimi i fushës. E dimë se këndi hapësinorë definohet si sipërfaqe e sferës me rreze një njësi. Në figurën 69 kemi konin me kulm në burim të fushës, i cili prehet me dy sfera: njera e ka rrezen r dhe sipërfaqen e prerjes dS_n, kurse tjetra rrezen një njësi dhe sipërfaqen e prerjes $d\Omega$. E dimë nga gjeometria se sipërfaqet e prerjes së këtyre sferave qëndrojnë sikurse katrorët e rrezeve të tyre. Pra:

$$dS_n : d\Omega = r^2 : 1$$

Prej nga:

$$dS_n = r^2 d\Omega$$

kurse fluksi nëpër element të sipërfaqes është:

$$d\Phi = E\, r^2 d\Omega$$

Nga shprehja (6) kemi:

$$E\, r^2 = k\, q$$

prandaj vlen

$$d\Phi = k\, q\, d\Omega$$

Fluksi total fitohet me integrim nëpër tërë sipërfaqen:

$$\Phi = \int d\Phi = k\, q \int d\Omega$$

Integrali në anën e djathtë është i barabartë me këndin hapësinor Ω

$$\Phi = k\, q\Omega \tag{7}$$

Rezultatin e fituar do ta zbatojmë për ndonjë sipërfaqe të mbyllur. Në këtë rast duhet të dallojmë dy mundësi: 1) burimi i fushës gjendet jashtë saj dhe 2) brenda saj.

Do të merremi vesh se te sipërfaqet e mbyllura kahja pozitive e normales është gjithmonë nga jashtë. Do të tërheqim të gjitha tangjentet nga burimi i fushës në sipërfaqe të dhënë. Këto tangjente formojnë një kon sikurse tregon fig. 70. Takimi i këtyre tangjenteve me sipërfaqe qëndron në një vijë e cila këtë e ndan në dy pjesë, të lartën S_1 dhe të poshtën S_2. Nëpër çdonjërën sipërfaqe kalon i njëjti fluks:

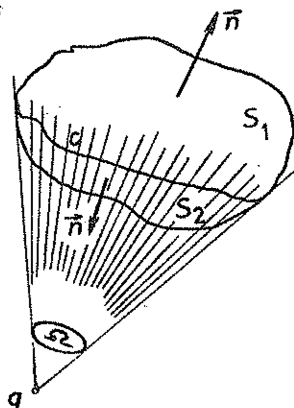


Fig. 70

$$\Phi_1 = \Phi_2 = k\, q\Omega$$

sepse të dyjat shihen me të njëjtin kënd Ω. Por, nga orientimi i kahjes pozitive të normales duhet të merret fluksi nëpër S_1 si pozitiv, kurse nëpër S_2 si negativ. Fluksi nëpër tërë sipërfaqen është:

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = 0 \tag{8}$$

Kjo do të thotë se çdo vijë e forcës, e cila hynë në sipërfaqe të mbyllur, nga ajo duhet të dalë dikund. Këto vija kalojnë nëpër sipërfaqe, por asnjëra prej tyre brenda sipërfaqes as nuk fillon e as nuk mbaron.

Të shqyrtojmë rastin e dytë kur burimi i fushës gjendet brenda sipërfaqes. Këndi hapësinor me të cilin shihet kjo sipërfaqe nga burimi është:

$$\Omega = 4\,\pi$$

kurse nga (7) fitojmë

$$\Phi = 4\,\pi\, k\, q \tag{9}$$

Nëse dëshirojmë që shprehjet të jenë racionale, atëherë duhet të eliminohet iracionaliteti 4π. Për këtë arësye e definojmë konstanten e re me zëvendësim:

$$\varepsilon_o = \frac{1}{4\,\pi\, k} \tag{10}$$

Vlera numerike e saj është:

$$\varepsilon_o = 8{,}859 \cdot 10^{-12} \ \frac{A\,s}{V\,m} \tag{11}$$

dhe e quajmë konstante dielektrike të boshllëkut. Me ndihmën e saj shprehja (9) e merr formën:

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_o} \tag{12}$$

Kjo tregon se brenda sipërfaqes gjendet burimi i fushës nga i cili dalin q/ε_o vija të forcës. Me fjalë të tjera, çdo njësi e elektricitetit është burim i $1/\varepsilon_o$ vijave të forcës elektrike. Me nocionin burim kuptojmë fillimin e vijave të forcës, nëse elektriciteti është pozitiv, dhe mbarimin e tyre, nëse elektriciteti është negativ.

Nga (5) dhe (12) kemi:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_o} \tag{13}$$

Kjo formulë shpreh teoremën e Gausit për fluks.

Shprehja e fituar mund të zgjerohet edhe për rastin kur si burim fushe paraqiten sasitë pikësore të elektriciteteve $q_1, q_2 \ldots q_n$. Në një pikë të hapësirës çdo njëri prej burimeve jep intensitetin e fushës së vet i cili rrjedh nga ligji i Kulonit. Nëse këto intensitete i shënojmë me $E_1, E_2, \ldots E_n$, atëherë për rezultante të tyre fitojmë shumën vektoriale:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

ndërsa fluksi nëpër ndonjë sipërfaqe të mbyllur e cila përfshin të gjitha këto burime përcaktohet në mënyrën:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{S} = \oint \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i\, d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \oint \vec{E}_i\, d\vec{S}$$

Në anën e djathtë qëndron shuma e flukseve të të gjitha burimeve. Për çdo njërin prej tyre vlen shprehja (13), prandaj fitojmë:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o} \sum_{i=1}^{n} q_i \tag{14}$$

Kjo shprehje paraqet teoremën e Gausit për fluks të fushës burim të së cilës janë sasitë pikësore të elektricitetit.

Kemi cekur më lartë se zakonisht elektriciteti gjendet i shpërndarë në ndonjë vëllim apo sipërfaqe. Le të jetë i shpërndarë në ndonjë vëllim. Këtë e ndajmë në elemente të vogla të tij. Njëri prej tyre le të

jetë $d\tau$. Në përgjithësi sasia e elektricitetit ndërron nga vendi në vend, prandaj në çdo element do të jetë tjetër. Do të definojmë si dendësi të elektricitetit madhësinë:

$$\rho = \frac{dq}{d\tau} \tag{15}$$

Dendësia e elektricitetit varet prej koordinateve të pikës rreth së cilës është përshkruar elementi i vëllimit $d\tau$, pra është funkison i koordinateve. Shpërndarja e elektricitetit do të jetë e njohur nëse na është e njohur ρ si funksion i koordinateve.

Nëse zgjedhim elemente mjaft të vogla të vëllimit, atëherë elektriciteti në to zotëron sikurse sasi pikësore e elektricitetit dhe mund të zbatojmë shprehjen (14). Në çdo njërin element gjendet sasia e elektricitetit:

$$dq = \rho \, d\tau$$

dhe duke i mbledhur këto sasi fitojmë:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} q_i = \int \rho \, d\tau$$

kurse për fluks të fushës së elektricitetit të shpërndarë në hapësirë fitojmë:

$$\oint \vec{E} \, d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o} \int \rho \, d\tau \tag{16}$$

c) Ekuacioni themelor diferencial i elektrostatikës

Shprehjet për teoremë të Gausit (13), (14) dhe (16) tregojnë lidhjet në mes të fushës elektrike dhe burimeve të saj. Këto formula janë dhënë në formë integrale. Do të kryejmë transformimin e tyre nga forma integrale në atë diferenciale.

Fillojmë nga (16). Në anën e majtë të saj gjendet integrali sipërfaqësor, kurse në të djathtën vëllimor. E dimë nga matematika se integralin sipërfaqësor nëpër sipërfaqe të mbyllur mund ta shndërrojmë në integral vëllimor nëpër vëllim të cilin e mbyll ajo sipërfaqe. Formulën për këtë shndërrim e ka dhënë Gausi dhe ajo ka formën:

$$\oint \vec{E} \, d\vec{S} = \int div \, \vec{E} \, d\tau$$

kurse (16) mund ta shkruajmë:

$$\int div \, \vec{E} \, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_o} \int \rho \, d\tau$$

Meqë kjo duhet të vlejë për çfarëdo vëllimi të mundshëm dhe për çfarëdo shpërndarje të mundshme të elektricitetit, duhet përfunduar se këto dy integrale mund të jenë të barabarta vetëm nëse funksionet në integrale janë të barabarta. Pra:

$$div\,\vec{E} = \frac{\varepsilon_o}{\rho} \tag{17}$$

Ky është ekuacioni diferencial i cili lidh fushën elektrike me burimet e saj. Quhet ekuacion themelor i fushës elektrostatike.

Dihet, gjithashtu, nga matematika se funksioni vektorial nuk është plotësisht i përcaktuar vetëm me divergjencën e vet. Prandaj, për përcaktimin e fushës elektrike nevojitet edhe një ekuacion diferencial i cili përcakton rotorin e vektorit $\vec{E}$. Atë do ta përfitojmë më vonë.

2. POTENCIALI ELEKTRIK

a) Potenciali i fushës së sasisë pikësore të elektricitetit

Le të jetë si burim i fushës elektrostatike sasia pikësore e elektricitetit q. Në pikën e larguar për r nga burimi i fushës, intensiteti i saj përcaktohet me shprehjen (6). Kahja e veprimit të saj përputhet me kahjen e largësisë r, prandaj e përcakton vektori unitar $\vec{r}_o$. Pra:

$$\vec{E} = k\,\frac{q}{r^2}\,\vec{r}_o \tag{1}$$

E dimë se:

$$\vec{r}_o = grad\,r$$

dhe

$$\frac{q}{r^2} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{q}{r}\right)$$

kurse (1) mund ta shkruajmë

$$\vec{E} = -\frac{d}{dr}\left(k\,\frac{q}{r}\right)\,grad\,r$$

dhe nga rregulla e gradientit të funksionit të përbërë:

$$\vec{E} = -\,grad\left(k\,\frac{q}{r}\right) \tag{2}$$

Kjo shprehje tregon se fusha elektrike mund të shprehet si gradient i një funksioni skalar:

$$V = k \frac{q}{r} \tag{3}$$

dhe e quajmë potencial të fushës elektrike. Nga (2) dhe (3) lidhja në mes të fushës dhe potencialit shprehet në formën:

$$\vec{E} = - grad\, V \tag{4}$$

Ky fakt e lehtëson mjaft njehsimin në teori të elektricitetit. Në të vërtetë, potenciali është funksion skalar dhe çdo pikë e hapësirës përcaktohet me një numër. Përkundër kësaj, fusha elektrike është funksion vektorial dhe në çdo pikë të saj duhet përcaktuar tri komponente të këtij vektori. Prandaj, është më thjesht që së pari të përcaktojmë shpërndarjen e potencialit të fushës elektrike e pastaj, duke shfrytëzuar (4), të përcaktojmë vetë fushën.

b) Potenciali i fushës së elektricitetit të shpërndarë në mënyrë të vazhduar

Le të jetë burimi i fushës elektrike sistemi i sasive pikësore të elektricitetit $q_1, q_2, \ldots q_n$. Për intensitet të kësaj fushe në ndonjë pikë kemi shprehjen:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = \sum_{i=1}^{n} k \frac{q_i}{r_i^2} \vec{r}_{oi}$$

ku me r_i e kemi shënuar largësinë nga burimi i i-të deri te pika në të cilën e përcaktojmë fushën. Në mënyrë të ngjashme sikurse te një burim kemi:

$$\vec{E} = - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dr_i} \left(k \frac{q_i}{r_i} \right) grad\, r_i$$

ose

$$\vec{E} = - grad \left(k \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i} \right) \tag{5}$$

Prej nga për potencial të fushës fitojmë:

$$V = k \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i} \tag{6}$$

Tani mund të kalojmë në njehsimin e fushës, burim i së cilës është elektriciteti i shpërndarë në mënyrë të vazhduar. E ndajmë këtë hapësirë në elemente të vogla të vëllimit $d\tau$ dhe në njërin prej tyre gjendet elektriciteti $dq = \rho\, d\tau$. Zëvendësojmë në (6) dhe pas kalimit kufitar, shuma shndërrohet në integral dhe fitojmë:

$$V = k \int \frac{\rho\, d\tau}{r} \tag{7}$$

Këtu duhet integruar nëpër vëllim në të cilin është i shpërndarë elektriciteti. Dendësia e elektricitetit është funksion i vendit të elementit të vëllimit, kurse r paraqet largësinë e këtij elementi nga pika në të cilën e përcaktojmë potencialin. Prandaj, nëse na është e njohur shpërndarja e elektricitetit në burim të fushës, atëherë ρ dhe r janë funksione të njohura të koordinatave dhe me integrimin (7) mund të përcaktojmë shpërndarjen e potencialit.

Si burim fushe mund të merret edhe elektriciteti i shpërndarë në ndonjë sipërfaqe, për shembull në sipërfaqe të një përcjellësi. Në këtë rast mund të definohet dendësia sipërfaqësore e elektricitetit:

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \tag{8}$$

si funksion i vendit në sipërfaqe. Nga ky definicion rrjedh se në element të sipërfaqes dS gjendet sasia e elektricitetit:

$$dq = \sigma\, dS$$

Pasi ta zëvendësojmë në (6) dhe të kryejmë kalimin kufitar, për elemente shumë të vogla, fitojmë shprehjen për potencial:

$$V = k \int \frac{\sigma\, dS}{r} \tag{9}$$

Integrimi duhet kryer nëpër sipërfaqe në të cilën është i shpërndarë elektriciteti.

c) Tensioni elektrik

I bashkojmë dy pika P_1 dhe P_2 në fushë elektrike me lakoren C. Kur gjatë kësaj vije e bartim elektricitetin $+1$ nga P_1 deri në P_2, atëherë për te duhet kryer punë, sepse elektriciteti i bartur gjendet vazhdimisht nën ndikimin e fushës elektrike. Nga mekanika e dimë se puna përcaktohet me integralin vijor të forcës përgjatë rrugës. Pra, puna në fushë elektrike është:

$$A = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\, d\vec{r}$$

Zëvendësojmë në (4):

$$A = -\int_{P_1}^{P_2} grad\, V\, \vec{dr}$$

ose

$$A = -\int_{P_1}^{P_2} dV = V_1 - V_2 \qquad (10)$$

Këtu me V_1 e kemi shënuar potencialin e fushës elektrike në pikën P_1, kurse me V_2 potencialin në pikën P_2. Formula e fituar tregon se puna gjatë bartjes së elektricitetit +1 nga një pikë e fushës në tjetrën është e barabartë me ndryshimin e potencialit të atyre pikave. Këtë ndryshim potenciali e quajmë tension elektrik i cili zotëron në mes të dy pikave të fushës. Shprehja (10) tregon se puna nuk varet nga rruga nëpër të cilën kryhet bartja. Kjo është veti tipike e forcave konservative, prej nga përfundojmë se intensiteti i fushës elektrostatike është forcë konservative.

Në shprehjen (10) fitojmë potencialin V_1 nëse $V_2 = 0$. E dimë se potenciali është i barabartë me zero në pikat pambarim të larguara. Nga këtu përfundojmë se potenciali i pikës së fushës është i barabartë me punën që duhet kryer që të bartet elektriciteti +1 nga pambarimi në pikë të shqyrtuar të saj.

d) Pashtjellshmëria e fushës elektrostatike

Fakti se fusha elektrostatike mund të përfitohet nga potenciali i saj tregon një veti mjaft të rëndësishme. Fusha elektrostatike është fushë pa shtjella. Këtë mund ta vërtetojmë shumë lehtë. Nëse fusha ka potencial, atëherë vlen formula:

$$\vec{E} = -grad\, V \qquad (11)$$

Intensiteti i shtjellave të fushës shprehet me rotorin e saj. Nga (11) kemi

$$rot\, \vec{E} = -rot\, grad\, V$$

Nga matematika e dimë se rotori i gradientit të çdo funksioni skalar është identikisht i barabartë me zero. Pra:

$$rot\, \vec{E} = 0 \qquad (12)$$

Kësisoji është vërtetuar pashtjellshmëria e fushës elektrostatike. Shprehja (12) paraqet ekuacionin e dytë themelor diferencial të fushës elektrostatike. Ekuacioni i parë themelor është paraqitur në XII.1.7).

e) Ekuacionet themelore diferenciale për potencial

Ekuacionet themelore diferenciale të fushës elektrostatike mund t'i shprehim edhe me ndihmën e potencialit. Lidhja në mes të fushës dhe potencialit shprehet me:

$$\vec{E} = - grad\ V$$

Pasi ta zëvendësojmë në (12), kuptojmë se ky është identikisht i kënaqur.

E zëvendësojmë shprehjen e fundit në (XII.1.17) dhe fitojmë

$$div\ grad\ V = - \frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

Operatori në anën e majtë paraqet laplasianin, prandaj shkruajmë

$$\triangle V = - \frac{\rho}{\varepsilon_o} \qquad (13)$$

Ky ekuacion diferencial quhet ekuacion i Puasonit, prandaj potenciali i fushës elektrike paraqet një zgjidhje të ekuacionit të tij. Në hapësirë ku nuk ka elektricitet të shpërndarë $\rho = 0$ dhe vlen:

$$\triangle V = 0 \qquad (14)$$

Shprehja e fundit njihet me emrin ekuacion i Laplasit dhe do të shërbejë si pikënisje për zgjidhjen e disa problemeve në elektrostatikë.

f) Teorema e Grinit

Teorema e Grinit paraqet një shprehje themelore integrale dhe tregohet mjaft e rëndësishme për analizën e disa problemeve në teorinë e fushës elektrostatike. Kjo përfitohet lehtë, duke filluar nga teorema e Gaus-Ostrogradskit:

$$\int div\ \vec{a}\ d\tau = \oint \vec{a}\ \vec{dS} \qquad (15)$$

ku $\vec{a}$ është një funksion vektorial i pakuptuar në hapësirën e integrimit së bashku me derivatin e parë të vet. Do të paraqesim dy funksione arbitrare φ dhe ψ me derivate të para dhe të dyta, gjithashtu, të pakëputura në hapësirë të integrimit. Me ndihmën e tyre formojmë vektorin

$$\vec{a} = \psi\ grad\ \varphi \qquad (16)$$

Duke u bazuar në vetitë e supozuara të funksioneve φ dhe ψ në vektorin $\vec{a}$ mund të zbatohet teorema e Gaus-Ostrogradskit:

$$\int div\,(\psi\, grad\,\varphi)\, d\tau = \oint \psi\, grad\,\varphi\, \vec{dS} \qquad (17)$$

Pasi vlen:

$$div\,(\psi\, grad\,\varphi) = \psi\, div\, grad\,\varphi + grad\,\psi \cdot grad\,\varphi = \psi\Delta\varphi + \nabla\psi \cdot \nabla\varphi$$

dhe

$$grad\,\varphi\, \vec{dS} = grad\,\varphi\, \vec{n}\, dS = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS$$

ku me $\vec{n}$ e kemi shënuar normalen dalëse në sipërfaqe S.
Duke i shfrytëzuar dy shprehjet e fundit (17), mund ta shkruajmë në formën:

$$\int (\psi\Delta\varphi + \nabla\psi \cdot \nabla\varphi)\, d\tau = \oint \psi\, \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS \qquad (18)$$

Nëse i ndërrojmë rolet e funksioneve φ dhe ψ dhe teorema (15) zbatohet për vektorin $\varphi\, grad\,\psi$, fitohet shprehja:

$$\int (\varphi\Delta\psi + \nabla\psi \cdot \nabla\varphi)\, d\tau = \oint \varphi\, \frac{\partial\psi}{\partial n}\, dS \qquad (19)$$

Nëse e zbresim (19) prej (18) fitojmë:

$$\int (\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi)\, d\tau = \oint \left(\psi\, \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\, \frac{\partial\psi}{\partial n}\right) dS \qquad (20)$$

Metoda e Grinit qëndron në zbatimin e kësaj teoreme integrale për zgjidhjen e disa ekuacione diferenciale. Do ta zbatojmë për përcaktimin e potencialit të sistemit të elektrizimeve vëllimore.

g) Zgjidhja e ekuacionit të Puasonit

Të mendojmë sipërfaqen S e cila mbyll në vetvete sistemin e sasive të elektrociteteve sikurse tregon fig. 71. Supozojmë se potenciali dhe derivatet e tij në këtë hapësirë janë të fundëm dhe të pakëputur, përveç në sipërfaqen S_1, në dy anët e së cilës na janë të njohura vlerat e potencialit dhe të derivateve të tij.

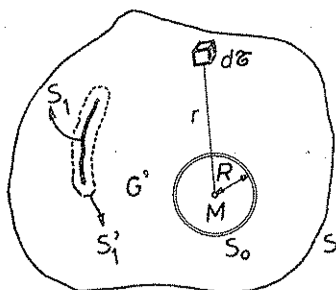


Fig. 71

Supozojmë në vazhdim se në shprehjen (20) me ψ e kemi shënuar potencialin, kurse me φ funksionin $1/r$, ku r paraqet largësinë nga pika M në të cilën e kërkojmë potencialin deri te elementi arbitrar i vëllimit $d\tau$. E rrethojmë pikën M, në të cilën e kërkojmë potencialin me sferën e vogël S_o me rreze R dhe sipërfaqen S_1 me sipërfaqe të mbyllur S_1'. Kësisoji hapësira G është e kufizuar nga jashtë me sipërfaqen S, kurse nga brenda me sipërfaqen S_o dhe S_1'. E zbatojmë teoremën e Grinit në këtë hapësirë. Fitojmë:

$$\int\limits_{S+S_1'+S_o} \left(\psi \, grad \, \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \, grad \, \psi\right) \vec{dS} = \int\limits_G \left[\psi \Delta \left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r} \Delta\psi\right] d\tau \qquad (21)$$

Meqë në çdo pikë të hapësirës $G \Delta \left(\frac{1}{r}\right) = 0$, pasi të zëvendësojmë në (21) ekuacionin e Puasonit:

$$\Delta V = - \frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

duke theksuar se në rastin tonë $\psi = V$ do të kemi:

$$\int\limits_{S+S_1'+S_o} \left(V \, grad \, \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \, grad \, V\right) \vec{dS} = \int\limits_G \frac{1}{r} \frac{\rho}{\varepsilon_o} d\tau$$

$$\int\limits_S \left(V \, grad \, \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \, grad \, V\right) \vec{dS} + \int\limits_{S_1'} \left(V \, grad \, \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \, grad \, V\right) \vec{dS} +$$

$$+ \int\limits_{S_o} \left(V \, grad \, \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \, grad \, V\right) \vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_o} \int\limits_{G'} \frac{\rho \, d\tau}{r} \qquad (22)$$

Për sipërfaqe të madhe, e cila në vetveti përfshin tërë fushën, integrali i parë tenton në zero sikurse $\frac{1}{r}$, pasi funksioni nën integral tenton në zero sikurse $\frac{1}{r^3} r$. Pra, do të vlejë:

$$\int_S \left(V\,grad\,\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\,grad\,V \right) d\vec{S} = 0 \qquad (23)$$

Në integralin e dytë integrimi duhet të kryhet në të dy anët e sipërfaqes S_1, sepse $S_1' \to S_1$. Nëse madhësitë e njërës anë të kësaj sipërfaqe i shënojmë me indeks 1, kurse të anës tjetër me indeks 2, do të kemi:

$$\int_{S_1'} \left(V\,grad\,\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\,grad\,V \right) d\vec{S} =$$

$$= \int_S \left[V_1 \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1 \right] dS + \int_{S_1} \left[-V_2 \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_2 \right] dS$$

ose

$$\int_{S_1'} \left(V\,grad\,\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\,grad\,V \right) d\vec{S} = \int_{S_1} (V_1 - V_2) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r}\, dS -$$

$$- \int_{S_1} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1 - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_2 \right] \frac{1}{r}\, dS \qquad (24)$$

Në integralin e tretë kemi:

$$\int_{S_0} \left[V\,grad\,\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\,grad\,V \right] d\vec{S} = \int_{S_0} \left(V \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} \right) dS$$

Meqë normalja në S_o është e orientuar kah qendra e sferës, do të kemi:

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \quad \text{dhe} \quad \frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\int_{S_0} \left(V\,grad\,\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\,grad\,V \right) d\vec{S} = \int_{S_0} \left(V \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) dS$$

dhe nga teorema e vlerës mesatare:

$$= \left(\frac{\overline{V}}{R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \overline{V}}{\partial r} \right) 4\pi R^2 = 4\pi \overline{V} + 4\pi R \frac{\partial \overline{V}}{\partial r}$$

kur $R \to 0$ anëtari i dytë bie, kurse $\overline{V}$ tenton në vlerën e potencialit në pikën M. Pra:

$$\int_{S_0} \left(V \, grad \, \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \, grad \, V \right) \vec{dS} = 4 \pi V_M \qquad (25)$$

I zëvendësojmë lerat e integrale të fituara në (22), duke dijtur se në kalimin kufitar $G' \to G$.

$$\int_{S_1} (V_1 - V_2) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS - \int_{S_1} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_1 - \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_2 \right] \frac{1}{r} dS + 4 \pi V_M = \frac{1}{\varepsilon_o} \int \frac{\rho \, d\tau}{r}$$

prej nga

$$V_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_G \frac{\rho \, d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} (V_2 - V_1) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_2 - \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_1 \right] \frac{1}{r} dS \qquad (26)$$

Nëse potenciali dhe derivatet e tij në tërë hapësirën e shqyrtuar janë të fundëm dhe të pakëputur, dy anëtarët e fundit në (26) biejnë dhe për potencial do të kemi vlerën:

$$V_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{\rho \, d\tau}{r}$$

kurse nga (XII.1.10) kemi:

$$V_M = k \int \frac{\rho \, d\tau}{r} \qquad (27)$$

Shihet se shprehja (27) është identike me shprehjen (7), por këtu e kemi fituar duke e integruar ekuacionin e Puasonit.

Përveç kësaj metode të përgjithshme, ekzistojnë edhe metoda të tjera për zgjidhjen e problemit të potencialit, ndër të cilat meriton të ceket metoda e shembëllimit, për të cilën do të bëhet fjalë më vonë.

3. PËRCJELLËSIT NË FUSHË ELEKTROSTATIKE

Me përcjellës kuptojmë ata trupa nëpër të cilët mund të lëvizë elektriciteti. Nga kjo veti përcjellësit në fushë statike tregojnë disa veti karakteristike. Që elektriciteti në përcjellës të mbetet në qetësi, nuk duhet të ekzistojë fusha elektrike në te, sepse çdo fushë e tillë do të shkaktojë lëvizjen e elektricitetit. Prandaj, përcjellësit zotërojnë ashtu që në brendësi të tyre fusha elektrostatike është gjithmonë e barabartë me zero. Këtë të dhënë e ka treguar Faradeu me të ashtuquajturin kafaz të Faradeut.

Që fusha elektrostatike në brendësi të përcjellësit të jetë e barabartë me zero, duhet që potenciali i fushës në brendësi të jetë konstant. Prandaj, tërë përcjellësi së bashku me sipërfaqen e vet paraqet vend në të cilin potenciali është i barabartë. Themi se sipërfaqja e përcjellësit paraqet sipërfaqe ekuipotenciale.

Meqë fusha dhe potenciali janë të lidhur me shprehjen:

$$\vec{E} = - \, grad \, V$$

kurse gradienti i ndonjë funksioni skalar është gjithmonë vektor, i cili qëndron normal ndaj sipërfaqeve të vlerave të njëjta, përfundojmë se kahja e fushës elektrike është gjithmonë normal në sipërfaqe të përcjellësit.

Kur në përcjellës bartet një sasi elektriciteti, nga forcat dëbuese në mes të pjesëve të njëjta të sasisë së elektricitetit ato do të shpërndahen ashtu që të jenë larg njëra-tjetrës, prandaj elektriciteti shpërndahet vetëm në sipërfaqe të tij.

4. KONDITAT KUFITARE TË FUSHËS ELEKTROSTATIKE NË SIPËRFAQE NË TË CILËN ËSHTË I SHPËRNDARË ELEKTRICITETI

Të mendojmë një sipërfaqe në fushë elektrostatike në të cilën është i shpërndarë elektriciteti. Le të jetë dendësia sipërfaqësore σ funksion i njohur i vendit në sipërfaqe. Duhet pritur se ky elektricitet do të ndikojë në fushë elektrostatike. Dhe me të vërtetë fusha në njërën anë të sipërfaqes ndryshon nga fusha në anën tjetër të saj. Ndërrimi i fushës në sipërfaqe i kënaq disa kondita të cilat i quajmë kondita kufitare dhe të cilat do t'i përcaktojmë në vazhdim.

Sipërfaqja e shqyrtuar e ndanë hapësirën në dy pjesë. Intensitetin e fushës në njërën anë do ta shënojmë me indeks 1, kurse në anën tjetër të sipërfaqes me indeks 2. Vektorët e fushës do t'i zbërthejmë në dy komponente. Njëra ka kahje të normales në sipërfaqe, kurse tjetra ka kahje të tangjentes në te. Prandaj, simbolikisht mund ta shkruajmë:

$$E_1 = \begin{pmatrix} E_{1n} \\ E_{1t} \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} E_{2n} \\ E_{2t} \end{pmatrix}$$

Gjatë kësaj marrim se $\vec{E}_1$ dhe $\vec{E}_2$ paraqesin fushat në afërsi të sipërfaqes dhe ashtu që njëra gjendet në njërën anë, kurse tjetra në anën tjetër.

Formulën e teoremës së Gausit:

$$\oint \vec{E} \, d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

do ta zbatojmë në sipërfaqe të cilindrit me lartësi shumë të vogël të paraqitur në fig. 72. Njëra e bazë e këtij cilindri e ka sipërfaqen dS

dhe gjendet në njerën anë të sipërfaqes, kurse baza tjetër e tij gjendet në anën tjetër të saj. Mbështjellësi i cilindrit gjendet gjithkund normal në sipërfaqe dhe e ka lartësin 2 dn.

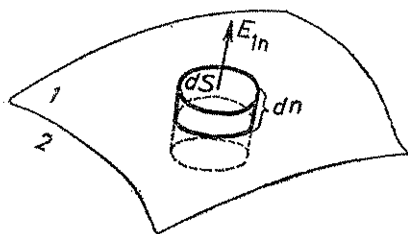


Fig. 72

Në formulën e mëparshme paraqitet prodhimi skalar $\vec{E}\,d\vec{S}$, i cili është i barabartë me prodhimin e elementit të sipërfaqes dhe komponentes normale të vektorit të fushës në këtë sipërfaqe. Në bazën e sipërme të cilindrit kjo është komponentja normale e fushës E_{1n} dhe kontributi i bazës për fluks është $E_{1n}\,dS$. Në bazën e poshtme komponentja normale është E_{2n}. Sipas marrëveshtjes për parashenjën e fluksit kjo komponente jep kontribut negativ — $E_{2n}\,dS$. Nëse gjatësinë e perimetrit të bazës e shënojmë me l, atëherë për kontribut të fluksit nga mbështjellësi duhet marrë komponentet tangjenciale dhe sipërfaqet e mbështjellësit të cilindrit nga çdo njëra anë. Sipërfaqja e mbështjellësit në njërën anë të sipërfaqes kufitare është ldn, kurse kontributi i për fluks është $E_{1t}\,ldn$. Sipërfaqja e mbështjellësit nën sipërfaqen kufitare jep $E_{2t}\,ldn$, ndërsa fluksi i tërësishëm është:

$$E_{1n}\,dS - E_{2n}\,dS + E_{1t}\,ldn + E_{2t}\,ldn = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

Që të arrijmë me baza të cilindrit në afërsi të sipërfaqes kufitare duhet të kryejmë kalimin kufitar për $dn \to 0$. Atëherë ngel:

$$(E_{1n} - E_{2n})\,dS = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

Në anën e djathtë gjendet sasia e elektricitetit, e cila gjendet brenda cilindrit. Këtë mund ta shprehim me ndihmën e dendësisë sipërfaqësore $q = \sigma\,dS$. Pas thjeshtësimit me dS fitojmë:

$$E_{1n} - E_{2n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \tag{1}$$

Kjo është njëra prej konditave kufitare dhe tregon se komponentja normale e intensitetit të fushës në sipërfaqe kufitare ka kërcim për madhësinë $\frac{\sigma}{\varepsilon_o}$.

Shprehjen (1) mund ta shkruajmë edhe me ndihmën e vektorëve. Nëse vektorin unitar në kahje të normales e shënojmë me $\vec{n}_o$, atëherë komponentet normale janë të barabarta me prodhimin skalar:

$$\vec{E}_{1n} = \vec{n}_o \vec{E}_1 \quad \text{dhe} \quad E_{2n} = \vec{n}_o \vec{E}_2$$

dhe (1) e shkruajmë në formën:

$$\vec{n}_o \vec{E}_1 - \vec{n}_n \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \tag{2}$$

Nëse dëshirojmë që këtë konditë ta shprehim me ndihmën e potencialit, atëherë duhet marrë në konsiderim se komponentja e gradientit në kahje të dhënë është e barabartë me derivatin në atë kahje:

$$E_{1n} = -\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1 \quad dhe \quad E_{2n} = -\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_2$$

kurse kondita (1) e merr formën:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_2 - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \tag{3}$$

Në këtë rast indeksi 1 dhe 2 tregojnë se duhet marrë derivati i njërës anë dhe i anës tjetër në sipërfaqe kufitare.

Do të përcaktojmë konditën e dytë. Këtë e fitojmë duke zbatuar formulën (XII.2.12) sipas së cilës është:

$$\int rot\, \vec{E}\, d\vec{S} = 0$$

të cilën me ndihmën e teoremës së Stoksit e shkruajmë:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{r} = 0$$

E zbatojmë këtë në vijën e mbyllur të paraqitur në fig. 73. Një element i rrugës është harku dr në njërën anë të sipërfaqes, kurse tjetri në anën tjetër të saj. Këto dy harqe janë të lidhura me pjesët e normaleve $2\,dn$. Komponentja e fushës në kahje të dr është E_t, kurse në kahje të dn është E_n. Pasi t'i mbledhim kontributet e të katër pjesëve të rrugës, fitojmë:

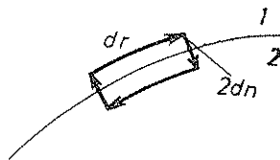


Fig. 73

$$E_{1t}\, dr + E_{1n}\, dn + E_{2n}\, dn - E_{2t}\, dr - E_{2n}\, dn - E_{1n}\, dn = 0$$

Kalimin në sipërfaqe kufitare e kryejmë kur $dn \to 0$ dhe do të kemi:

$$E_{1t} - E_{2t} = 0$$

ose

$$E_{1t} = E_{2t} \tag{4}$$

Kjo është kondita e dytë kufitare dhe tregon se komponentet tangjenciale të fushës në të dy anët janë të barabarta.

Konditën (4) mund ta shprehim edhe në formë vektoriale, kësisoji:

$$\vec{t}_o \vec{E}_1 = \vec{t}_o \vec{E}_2$$

ose

$$\vec{n}_o \times \vec{E}_1 = \vec{n}_o \times \vec{E}_2 \tag{5}$$

ku me $\vec{t}_o$ e kemi shënuar vektorin unitar në kahje të tangjentes në sipërfaqe kufitare.

Kjo konditë e shprehur me ndihmën e potencialit e ka formën:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_1 = \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_2 \tag{6}$$

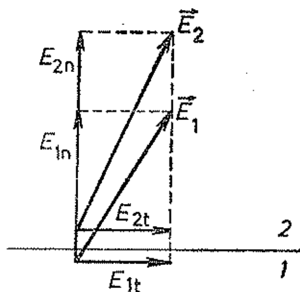


Fig. 74

Konditat e përfituara kufitare tregojnë se vektori i fushës elektrostatike gjatë kalimit nëpër sipërfaqe në të cilën është i shpërndarë elektriciteti menjëherë e ndërron kahjen dhe intensitetin e vet. Ky ndërrim kryhet ashtu që komponentja tangjenciale e fushës e ruan vlerën e vet, kurse komponentja normale ndërron për σ/ε_o. Në fig. 74 së pari është vizatuar vektori i fushës $\vec{E}_1$ në pjesën e poshtme të sipërfaqes kufitare. Këtë vektor e zbërthejmë në komponenten tangjenciale E_{1t} dhe në komponenten normale E_{1n}. Në pikën e anës tjetër të sipërfaqes duhet vizatuar po të njëjtën komponente tangjenciale $E_{1t} = E_{2t}$, por që të fitojmë komponenten normale, duhet komponentes normale të sipërfaqes në pjesën e poshtme t'ia shtojmë madhësinë σ/ε_o $E_{2n} = E_{1n} + \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}$. Komponentet e fituara si rezultante na japin vektorin e fushës në këtë anë të sipërfaqes.

Në rast se elektriciteti është i shpërndarë në sipërfaqe të përcjellësit, konditat kufitare thjeshtësohen. Në të vërtetë dihet se në brendësi të përcjellësit nuk ka fushë elektrike. Nëse me indeks 2 e shënojmë brendësinë e përcjellësit, atëherë vlen:

$$E_{2t} = E_{2n} = 0 \tag{7}$$

prej nga rrjedh:

$$E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \tag{8}$$

dhe

$$E_{1t} = 0 \tag{9}$$

Shprehja e fundit tregon se në dalje të përcjellësit nuk ka komponente tangjenciale. Prandaj, vektori i fushës elektrike gjithmonë qëndron normal në sipërfaqe të përcjellësit. Intensiteti i kësaj fushe në afërsi të përcjellësit është σ/ε_o.

5. FUSHA ELEKTRIKE E SFERËS SË MBUSHUR NË MËNYRË HOMOGJENE ME ELEKTRICITET

a) Zgjidhja e ekuacionit të Puasonit

Si burim fushe le të jetë sfera e cila është e mbushur me elektricitet, dendësia e të cilit ρ është konstante. Rrezen e sferës e shënojmë me a. Duhet të përcaktojmë fushën elektrostatike, kur si burim merret sfera e këtillë. Së pari do të përcaktojmë shpërndarjen e potencialit të kësaj fushe, duke dijtur se ky i nënshtrohet ekuacionit diferencial të Puasonit.

$$\triangle V = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

Meqë kemi simetri sferike, njehsimin do ta kryejmë në koordinate sferike me origjinë në qendër të sferës. Nga kjo simetri, potenciali varet vetëm prej largësisë r nga origjina e jo edhe nga koordinatet ϑ dhe φ. Prandaj, në shprehjen për laplasian në koordinate sferike e marrim vetëm anëtarin e parë i cili varet prej largësisë r. Do të kemi:

$$V = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right)$$

E zëvendësojmë në ekuacionin e Puasonit dhe shumëzojmë me r^2:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_o} r^2$$

E integrojmë:

$$r^2 \frac{dV}{dr} = -\frac{\rho}{\varepsilon_o} \frac{r_3}{3} + A$$

ose

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}\frac{r}{3} + \frac{A}{r^2} \tag{1}$$

kurse integrimi i dytë na jep:

$$V = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}\frac{r^2}{6} - \frac{A}{r} + B \tag{2}$$

Kjo është zgjidhja e përgjithshme e ekuacionit të Puasonit për problem sferik.

Për përcaktimin e konstanteve të integrimit duhet të dallojmë dy mundësi: A është pika në të cilën kërkojmë potencialin jashtë sferës apo brenda saj.

b) Potenciali në pikat jashtë sferës

Së pari shqyrtojmë rastin e pikës jashtë sferës, pra $r > a$. Në këtë pikë $\rho = 0$. Përveç kësaj, e dimë se në pikat pambarim të larguara nuk ka fushë dhe potenciali është i barabartë me zero. Pra, do të vlejë $V = 0$ për $r \rightarrow \infty$. Që kjo të kënaqet, duhet konstantja B të jetë e barabartë me zero. Do të ngel:

$$V_j = -\frac{A}{r} \tag{3}$$

Që të përcaktojmë konstanten tjetër, zbatojmë teoremën e Gausit për fluks në sferë me rreze r:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{S} = \oint E_r\, dS = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

dhe e zëvendësojmë potencialin sipas formulës:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{A}{r^2}$$

fitojmë:

$$-\frac{A}{r^2} \int \oint d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

Integrali na jep sipërfaqen e sferës $4\pi r^2$ dhe do të kemi:

$$A = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o} = -kq$$

E zëvendësojmë vlerën e saj në (3):

$$V_j = k \frac{q}{r} \quad (4)$$

Kemi fituar për potencial në ndonjë pikë të jashtme të njëjtën shprehje sikurse te sasia pikësore e elektricitetit. Kështu përfundojmë se potenciali dhe fusha e sferës së mbushur në mënyrë homogjene me elektricitet është i atillë thuase tërë elektriciteti është i koncentruar në qendër të saj.

Fushën elektrike e fitojmë nga shprehja:

$$\vec{E} = -\,grad\; V = -\,grad\; kq/r = k \frac{q}{r^2} \vec{r_o} \quad (5)$$

c) **Potenciali në brendësi të sferës**

Të shqyrtojmë rastin kur pika në të cilën e kërkojmë potencialin gjendet brenda sferës, pra, për $r < a$.

Në brendësi të sferës gjendet edhe qendra e saj $r = 0$. Sikur të zëvendësonim në (2) këtë vlerë për potencial, do të fitonim vlerë pambarim të madhe. Kuptohet se kjo nuk ka kuptim fizik, prandaj ky anëtarë nuk duhet të figurojë fare, përkatësisht e marrim $A = 0$. Do të ngel:

$$V_b = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_o} + B \quad (6)$$

Për përcaktimin e B paraqesim konditën kufitare të këtillë. Në sipërfaqe të sferës $r = a$, potenciali brenda sferës duhet të kalojë në mënyrë të vazhdueshme në potencial jashtë saj. Pra:

$$V_b = V_j \quad \text{për} \quad r = a$$

Zëvendësojmë (6) dhe (4):

$$-\frac{\rho a^2}{6\varepsilon_o} + B = k \frac{q}{a}$$

Nëse zëvendësojmë $k = 1/4\pi\varepsilon_o$ dhe $q = 4\pi a^3\rho/3$, fitojmë:

$$B = \frac{a^2\rho}{2\varepsilon_o}$$

kurse (6) do të ketë formën:

$$V_b = \frac{\rho}{6\varepsilon_o} (3a^2 - r^2) \quad (7)$$

Fusha elektrostatike shprehet kësisoji:

$$\vec{E}_b = -\,grad\,\frac{\rho}{6\varepsilon_o}(3a^2 - r^2) = \frac{\rho}{6\varepsilon_o}\,grad\,r^2 = \frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_o}\,\vec{r}_o \qquad (8)$$

Rezultatet e fituara mund t'i paraqesim grafikisht. Figura 75 tregon varshmërinë e potencialit nga largësia r nga qendra e sferës në të cilën e kërkojmë potencialin në çfarëdo pike. Lakorja përbëhet nga dy pjesë. Për $r < a$ duhet paraqitur shprehjen (7). Kjo është parabolë me pjesë konkave teposhtë. për $r > a$ duhet paraqitur shprehjen (4), e cila tregon hiperbolë. Të dy lakoret bashkohen në pikën $r = a$. Në figurën 76 është paraqitur varshmëria e intensitetit të fushës elektrostatike nga largësia r. Në brendësi kemi drejtëzën e cila fitohet nga vlera abso-

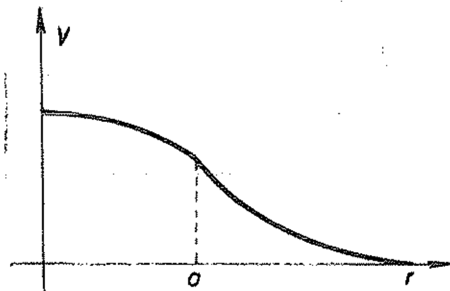


Fig. 75

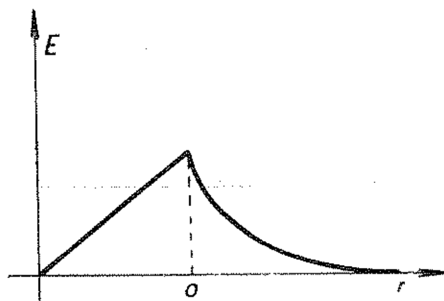


Fig. 76

lute e (8), kurse në pjesën e jashtme vlen vlera absolute e (5). Kjo pjesë e lakores është hiperbolë e cila asimtotikisht i afrohet boshtit r. Edhe në këtë rast të dy lakoret në pikën $r = a$ e kanë të njëjtën vlerë.

6. FUSHA ELEKTRIKE E SFERËS NË SIPËRFAQE TË SË CILËS ËSHTË I SHPËRNDARË ELEKTRICITETI NË MËNYRË HOMOGJENE

Në këtë shembull si burim të fushës elektrostatike do të marrim sferën në sipërfaqe të së cilës është i shpërndarë elektriciteti në mënyrë homogjene. Le të jetë rrezja e sferës a, kurse dendësia e elektricitetit sipërfaqësor σ. Potencialin e fushës e njehsojmë sipas formulës (XII.2.9):

$$V = k\int\frac{\sigma\,dS}{r}$$

Në këtë shprehje r paraqet largësinë e elementit të sipërfaqes dS nga pika P në të cilën dëshirojmë ta përcaktojmë potencialin. E ndajmë sipërfaqen e sferës në elemente të sipërfaqes sikurse tregon fig. 77. Këto elemente le të kenë formë shumë të ngushtë të zonave sferike, sepse të gjitha pjesët e zonës së këtillë e kanë të njëjtën largësi nga pika P. Sipërfaqen e një zone e fitojmë kur perimetrin e bazës e shumëzojmë me harkun i cili e përcakton gjerësinë e zonës. Pra:

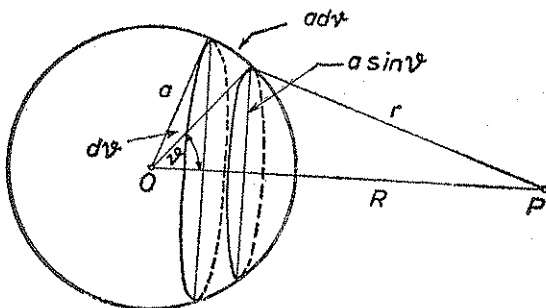


Fig. 77

$$ds = 2a^2\pi \cdot \sin\vartheta \, d\vartheta$$

E zëvendësojmë këtë vlerë në shprehje për potencial:

$$V = 2ka^2\pi\sigma \int \frac{\sin\vartheta \, d\vartheta}{r}$$

Pasi integrimi kryhet sipas këndit ϑ, tërë sipërfaqen e sferës do ta mbulojmë, nëse ϑ ndërron nga 0 deri në π.

Do të shënojmë largësinë e pikës R nga qendra e sferës me R. Nga figura 77 shohim se r, R dhe a paraqesin brinjët e trekëndëshit, për të cilën mund të zbatojmë teoremën e kosinusit:

$$r^2 = R^2 + a^2 - 2aR\cos\vartheta$$

kurse nga diferenciali

$$r\,dr = R\,a\sin\vartheta \, d\vartheta$$

fitojmë:

$$\frac{\sin\vartheta \, d\vartheta}{r} = \frac{dr}{aR}$$

Kësisoji integrimin sipas këndit ϑ e kemi shndërruar në integrim sipas r. Pra:

$$V = k\,\frac{2\pi a\sigma}{R}\int_{r_1}^{r_2} dr$$

ku me r_1 dhe r_2 i kemi shënuar ato vlera të r të cilat u përgjigjen këndeve $\vartheta = 0$ dhe $\vartheta = \pi$. Pasi të integrojmë, fitojmë:

$$V = k\ \frac{2\pi a\sigma}{R}\ (r_2 - r_1) \tag{1}$$

Së pari do të shqyrtojmë rastin kur pika P gjendet jashtë sferës. Atëherë vlen:

$$r_2 = R + a \quad \text{dhe} \quad r_1 = R - a$$

dhe fitojmë:

$$V_j = k\ \frac{4a^2\pi\sigma}{R}$$

Meqë $4\pi a^2$ paraqet sipërfaqen e sferës, do të kemi:

$$q = 4\pi\sigma a^2$$

ose për potencial:

$$V_j = k\ \frac{q}{R} \tag{2}$$

Edhe në këtë rast potenciali në pikat jashtë sferës është i barabartë me potencialin e sasisë pikësore të elektricitetit të koncentruar në qendër të sferës.

Fusha elektrike është:

$$\vec{E}_j = k\ \frac{q}{R^2}\ \vec{R}_o \tag{3}$$

Rasti tjetër paraqitet për pikën P në brendësi të sferës. Do të kemi:

$$r_2 = a + R \quad \text{dhe} \quad r_1 = a - R$$

kurse nga (1) fitojmë:

$$V_b = 4a\pi\sigma k \tag{4}$$

Shohim se në të gjitha pikat brenda sferës potenciali është konstant. Fusha elektrike është:

$$E_b = 0 \tag{5}$$

Pra, brenda sferës nuk ka fushë fare.

Varshmërinë e potencialit nga largësia e pikës P grafikisht e tregon fig. 78. Në brendësi të sferës potenciali është konstant dhe e shpreh paralelja me boshtin e abshisës. Në pjesën e jashtme potenciali bie sikurse $1/R$ dhe e shpreh pjesa e hiperbolës.

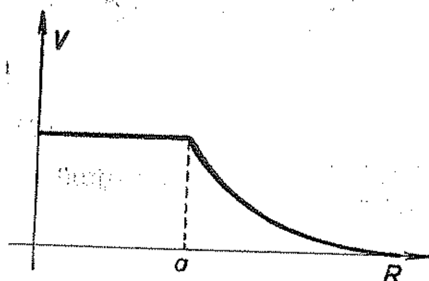


Fig. 78

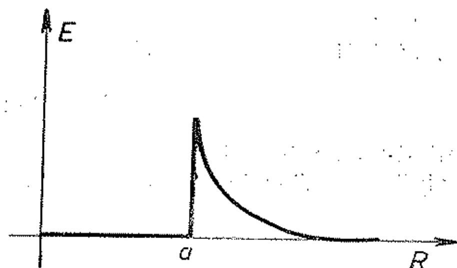


Fig. 79

Në figurën 79 është paraqitur varshmëria e intensitetit të fushës elektrike prej R. Brenda sferës fusha është e barabartë me zero dhe shprehet me pjesën e abshisës. Në sipërfaqe të sferës fusha ndërron për madhësinë kq/R dhe pastaj zvogëlohet sikurse $1/R^2$.

7. POTENCIALI I CILINDRIT NË SIPËRFAQE TË SË CILIT ËSHTË I SHPËRNDARË ELEKTRICITETI NË MËNYRË HOMOGJENE

Le të jetë si burim fushe cilindri pambarim i gjatë me rreze R, në sipërfaqe të të cilit gjendet elektriciteti me dendësi sipërfaqësore konstante σ.

Nga forma e trupit në të cilin është i shpërndarë elektriciteti kuptojmë se është më lehtë problemin ta zgjidhim në koordinate cilindrike, ashtu që boshti i sistemit koordinat të përputhet me boshtin e cilindrit. Në sistem të këtillë koordinatesh, potenciali varet vetëm prej r, por jo edhe nga koordinatet tjera φ dhe z. Në këto koordinate laplasiani e ka formën:

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} = 0 \tag{1}$$

ose

$$r\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{dV}{dr} = 0$$

dhe që mund të shprehet si derivat i prodhimit:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0$$

Integrimi i parë jep:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{B}{r} \tag{2}$$

kurse i dyti:

$$V = B\, l n\, r + C \tag{3}$$

Tani duhet përcaktuar konstanten e integrimit. Do të supozojmë se në sipërfaqe të cilindrit potenciali është V_o, pra:

$$\text{për } r = R \quad V = V_o$$

Nga (5) fitojmë:

$$C = V_o - B\, l n\, R$$

kurse (3) merr formën:

$$V = B\, l n \frac{r}{R} + V_o \tag{4}$$

Konstanten tjetër e përcaktojmë nga:

$$E = -\frac{dV}{dr} \tag{5}$$

kurse nga (XII.4.7) kemi:

$$-\left(\frac{dV}{dr}\right)_{=R} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$

Shfrytëzojmë (2) dhe fitojmë:

$$B = -\frac{\sigma}{\varepsilon_o} R$$

kurse (4) merr formën:

$$V = -\frac{\sigma}{\varepsilon_o} R\, l n \frac{r}{R} + V_o \tag{6}$$

Kjo është shprehja për potencial të cilindrit pambarim të gjatë. Fusha elektrike fitohet nga (5), nëse për potencial zëvendësojmë (6). Do të kemi për intensitet të saj:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o r} \tag{7}$$

Kahja e fushës është radiale ndaj boshtit të cilindrit, kurse kjo shprehje tregon se intensiteti i fushës është proporcional i zhdrejtë me largësinë e boshtit të cilindrit nga vendi ku e kërkojmë atë.

8. POTENCIALI I FUSHËS SË ELEKTRICITETIT I CILI ËSHTË I SHPËRNDARË NË MËNYRË TË NJËTRAJTSHME NËPËR NDONJË GJATËSI

Le të jetë elektriciteti me dendësi konstante ρ i shpërndarë në gjatësinë $2c$. Do të përcaktojmë potencialin e fushës së këtij burimi. Do të vendosim origjinën e sistemit të koordinatave sikurse tregon fig. 80, me boshtin x në kahje të gjatësisë. Këtë do ta zbërthejmë në elemente të vogla. Le të jetë elementi i shqyrtuar me gjatësi $d\zeta$, i cili e ka elektricitetin $\rho d\zeta$, në vendin ζ. Nëse dëshirojmë të përcaktojmë potencialin në pikën $P(x, y)$, atëherë duhet të shfrytëzojmë formulën (XII.2.27), e cila për $\rho = const.$ e ka formën:

$$V = k\rho \int_{-c}^{c} \frac{d\zeta}{r} \tag{1}$$

këtu me r duhet kuptuar largësinë e pikës P nga elementi i gjatësisë $d\zeta$. Nga figura 80 shohim se vlen:

$$r = \sqrt{(x-\zeta)^2 + y^2}$$

prandaj do të kemi:

$$V = k\rho \int_{-c}^{c} \frac{d\zeta}{\sqrt{(x-\zeta)^2 + y^2}} \tag{2}$$

për zgjidhjen e këtij integrali duhet shfrytëzuar zëvendësimin:

$$t = x - \zeta + \sqrt{(x-\zeta)^2 + y^2} \tag{3}$$

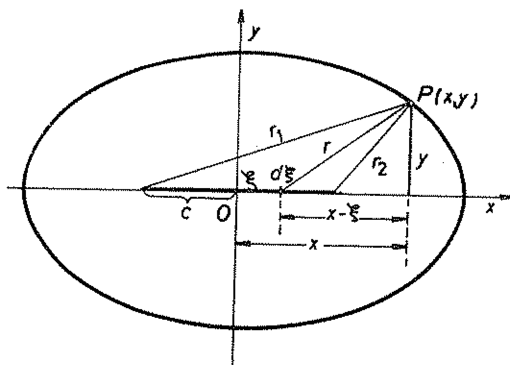


Fig. 80

dhe nga ky rrejdh:

$$dt = - d\zeta \left[1 + \frac{x-\zeta}{\sqrt{(x-\zeta)^2 + y^2}}\right]$$

dhe

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{(x-\zeta)^2 + y^2}} = - \frac{dt}{\sqrt{(x-\zeta)^2 + y^2} + x - \zeta} = - \frac{dt}{t}$$

kurse integrali shndërrohet:

$$\int \frac{d\zeta}{\sqrt{(x-\zeta)^2 + y^2}} = - \int \frac{dt}{t} = - \ln t = - \ln \left[x - \zeta + \sqrt{(x-\zeta)^2 + y^2}\right]$$

Tani duhet ti zëvendësojmë kufijtë sipas (2) dhe për potencial kemi:

$$V = k\rho \ ln \ \frac{x + c + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}}{x - c + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}} \tag{4}$$

Që të kuptojmë këtë shprehje më mirë, do ta shqyrtojmë më hollësisht. Nga fig. 80 kemi:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = r_1 \quad dhe \quad \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = r_2 \tag{5}$$

kurse (4) mund ta shkruajmë:

$$V = k\rho \ ln \ \frac{x + c + r_1}{x - c + r_2}$$

Sipërfaqet ekuipotenciale të kësaj fushe do të jenë ato sipërfaqe në të cilat shprehja nën logaritëm është konstant:

$$\frac{x + c + r_1}{x - c + r_2} = const = m \tag{6}$$

I ngrisim në katrorë shprehjet (5), i zgjidhim sipas y^2 dhe i barazojmë. Do të fitojmë:

$$r_1^2 - (x + c)^2 = r_2^2 - (x - c)^2$$

E zbërthejmë si ndryshim katrorësh:

$$(r_1 - x - c)\ (r_1 + x + c) = (r_2 - x + c)\ (r_2 + x - c)$$

Nga (6) kemi:

$$r_1 + x + c = m\ (r_2 + x - c)$$

dhe pas thjeshtësimit:

$$(r_1 - x - c)\ m = r_2 - x + c \tag{7}$$

Nga dy shprehjet e fundit e eliminojmë x, pasi t'i kemi ndërruar anët në (7) i mledhim dhe fitojmë:

$$r_1 + r_2 + 2c = m\ (r_1 + r_2 - 2c)$$

prej nga:

$$r_1 + r_2 = 2c\ \frac{m+1}{m-1} = const. \tag{8}$$

Pra, shuma e largësive të çdo pike të sipërfaqes ekuipotenciale nga skajet e gjatësisë së ngarkuar është konstant. E dimë se këso vetie tregon elipsoidi rrotullues, prej nga përfundojmë se sipërfaqet ekuipotenciale të kësaj fushe janë elipsoide rrotulluese, boshti i rrotullimit të të cilave përcaktohet me kahjen e gjatësisë së ngarkuar, kurse vatrat janë skajet e asaj gjatësie.

Kemi theksuar në (XII.3) se sipërfaqja e përcjellësit është gjithmonë sipërfaqe ekuipotenciale e fushës së tij. Prandaj, të njëjtën shpërndarje të potencialit e fitojmë kur e ngarkojmë përcjellësin me sasi të elektricitetit $q = 2c$ dhe i cili ka formë të elipsoidit rrotullues. Mund të përfundojmë më tutje se fusha elektrike e përcjellësit të ngarkuar i cili e ka formën e elipsoidit rrotullues është identike me fushën e elektricitetit të shpërndarë njëtrajtësisht në gjatësinë e kufizuar me vatra të atij elipsoidi.

Sfera paraqet formë speciale të elipsoidit te e cila të dy vatrat qëndrojnë në qendër të saj. Prandaj te përcjellësi i ngarkuar, i cili ka formën sferike, fusha është e atillë thuase elektriciteti është i koncentruar në qendër të saj, të cilën gjë e kemi treguar në (XII.5) në mënyrë direkte.

9. METODA E SHEMBËLLIMEVE ELEKTRIKE

a) Sasia pikësore e elektricitetit pranë pllakës pambarim të rrafshët metalike të përtokësuar

Le të gjendet sasia pikësore e elektricitetit q e larguar për a nga pllaka metalike pambarim e rrafshët, e cila është e përtokësuar. Dëshirojmë të përcaktojmë potencialin e fushës elektrike i cili gjendet në hapësirë përreth elektricitetit q. Do të vendosim boshtin z të sistemit të koordinateve cilindrike nëpër pikë në të cilën gjendet sasia e elektricitetit me origjinë në sipërfaqe të pllakës metalike sikurse tregon fig. 81. Koordinatet cilindrike të pikës P në të cilën dëshirojmë të përcaktojmë potencialin e fushës elektrike janë R, z dhe φ. Por, nga simetria cilindrike potenciali nuk do të varet prej ndryshores φ. Potenciali V përbëhet prej dy pjesëve:

$$V = V_1 + V_2 \tag{1}$$

ku V_1 është poteciali i fushës, burim i së cilës është sasia pikësore e elektricitetit q, kurse V_2 një potencial i cili është rezultat i prezencës së pllakës metalike. Për potencialin e parë shfrytëzojmë formulën:

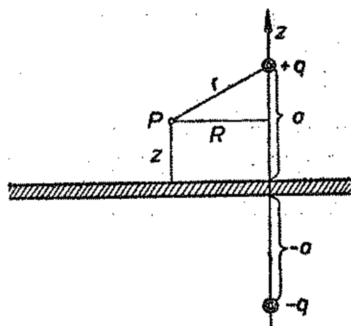


Fig. 81

$$V_1 = k\,\frac{q}{r}$$

kurse nga figura 81 kemi:

$$V_1 = k \frac{q}{\sqrt{(z-a)^2 + R^2}} \tag{2}$$

Meqë pllaka metalike është e lidhur me Tokë, tensioni i saj ndaj Tokës është i barabartë me zero. Nëse sipas marrëveshjes marrim se Toka e ka potencialin zero, edhe potenciali i saj është $V = 0$. Ky është potenciali në sipërfaqe të pllakës, pra në vendin ku $z = 0$. Që kjo të arrihet, duhet të kërkojmë që:

$$\lim_{z \to 0} V_2 = - \lim_{z \to 0} V_1 = - k \frac{q}{\sqrt{a^2 + R^2}} \tag{3}$$

Kjo mund të arrihet, nëse marrim:

$$V = - k \frac{q}{\sqrt{(z+a)^2 + R^2}} \tag{4}$$

sepse vlera kufitare e saj e jep shprehjen (3). Në bazë të kësaj për potencial të fushës duhet të merret:

$$V = kq \left[\frac{1}{\sqrt{(z-a)^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z+a)^2 + R^2}} \right] \text{ për } z > 0 \tag{5}$$

Potenciali (4) është rezultat i fushës, burim i së cilës është pllaka metalike. Shprehja tregon se ky është potenciali i sasisë pikësore të elektricitetit — q e cila gjendet në vendin me koordinate $(R, -a)$. Prandaj, ndikimi i pllakës metalike në fushë mund të zëvendësohet me një sasi pikësore të elektricitetit me parashenjë të kundërt dhe e cila gjendet në vendin ku do të ishte shembëllimi i sasisë së dhënë të elektricitetit sikur pllaka e rrafshët të mendohej pasqyrë.

Kjo metodë në të cilën ndonjë përcjellës zëvendësohet me sasinë pikësore të elektricitetit paraqitet në probleme të ndryeshme dhe quhet metodë e shembëllimit.

Kemi vërejtur se pllaka metalike është gjithashtu burim i një pjese të fushës, prandaj duhet supozuar se edhe në te është i shpërndarë ndonjë elektricitet. Themi se ky është elektriciteti i cili është paraqitur me influencë. Do ta përcaktojmë dendësinë sipërfaqësore të tij. Për këtë shfrytëzojmë formulën (XII.4.8):

$$E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$

Në vend të fushës e paraqesim potencialin:

$$E_{1n} = - \frac{\partial z}{\partial V}$$

dhe fitojmë

$$\sigma = - \varepsilon_n \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) z = 0$$

kurse nga (5) rrjedh:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = - k\, q \left(\frac{z + a}{[z - a)^2 + R^2]^{3/2}} - \frac{z - a}{[z + a)^2 + R^2]^{3/2}}\right)$$

dhe për $z = 0$ rrjedh:

$$\sigma = - \frac{2\, k\, q\, a}{(a^2 + R^2)^{3/2}} \tag{6}$$

Kjo është dendësia sipërfaqësore e elektricitetit e cila është e shpërndarë në pllakë metalike si rezultat i influencës. Shohim se elektriciteti është më i dendur rreth qendrës dhe sa më larg saj kjo dendësi bëhet më e vogël. Vijat e forcës së fushës elektrike janë identike me gjysmën e shpërndarjes së vijave të dy sasive të njëjta pikësore të elektricitetit të cilat qëndrojnë simetrikisht ndaj sipërfaqes së rrafshët metalike, sikurse tregon figura 82.

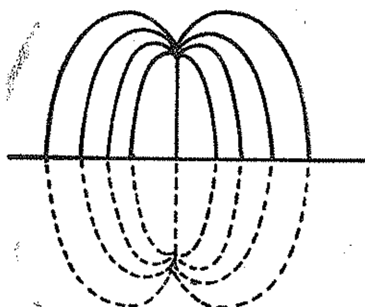


Fig. 82

Me metodën e shembëllimit elektrik zgjidhet edhe njehsimi i potencialit të sasisë pikësore të elektricitetit e cila gjendet përpara përcjellësit të formës së këndit të drejtë, apo të formës së këndit të pjerrët.

b) Sasia pikësore e elektricitetit pranë sferës përcjellëse të përtokësuar

Le të jetë sasia pikësore e elektricitetit q_1 e vendosur pranë sferës përcjellëse me rreze R, e cila është e lidhur me Tokën. Kjo e ka potencialin $V = 0$. Do ta shënojmë largësinë e sasisë së elektricitetit nga qendra e sferës me a_1.

Edhe këtë shembull do ta zgjidhim me metodën e shembëllimit. Sipas kësaj metode sferën duhet zëvendësuar me sasinë pikësore të elektricitetit q_2 e cila gjendet në vijën P_2O e larguar nga qendra e sferën për a_2 sikurse tregon fig. 83.

Potenciali i fushës së këtyre dy sasive pikësore të elektricitetit përcaktohet me formulën:

$$V = k \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right) \tag{7}$$

Në sipërfaqe të sferës $V = 0$ dhe fitojmë:

$$\frac{q_1}{q_2} = -\frac{r_1}{r_2} \tag{8}$$

Meqë r_1 dhe r_2 janë pozitiv, rrjedh se madhësitë q_1 dhe q_2 kanë parashenjë të kundërt. Pra, në këtë rast shembëllimi ka elektricitet të kundërt.

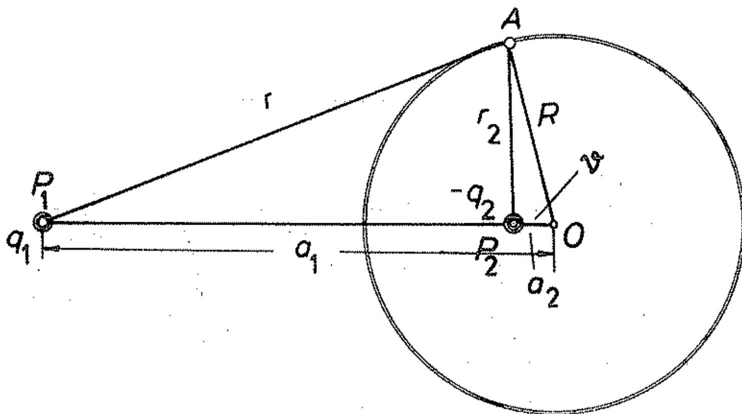


Fig. 83

Largësia e burimit të fushës nga cilado pikë në sferë përcaktohet sipas figurës 83 nga teorema e kosinusit:

$$r_1^2 = a_1^2 + R^2 - 2\,a_1 R \cos\vartheta$$

$$r_2^2 = a_2^2 + R^2 - 2\,a_2 R \cos\vartheta$$

I zëvendësojmë në (8):

$$\frac{q_1}{q_2} = -\sqrt{\frac{a_1^2 + R^2 - 2\,a_1 R \cos\vartheta}{a_2^2 + R^2 - 2\,a_2 R \cos\vartheta}}$$

ose

$$\frac{q_1}{q_2} = -\sqrt{\frac{a_1[(a_1 + R/a_1) - 2\,R \cos\vartheta]}{a_2[(a_2 + R/a_2) - 2\,R \cos\vartheta]}} \tag{9}$$

Shohim se ana e majtë nuk varet prej pozitës së pikës në sferë e kështu duhet të jetë edhe ana e djathtë. Që thyesa nën rrënjë të mos varet nga këndi ϑ, duhet të vlejë:

$$a_1 + \frac{R}{a_1} = a_2 + \frac{R}{a_2}$$

ose

$$R^2 = a_1 a_2 \tag{10}$$

Pikat për largësi të të cilave nga qendra e sferës vlenë shprehja (10) quhen pika inverze. Në bazë të kësajë, fusha e elektricitetit pikësor në afërsi të sferës së përtoksuar është e atillë thuase sfera është zëvendësuar me sasinë pikësore të elektricitetit, e cila gjendet në pikën inverze. Largësia e kësaj pike nga qendra e sferës është:

$$a_2 = \frac{R^2}{a_1} \tag{11}$$

kurse sasia e elektricitetit sipas (9) është:

$$q_2 = -q_1 \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}$$

dhe nga (11)

$$q_2 = -q_1 \frac{R}{a_1} \tag{12}$$

kështu e kemi përcaktuar edhe largësinë edhe elektricitetin e shembëllimit të sasisë pikësore q_1 ndaj sferës.

c) Sfera përcjellëse në fushë homogjene elektrostatike

Edhe këtë shembull do ta zgjidhim me metodën e shembëllimit elektrik. Fushën homogjene elektrike me intensitet E_o mund ta përafrojmë me dy sasi të njëjta pikësore të elektricitetit q me parashenja të ndryshme të cilat gjenden në largësi tepër të madhe $2a$. Në pikën

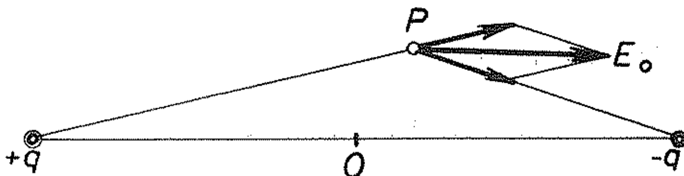


Fig. 84

P e cila gjendet afër mesit të sasive pikësore të elektricitetit vektorët përkatës të fushave vetëm pak janë të mënjanuara ndaj vijës $2a$, ndërsa rezultantja e tyre sikurse shihet në fig. 84 gati është paralele me këtë vijë. Intensitetet e fushave shumë pak dallohen nga fusha në mes të kësaj vije e cila është:

$$k \frac{q}{a^2}$$

prandaj mund të marrim përafërsisht se rezultantja e tyre e ka intensitetin:

$$E_o = k \frac{2q}{a^2} \tag{13}$$

Supozojmë se në këtë fushë homogjene elektrostatike e kemi vendosur një sferë të vogël prej materialit përcjellës. Nga influenca paraqitet sasia e elektricitetit në te, të cilën mund ta mendojmë të vendosur në shembëllimet e sasive të elektricitetit $\pm q$, të cilët e përcaktojnë fushën. Sasitë e elektriciteteve në shembëllime, sipas (12), janë:

$$q' = \mp q \frac{R}{a}$$

kurse sipas (11) gjenden në largësitë:

$$a' = \frac{R^2}{a}$$

nga qendra e sferës.

Që të përfitojmë potencialin e fushës në ndonjë pikë P, e cila është e përcaktuar me koordinatet e veta polare r dhe ϑ, duhet t'i mbledhim potencialet e katër sasive pikësore të elektriciteteve:

$$V = k \left[q \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - q' \left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'} \right) \right] \tag{14}$$

Nga figura 85 shohim se vlen:

$$r_1 = \sqrt{a^2 + r^2 + 2\, a\, r \cos\vartheta}$$

prandaj

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{r^2}{2a^2} - \frac{r}{a} \cos\vartheta \right)$$

sepse a është mjaft e madhe dhe zhvillimi në seri të binomit është i mundshëm. Nga e njëjta figurë shohim se vlen:

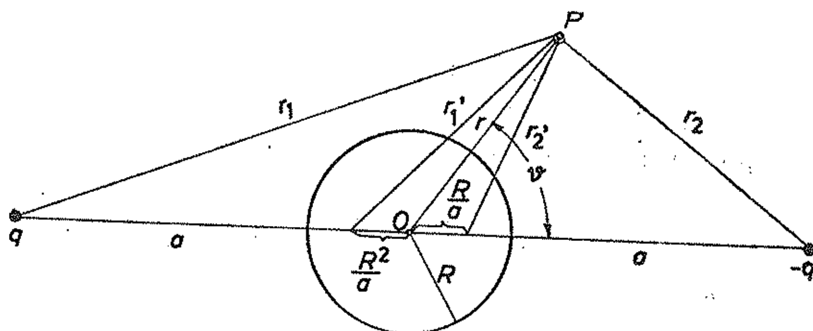


Fig. 85

$$r_2 = \sqrt{a^2 + r^2 - 2\,a\,r\cos\vartheta}$$

ose

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{r^2}{2a^2} + \frac{r}{a}\cos\vartheta\right)$$

Prandaj në këtë përafrim kemi:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = -\frac{2\,r}{a^2}\cos\vartheta \tag{15}$$

Gjithashtu, nga fig. 5 shohim se vlen:

$$r_1' = \sqrt{r^2 + a'^2 + 2\,r\,a'\cos\vartheta}$$

Meqë a' është mjaft i vogël, shkruajmë:

$$\frac{1}{r_1'} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a'^2}{2r^2} - \frac{a'}{r}\cos\vartheta\right)$$

dhe

$$\frac{1}{r_2'} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a'^2}{2r^2} + \frac{a'}{r}\cos\vartheta\right)$$

kurse

$$\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'} = -\frac{2a'}{r^2}\cos\vartheta$$

Zëvendësojmë:

$a' = R^2/a$ dhe fitojmë:

$$\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'} = -\frac{2R^2}{ar^2}\cos\vartheta \tag{16}$$

Zëvndësojmë (15) dhe (16) në (14):

$$V = kq\left[-\frac{2r}{a^2}\cos\vartheta + \frac{2R^3}{a^2r^2}\cos\vartheta\right]$$

dhe nga (13)

$$V = -E_o\left(r - \frac{R^3}{a^2}\right)\cos\vartheta \tag{17}$$

Kjo është formula për potencial. Anëtari i parë paraqet potencialin e fushës homogjene, kur në te nuk gjendet sfera, kurse anëtari i dytë paraqet ndikimin e sferës në këtë fushë.

Tani mund të përcaktojmë shumë lehtë dendësinë sipërfaqësore të elektricitetit i cili me influencë paraqitet në sferë. Nga shprehja (XII.4.8) kemi:

$$\sigma = \varepsilon_o E_n = -\varepsilon_o\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=R}$$

E derivojmë (17):

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -E_o\left(1 + \frac{2R^3}{r^2}\right)\cos\vartheta$$

dhe pasi të zëvendësojmë $r = R$ fitojmë:

$$\sigma = 3\varepsilon_o E_o \cos\vartheta\,. \tag{18}$$

Shihet nga kjo shprehje se dendësia e elektricitetit e paraqitur me influencë është më e madhe në pole të sferës $\sigma_p = 3\varepsilon_o E_o$ dhe zvogëlohet kah ekuatori ku është i barabartë me zero.

10. POTENCIALI DHE FUSHA E DIPOLIT ELEKTRIK

Dipol elektrik quhet kombinimi i dy sasive të njëjta të elektricitetit të kundërt të cilat gjenden në largësi të vogël njëra ndaj tjetrës. Elektriciteti $+q$ paraqet polin pozitiv të dipolit, kurse $-q$ polin negativ të tij. Largësinë në mes të poleve të dipolit do ta shënojmë me a. Këtë largësi do ta mendojmë si vektor i cili e ka kahjen nga poli negativ kah poli pozitiv. Do ta përkufizojmë momentin e dipolit si prodhim të sasisë së elektricitetit të polit pozitiv dhe largësisë në mes të poleve. Do ta shënojmë me $\vec{m}$, kurse sipas përkufizimit:

$$\vec{m} = q\,\vec{a} \tag{1}$$

Kjo është një madhësi karakteristike për dipol dhe figuron në të gjitha shprehjet për te.

Do të marrim se dipoli i këtillë është burim i fushës elektrostatike, prandaj së pari do të përcaktojmë potencialin e saj e pastaj fushën.

Për potencial mund të shkruajmë shprehjen menjëherë, sepse dipoli paraqet sistem të dy sasive pikësore të elektricitetit:

$$V = k\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) = kq\,(r_1^{-1} - r_2^{-1}) \qquad (2)$$

Këtu me r_1 e kemi shënuar largësinë e polit pozitiv nga pika P në të cilën e përcaktojmë potencialin, kurse me r_2 e kemi shënuar largësinë e polit negativ nga kjo pikë.

Në fig. 86 është vizatuar dipoli $(+q, -q)$. Do ta shënojmë me $\vec{r}$ vektorin e cili bashkon mesin e largësisë në mes të poleve dhe pikën P. Nga fig. 86 shohim se duke e zbatuar teoremën e kosinusit mund të shkruajmë:

$$r_1^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - a\,r\cos\vartheta = r^2 + \frac{a^2}{4} - \vec{a}\,\vec{r}$$

dhe

$$r_2^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a\,r\cos\vartheta = r^2 + \frac{a^2}{4} + \vec{a}\,\vec{r}$$

Kërkojmë r_1^{-1}:

$$r_1^{-1} = (r_1^2)^{-\frac{1}{2}} = \left(r^2 + \frac{a^2}{4} - \vec{a}\,\vec{r}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a^2}{4r^2} - \frac{\vec{a}\,\vec{r}}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

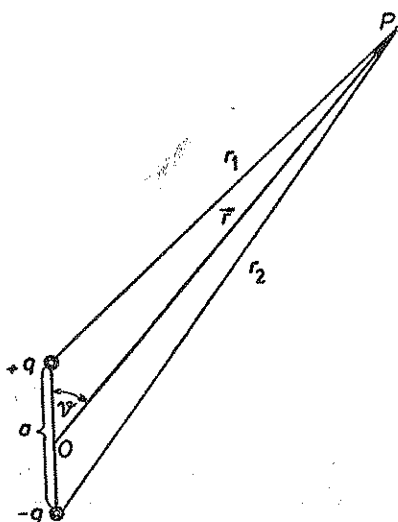


Fig. 86

Te dipoli gjithmonë largësia në mes të poleve është e vogël dhe zakonisht ka dimensione molekulare. Në anën tjetër $\vec{r}$ është mjaft i madh në krahasim me $\vec{a}$, sepse fushën e kërkojmë në largësi të mëdha nga dipoli. Duke u bazuar në këtë arsyetim, kuptojmë se anëtari i dytë në kllapë me siguri është më i vogël se një dhe mund ta zhvillojmë në seri të binomit. Do të supozojmë se $r \gg a$ dhe është e mjaftueshme të marrim vetëm anëtarët e shkallës së parë të zhvillimit. Fitojmë:

$$r_1^{-1} = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4r^2} - \frac{\vec{a}\,\vec{r}}{r^2}\right)\right]$$

Në mënyrë të ngjashme fitojmë për:

$$r_2^{-1} = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4r^2} + \frac{\vec{a}\,\vec{r}}{r^2}\right)\right]$$

prej nga:

$$r_1^{-1} - r_2^{-1} = \frac{\vec{a}\,\vec{r}}{r^3}$$

Zëvendësojmë në (2):

$$V = k\,q\,\frac{\vec{a}\,\vec{r}}{r^3}$$

Shfrytëzojmë (1) për moment të dipolit dhe fitojmë përfundimisht shprehjen për potencial:

$$V = k\,\frac{\vec{m}\,\vec{r}}{r^3} \qquad (3)$$

Shprehjes për potencial të dipolit mund t'ia japim edhe një formë. E dimë se

$$\vec{r}/r = \vec{r}_o$$

kurse nga (3):

$$V = k\,\frac{\vec{m}}{r^2}\,\vec{r}_o = k\,\frac{m\cos\vartheta}{r^2} \qquad (4)$$

Pastaj vlen:

$$\frac{\vec{r}_o}{r^2} = -\,grad\left(\frac{1}{r}\right)$$

kurse për potencial kemi:

$$V = -\,k\,\vec{m}\,grad\,\frac{1}{r} \qquad (5)$$

Në shprehje të fundit gradienti njehsohet duke iu ndryshuar pozita e pikës P. Ndonjëherë kërkohet që pika P të mbetet e palëvizshme, kurse të ndryshohet pika e mesme e dipolit. Atëherë gradienti e ndërron parashenjën, sepse në përgjithësi vlen:

$$grad_d \vec{r} = - r_o$$

ku: indeksi d tregon veprimin e gradientit, kur ndërron pozita e dipolit. Prandaj (5) mund ta shkruajmë:

$$V = k \vec{m} \, grad_d \left(\frac{1}{r}\right) \tag{6}$$

Përcaktimin e fushës e kërkojmë nga shprehja:

$$\vec{E} = - grad \, V = - grad \left(\frac{k \vec{m} \vec{r}}{r^3}\right)$$

Sipas rregullës së gradientit të prodhimit të vektorit $(\vec{m} \vec{r})$ dhe skalarit $1/r^3$ kemi:

$$\vec{E} = - k (\vec{m} \vec{r}) \, grad \left(\frac{1}{r^3}\right) - \frac{k}{r^3} \, grad (\vec{m} \vec{r})$$

Pasi:

$$grad (\vec{m} \vec{r}) = \vec{m} \text{ dhe } grad \left(\frac{1}{r^3}\right) = - \frac{3}{r^4} \vec{r_o} = - \frac{3 \vec{r}}{r^5}$$

kemi për fushë të dipolit:

$$\vec{E} = \frac{k}{r^3} \left[\frac{3 (\vec{m} \vec{r}) \vec{r}}{r^2} - \vec{m}\right] \tag{7}$$

Në lidhje me dipolin mund të paraqesim edhe shprehjen për energji potenciale të tij në ndonjë fushën elektrike.

Do të vendosim boshtin x në kahje të veprimit të fushës elektrike. Le të gjendet poli negativ i dipolit në vendin me abshise x. Për bartjen e tij nga pambarimi deri në atë vend duhet harxhuar punë $- qV(x)$. Le të ketë poli pozitiv i tij abshisën $x + dx$. Për bartjen e tij deri në pozitën që ka harxhohet puna $q \cdot V(x + dx)$. Prandaj për formimin e dipolit në fushë është harxhuar puna:

$$A = - qV(x) + qV(x + dx)$$

E zhvillojmë në seri të Tejlorit:

$$V(x + dx) = V(x) + \frac{dV}{dx} dx$$

dhe fitojmë:

$$A = q \frac{dV}{dx} dx$$

Nëse dipoli qëndron pjerrtas ndaj fushës ashtu që boshti i tij mbyll këndin α me këtë, atëherë $dx = a \cos\alpha$:

$$A = q\, a \frac{dV}{dx} \cos\alpha = m \frac{dV}{dx} \cos\alpha$$

Derivati në këtë shprehje paraqet x-konstanten e fushës elektrike dhe, pasi këtë bosht e kemi vendosur në kahje të fushës, kemi:

$$E = - \frac{dV}{dx}$$

dhe për energji:

$$A = - m\, E \cos\alpha$$

Në anën e majtë gjendet shprehja për prodhim skalar, prandaj përfundimisht fitojmë shprehjen:

$$A = - \vec{m}\, \vec{E} \tag{8}$$

për energji të dipolit në fushë elektrike.

11. POTENCIALI I SHTRESËS DIPOLARE

Le të jetë burim i fushës elektrostatike sipërfaqja e cila në njërën anë është e ngarkuar me elektricitet pozitiv, kurse në anën tjetër me elektricitet negativ. Le të jenë dendësitë e këtyre elektriciteteve në të dy anët e sipërfaqes të barabarta. Sipërfaqen e këtillë mund ta mendojmë të përbërë prej një numri shumë të madh të dipoleve shumë të afërta, boshtet e të cilëve qëndrojnë normal në sipërfaqen e dhënë. Themi se kemi shtresë dipolare. Do ta shënojmë intensitetin e momenteve të dipoleve në njësi të sipërfaqes me m dhe do të supozojmë se është funksion i njohur i vendit në sipërfaqe.

Sipërfaqen e ndajmë në elemente të vogla të saj. Në njërin prej tyre momenti dipolar do të jetë $m \cdot dS$. Ky element i sipërfaqes i kontribuon potencialit në ndonjë pikë të larguar për r me vlerën:

$$dV = k \frac{m \cos\alpha}{r^2} dS$$

Prodhimi $dS \cdot \cos\alpha$ paraqet projeksionin e elementit të sipërfaqes dS në rrafshin normal ndaj r. Pra:

$$dS \cdot \cos\alpha = dS_n$$

dhe

$$dV = k\,m\,\frac{dS_n}{r^2}$$

Te fluksi kemi treguar se:

$$\frac{dS_n}{r^2} = d\,\Omega$$

paraqet këndin hapësinor me të cilin shihet elementi i sipërfaqes nga pika P në të cilën dëshirojmë të përcaktojmë potencialin. Prandaj mund të shkruajmë:

$$dV = k\,m\,d\,\Omega$$

Tani duhet t'i mbledhim kontributet nga të gjitha elementet e sipërfaqes. Fitojmë integralin:

$$V = k \int m\,d\,\Omega \qquad (1)$$

i cili shpreh potencialin e shtresën dipolare.

Në veçanti, nëse dendësia e momenteve dipolare është konstante, në tërë sipërfaqen, kemi:

$$m = const.$$

kurse me integrim fitojmë:

$$V = k\,m\,\Omega \qquad (2)$$

Le të jetë sipërfaqja dipolare e mbyllur. Për pikat jashtë saj me të njëjtin përfundim sikurse te fluksi do të kemi:

$$V_j = 0 \qquad (3)$$

kurse për pikat brenda saj, meqë këndi hapësinor është i barabartë me 4π, do të kemi:

$$V_b = 4\pi\,k\,m = \frac{m}{\varepsilon_o} \qquad (6)$$

Vërejmë se në sipërfaqen e shtresës dipolare potenciali ndërron për madhësinë m/ε_o. Ky është rasti i vetëm, kur potenciali nuk është funksion i pakëputur.

12. POTENCIALI I KUADRUPOLIT ELEKTRIK

a) Kuadrupoli linear

Do t'i vendosim dy dipole të njëjta me momente të kundërta në largësi të vogël njërin pranë tjetrit. Kësisoji fitojmë sistemin prej katër sasish pikësore të elektricitetit, të cilin e quajmë kuadrupol elektrik. Nga të gjitha pozitat e mundshme të këtyre dy dipoleve elektrike si më të rëndësishme mund të veçojmë dy. Kombinimi i parë fitohet kur njërin dipol e zhvendosim ndaj tjetrit në kahje të boshteve të tyre ashtu që të katër polet gjenden në një drejtim. Ky kuadrupol quhet kuadrupol elektrik linear. Mundësia e dytë paraqitet kur njërin dipol e zhvendosim ndaj tjetrit në kahje normale ndaj boshtit të të parit ashtu që boshtet e tyre mbeten paralel ndërmjet veti. Ky quhet kuadrupol elektrik sipërfaqësor.

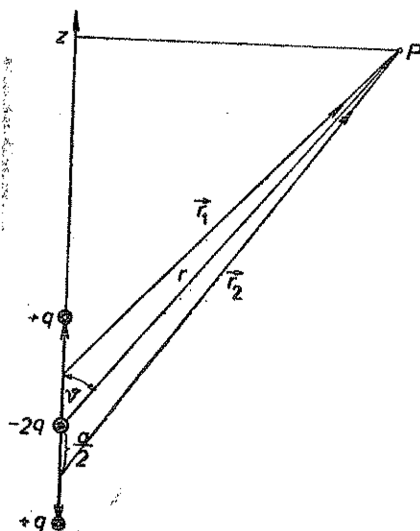


Fig. 87

Do të përcaktojmë potencialin e këtyre kuadrupoleve karakteristike në pikë mjaft të larguar nga polet e tyre. Së pari të shqyrtojmë potencialin e kuadrupolit linear.

Ky kuadrupol është vizatuar në fig. 87. Dipoli $(-q, q)$ me largësi të poleve a është vendosur në kahje të boshtit z të sistemit të koordinateve. Dipoli tjetër ka kahje të kundërt dhe është zhvendosur për a në kahje negative. Kësisoji, poli negativ i tij gjithashtu qëndron në origjinë të sistemit, kurse poli pozitiv në vendin $z = -a$. Sipas kësaj kuadrupoli linear i këtillë në mes i ka polet negative të përbashkëta $-2q$, kurse në largësi të njëjta, por të kundërta nga një rol pozitiv $+q$.

Këtë kuadrupol mund ta mendojmë si dy dipole, njëri me momentin $\vec{m}$ dhe qendër në pikën $z = a/2$, kurse tjetri me momentin $-\vec{m}$ dhe qendër në pikën $z = -a/2$. Potencialin e tij e gjejmë si shumë të potencialeve të këtyre dy dipoleve. Pra:

$$V = k\left(\frac{\vec{m}\,\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{m}\,\vec{r}_2}{r_2^3}\right) \qquad (1)$$

Këtu me r_1 e kemi shënuar largësinë e pikës P në të cilën e kërkojmë potencialin nga mesi i dipolit të parë, kurse me r_2 largësinë e të njëjtës pikë nga mesi i dipolit të dytë. Prandaj, vektorët $\vec{r}_1$ dhe $\vec{r}_2$ i kanë këto komponente:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - a/2 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z + a/2 \end{pmatrix}$$

Momenti i dipolit $\vec{m}$ është vektor në kahje të boshtit z dhe i ka këto komponente:

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} O \\ O \\ m \end{pmatrix}$$

Ndërsa prodhimet skalare të cilat paraqiten në (1) janë:

$$\vec{m}\,\vec{r}_1 = m\,(z - a/2)$$

$$\vec{m}\,\vec{r}_2 = m\,(z + a/2)$$

dhe potenciali e ka formën:

$$V = k\,m\left(\frac{z - a/2}{r_1^3} - \frac{z + a/2}{r_2^3}\right) \qquad (2)$$

Vlerat r_1 dhe r_2 i përcaktojmë nga fig. 87, duke zbatuar teoremën e kosinusit. Shohim se vlen:

$$r_1^2 = r^2 + \frac{a^2}{4} - a\,r\cos\vartheta = r^2 + \frac{a^2}{4} - a\,z$$

$$r_2^2 = r^2 + \frac{a^2}{4} + a\,r\cos\vartheta = r^2 + \frac{a^2}{4} + a\,z$$

sepse nga fig. 87 $r\cos\vartheta = z$ Për pikat $a \ll r$ fitojmë nga këto shprehje:

$$r_1^2 = r^2\left(1 - \frac{a\,z}{r^2}\right)$$

$$r_2^2 = r^2\left(1 + \frac{a\,z}{r^2}\right)$$

kurse:

$$\frac{1}{r_1^3} = (r_1^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{r^3}\left(1 - \frac{a\,z}{r^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

e zhvillojmë në seri të binomit, duke mos përfilluar anëtarët e shkallës së lartë të a/r. Fitojmë:

$$\frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{r^3}\left(1 + \frac{3\,a\,z}{2\,r^2}\right) \tag{3}$$

dhe në mënyrë të ngjashme:

$$\frac{1}{r_2^3} = \frac{1}{r^3}\left(1 - \frac{3\,a\,z}{2\,r^2}\right)$$

Tani kërkojmë thyesat:

$$\frac{z - a/2}{r_1^3} = \frac{1}{r^3}\left(z - \frac{a}{2}\right)\left(1 + \frac{3\,a\,z}{2\,r^2}\right) = \frac{1}{r^3}\left(z - \frac{a}{2} + \frac{3\,a\,z^2}{2\,r^2}\right)$$

$$\frac{z + a/2}{r_2^3} = \frac{1}{r^3}\left(z + \frac{a}{2}\right)\left(1 - \frac{3\,a\,z}{2\,r^2}\right) = \frac{1}{r^3}\left(z + \frac{a}{2} - \frac{3\,a\,z^2}{2\,r^2}\right)$$

Gjatë këtij shumëzimi nuk i kemi përfillur anëtarët a^2/r^2. I zëvendësojmë këto vlera në (2):

$$V = k\,\frac{m}{r^3}\left(\frac{3\,a\,z^2}{r^2} - a\right)$$

E dimë se $m = q\,a$, prandaj kemi:

$$V = k\,q\,a^2\left(\frac{3\,z^2 - r^2}{r^5}\right) \tag{4}$$

Madhësia $q\,a^2$ do ta përkufizojmë si moment të kuadrupolit dhe e shkruajmë në formën:

$$Q_{zz} = a^2 q$$

ndërsa shprehja për potencial është:

$$V = k\,Q_{zz}\left(\frac{3\,z^2 - r^2}{r^5}\right) \tag{5}$$

Nëse dëshirojmë ta shkruajmë këtë në koordinate polare, atëherë duhet zëvendësuar:

$$z = r\cos\vartheta$$

dhe fitojmë:

$$V = k\,Q_{zz}\,\frac{3\cos^2\vartheta - 1}{r^3} \tag{6}$$

b) Kuadropoli sipërfaqësor

Kuadrupoli sipërfaqësor formohet nga dy dipole të kahjes së kundërt me boshte paralele sikurse tregon fig. 88. Dipolet le të kenë kahje paralele me boshtin x të sistemit koordinat dhe le të jenë zhvendosur njëri ndaj tjetrit për b në kahje të boshtit z. Kuadrupoli përbëhet prej katër sasive pikësore të elektricitetit të shpërndara në kulmet e një katërkëndëshi dhe me radhë kanë parashenja të kundërta.

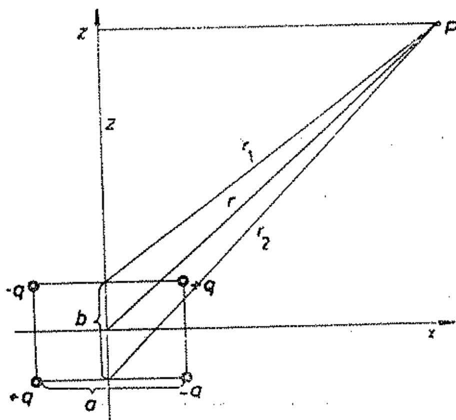


Fig. 88

Për potencial të kuadrupolit sipërfaqësor prapë fillojmë nga shprehja:

$$V = k \left(\frac{\vec{m}\,\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{m}\,\vec{r}_2}{r_2^3} \right)$$

Në këtë rast momenti i dipolit e ka kahjen e boshtit x, prandaj komponentet e tij janë:

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} m \\ O \\ O \end{pmatrix}$$

ndërsa prodhimet skalare:

$$\vec{m}\,\vec{r}_1 = \vec{m}\,\vec{r}_2 = m\,x$$

Shprehjen (1) mund ta shkruajmë edhe kësisoji:

$$V = k\,m\,x\,(r_1^{-3} - r_2^{-3}) \tag{7}$$

Për $1/r_1^3$ në mënyrë të ngjashme sikurse më parë fitojmë shprehjen (3) me të vetmin ndryshim se këtu zhvendosja është për b. Do të kemi:

$$r_1^{-3} = \frac{1}{r^3}\left(1 + \frac{3\,b\,z}{2\,r^2}\right)$$

dhe

$$r_2^{-3} = \frac{1}{r^3}\left(1 - \frac{3\,b\,z}{2\,r^2}\right)$$

ose:

$$r_1^{-3} - r_2^{-3} = \frac{3\,b\,z}{r^5}$$

Pasi të zëvendësojmë vlerën $m = q\,a$ për potencial fitojmë:

$$V = kq\,a\,b\,\frac{3\,x\,z}{r^5} \qquad (8)$$

Për moment të kuadrupolit sipërfaqësor e përkufizojmë madhësinë:

$$Q_{xz} = q\,a\,b$$

dhe përfundimisht fitojmë për potencial:

$$V = k\,Q_{xz}\,\frac{3\,x\,z}{r^5} \qquad (9)$$

Edhe këtë shprehje mund ta paraqesim në koordinate polare. E dimë se:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi \quad \text{dhe} \quad z = r\cos\vartheta$$

kurse (9) e merr formën:

$$V = k\,Q_{xz}\,\frac{3\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi}{r^3} \qquad (10)$$

Me zhvendosje të kuadrupoleve të kundërta mund të fitojmë kombinim të ri të sasive pikësore të elektricitetit, i cili i ka tetë pole, prandaj quhet oktopol. Kësisoji mund të vazhdojmë në përgjithësi për pole të rendit 2^n.

13. POTENCIALI I SHPËRNDARJES SË ÇFARËDOSHME TË ELEKTRICITETIT

a) Njehsimi në koordinate kënddrejta

Do të marrim si burim të fushës elektrostatike shpërndarjen e çfarëdoshme të njohur të elektricitetit në ndonjë vëllim relativisht të vogël. Do të kufizohemi për ato pika, largësia e të cilave është mjaft e madhe në krahasim me dimensionet e burimit të fushës.

Figura 89 tregon vëllimin në të cilin është i shpërndarë elektriciteti dhe pikën e larguar P në të cilën dëshirojmë të përcaktojmë potencialin. Pikën arbitrare në vëllim e marrim për origjinë të sistemit.

Pika P e ka vektorin e pozitës $\vec{r}$ të përcaktuar me komponentet:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

E ndajmë vëllimin në të cilin është i shpërndarë elektriciteti në elemente të vogla të tij. Njëri prej tyre $d\tau$ gjendet te pika A, të cilën e përcakton vektori i pozitës $\vec{v}$ komponentet e së cilit janë:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

Largësinë e pikës P nga elementi i vëllimit në A e përcakton vektori:

$$\vec{u} = \vec{r} - \vec{v}$$

komponentet e të cilit janë:

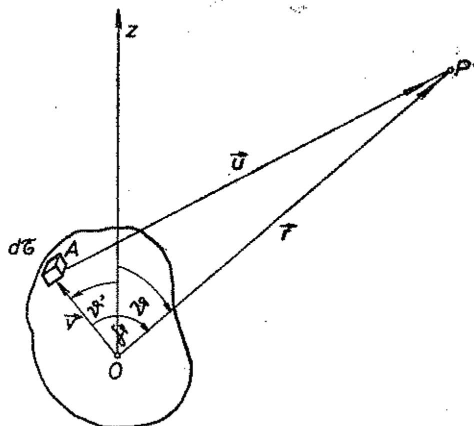


Fig. 89

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x - \xi \\ y - \eta \\ z - \zeta \end{pmatrix}$$

Prandaj largësia e këtyre pikave është:

$$u = \sqrt{(x - \xi)^2 + (u - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} \tag{1}$$

Potencialin e njehsojmë sipas shprehjes (XII.2.27) e cila për këto madhësi e ka formën:

$$V = k \int \frac{\rho \, d\tau}{u} \tag{2}$$

ku dendësia ρ duhet të jetë funksion i njohur i vektorit $\vec{v}$. Madhësinë $1/u$ mund ta zhvillojmë në seri të Maklorenit kësisoji:

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{r} + \frac{1}{1!} \left[\left(\frac{\partial \frac{1}{u}}{\partial \xi} \right)_0 \xi + \left(\frac{\partial \frac{1}{u}}{\partial \eta} \right)_0 \eta + \left(\frac{\partial \frac{1}{u}}{\partial \zeta} \right)_0 \zeta \right] +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{u}}{\partial \xi^2} \right)_0 \xi^2 + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{u}}{\partial \eta^2} \right)_0 \eta^2 + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{u}}{\partial \zeta^2} \right)_0 \zeta^2 + \right.$$

$$+ 2 \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{u}}{\partial \xi \partial \eta} \right)_0 \xi\eta + 2 \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{u}}{\partial \xi \partial \zeta} \right)_0 \xi\zeta + 2 \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{u}}{\partial \eta \partial \zeta} \right)_0 \eta\zeta \Bigg] + \ldots \qquad (3)$$

Indeksi zero pranë derivateve tregon se duhet marrë vlerën e tyre për $\xi = \eta = \zeta = 0$.

Do t'i përcaktojmë së pari derivatet. Fillojmë nga ato të rendit të parë:

$$\frac{\partial \frac{1}{u}}{\partial \xi} = -\frac{1}{u^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{1}{u^2} \frac{-(x-\xi)}{u} = \frac{x-\xi}{u^3} \qquad (4)$$

Meqë $u(O, O, O) = r$ kemi:

$$\left(\frac{\partial \frac{1}{u}}{\partial \xi} \right)_0 = \frac{x}{r^3} \qquad (5)$$

Në mënyrë të ngjashme i fitojmë edhe derivatet sipas koordinateve tjera. I kërkojmë derivatet e dyta. Sipas (4) kemi:

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{u}}{\partial \xi^2} = \frac{-u^3 - (x-\xi)\, 3u^2 \frac{\partial u}{\partial \xi}}{u^6} = \frac{3(x-\xi)^2 - u^2}{u^5}$$

dhe

$$\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{u}}{\partial \xi^2} \right)_0 = \frac{3x^2 - r^2}{r^5} \qquad (6)$$

Do të përcaktojmë edhe njërën prej derivateve të përziera. Nga (4) kemi:

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{u}}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{-(x-\xi)\, 3u^2 \frac{\partial u}{\partial \eta}}{u^6} = \frac{3(x-\xi)\,(y-\eta)}{u^5}$$

dhe

$$\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{u}}{\partial \xi \partial \eta} \right)_0 = \frac{3\,x\,y}{r^5} \qquad (7)$$

Vlerat e derivateve të fituara i zëvendësojmë në (3):

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{r} + \left(\frac{x}{r^3}\,\xi + \frac{y}{r^3}\,\eta + \frac{z}{r^3}\,\zeta\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3x^2-r^2}{r^5}\,\xi^2 + \frac{3y^2-r^2}{r^5}\,\eta^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{3z^2-r^2}{r^5}\,\zeta^2 + \frac{6xy}{r^5}\,\xi\eta + \frac{6xz}{r^5}\,\xi\zeta + \frac{6yz}{r^5}\,\eta\zeta\right) + \ldots$$

Këtë e zëvendësojmë në shprehjen (2) për potencial, duke marrë në konsiderim se ρ varet prej ξ, η dhe ζ. Fitojmë:

$$V = k\left\{\frac{1}{r}\int\rho d\tau + \frac{1}{r^3}\,(x\int\xi\rho d\tau + y\int\eta\rho d\tau + z\int\zeta\rho d\tau) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2r^5}\,[(3\,x^2 - r^2)\int\xi^2\rho d\tau + (3y^2 - r^2)\int\eta^2\rho d\tau + (3z^2 - r^2)\int\zeta^2\rho d\tau +$$

$$+ 6xy\int\rho\xi\eta d\tau + 6xz\int\zeta\xi\rho d\tau + 6yz\int\eta\rho\zeta d\tau] + \ldots.. \qquad (8)$$

Tani duhet të përcaktojmë kuptimin e këtyre integraleve.

Integrali i parë paraqet sasinë e tërësishme të elektricitetit:

$$\int\rho d\tau = q \qquad (9)$$

Integralet në anëtarin e dytë i interpretojmë kësisoji: Kur kemi dipol të përbërë nga dy pole të cilat qëndrojnë në boshtin x, atëherë momenti i tij është $q\,a$. Mirëpo, kur kemi shpërndarje të vazhduar të elektricitetit, atëherë elementi i vëllimit $d\tau$, i cili e ka abshisën ξ, i kontribon momentit të dipolit të shpërndarjes së elektricitetit me:

$$dm_x = \xi\rho d\tau$$

dhe me integrim vëllimore fitojmë:

$$m_x = \int\xi\rho d\tau \qquad (10)$$

Këtë mund ta mendojmë si x-komponente të momentit të dipolit të elektricitetit të shqyrtuar. Në mënyrë të ngjashme fitojmë edhe për dy komponentet tjera:

$$m_y = \int\eta\rho d\tau$$

$$m_z = \int\zeta\rho d\tau$$

kurse anëtarin e dytë në (8) e shkruajmë në formën:

$$\frac{x\,m_x + y\,m_y + z\,m_z}{r^3} = \frac{r\ m}{r^3}$$

e kjo është shprehja për potencial të dipolit.

Anëtari i tretë përmban dy lloje të integraleve. Në anëtarët me derivate të dyta nën shenjën e integralit paraqiten prodhimet $\xi^2 \rho d\tau$. Te kuadrupoli linear i cili qëndron në boshtin x për moment të tij kemi pasur $q\,a^2$, ku a paraqet largësinë e elektriciteteve në kahje të x. Në rastin tonë në vend të q paraqitet prodhimi $\rho d\tau$ i cili paraqet elektricitetin i cili gjendet në elementin e vëllimit $d\tau$ dhe i larguar nga origjina për ξ. Prandaj këtë prodhim mund ta mendojmë si kontribut të elementit të vëllimit $d\tau$ për momentin e kuadrupolit linear të vendosur në kahje të x. Pra:

$$dQ_{xx} = \xi^2 \rho d\tau$$

Me integrim fitojmë komponenten e momentit të kuadrupolit të shpërndarjes së elektricitetit. Pra:

$$Q_{xx} = \int \xi^2 \rho d\tau \tag{11}$$

Në mënyrë të ngjashme i fitojmë edhe komponentet tjera të momentit të kuadrupolit linear në kahje të boshteve y dhe z:

$$Q_{yy} = \int \eta^2 \rho d\tau$$

$$Q_{zz} = \int \zeta^2 \rho d\tau$$

Në anëtarin e tretë paraqiten edhe tri integrale të cilat rrjedhin nga derivatet e përziera. I pari prej tyre e ka nën shenjën e integralit prodhimin $\xi\eta\rho d\tau$. E dimë se përveç kuadrupolit elektrik linear ekziston edhe ai sipërfaqësor. Kemi treguar se momenti i këtij kuadrupoli është qab. Këtë përkufizim duhet ta zgjerojmë për shpërndarje të vazhduar të elektricitetit. Elementi i vëllimit $d\tau$ përmban elektricitetin $\rho d\tau$ dhe është i larguar nga origjina për ξ dhe η. Prandaj kontributi i këtij elementi për momentin është:

$$dQ_{xy} = \xi\eta\rho d\tau$$

kurse me integrim fitojmë komponenten e momentit të kuadrupolit të shpërndarjes së vazhduar të elektricitetit:

$$Q_{xy} = \int \xi\eta\rho d\tau \tag{12}$$

dhe në mënyrë të ngjashme për dy integralet tjera:

$$Q_{xz} = \int \zeta\xi\rho d\tau$$

$$Q_{yz} = \int \eta\zeta\rho d\tau$$

Pra, shpërndarja e vazhduar e elektricitetit, përveç të tjerash, ka një moment kuadrupoli të cilin mund ta zbërthejmë në tri kuadrupole lineare në kahje të tri boshteve dhe tri kuadrupole sipërfaqësore në çdo rrafsh nga një.

Duke marrë në konsiderim kuptimin e integraleve, shprehjen (8) mund ta shkruajmë në formën:

$$V = k \left\{ \frac{q}{r} + \frac{\vec{m}\,\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{3x^2-r^2}{r^5} Q_{xx} + \frac{3y^2-r^2}{r^5} Q_{yy} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{3z^2-r^2}{r^5} Q_{zz} + \frac{6xy}{r^5} Q_{xy} + \frac{6xz}{r^5} Q_{xz} + \frac{6yz}{r^5} Q_{yz} \right) + \ldots\ldots \right\} \qquad (13)$$

Faktorët pranë momenteve të kuadrupoleve janë të barabarta me faktorët të cilët qëndrojnë pranë momenteve në shprehje për potencial të kuadrupoleve, prandaj anëtari i tretë paraqet potencialin e kuadrupolit të shpërndarjes së elektricitetit të shqyrtuar.

Do t'i shënojmë me radhë potencialet e këtyre anëtarëve. Potencialin e sasisë pikësore me V_1, potencialin e dipolit me V_2, potencialin e kuadrupolit me V_4 e kështu me radhë. Atëherë potenciali i elektricitetit të shpërndarë në mënyrë të vazhduar është:

$$V = V_1 + V_2 + V_4 + V_8 + \ldots . \qquad (14)$$

Në veçanti do të marrim si shembull, sferën si burim të fushës. Origjinën do ta vendosim në qendër të saj. Në këtë rast dendësia e elektricitetit ρ është konstante dhe nga (10) për komponente të momentit të dipolit kemi:

$$m_x = \rho \int \xi d\tau$$

Meqë kemi simetri sferike, çdo elementi të vëllimit me ξ pozitive i përgjigjet edhe një element i vëllimit me të njëjtin ξ negative. Prandaj kontributet e këtilla anulohen, prej nga përfundojmë se sfera e ngarkuar në mënyrë homogjene me elektricitet nuk ka moment dipoli.

Nga të njëjtat arsyetime edhe (12) për momente të kuadrupolit sipërfaqësor është i barabartë me zero, por shprehja (11) për moment të kuadrupolit linear nuk jep zero, sepse ξ është në katrorë. Lehtë kuptojmë se vlen:

$$Q_{xx} = Q_{yy} = Q_{zz}$$

dhe anëtari për fushë kuadripolare në (13) do të jetë:

$$Q_{xx} \frac{3x^2-r^2+3y^2-r^2+3z^2-r^2}{r^5} = Q_{xx} \frac{3(x^2+y^2+z^2)-3r^2}{r^5} =$$

$$= \frac{3r^2-3r^2}{r^5} Q_{xx} = 0$$

Pra, edhe fusha kuadripolare është e barabartë me zero. Mund të tregohet se kështu ndodh edhe me fushat e multipoleve të larta. Është

e qartë se në shprehjen (14) ngel vetëm anëtari i parë, çka do të thotë se fusha e sferës është identike me fushën e sasisë pikësore të elektricitetit të cilën gjë e kemi vërtetuar në mënyrë direkte në (XII.5).

Nëse si burim fushe është elektriciteti i shpërndarë në vëllim të elipsoidit, në mënyrë të ngjashme tregohet se momenti i dipolit është i barabartë me zero. Gjithashtu, vlen edhe për momentet e kuadrupoleve sipërfaqësore Q_{xy}, Q_{xz} dhe Q_{yz}. Por, te elipsoidi Q_{xx}, Q_{yy} dhe Q_{zz} nuk janë të barabartë ndërmjet veti, prandaj ekziston një moment kuadrupolar. Fusha e elipsoidit homogjen të ngarkuar me elektricitet është rezultat i superponimit të fushës së sasisë pikësore dhe fushës së kuadrupolit.

b) Njehsimi në koordinate polare

Fushën e shqyrtuar deri tash mund ta njehsojmë edhe në koordinate polare. Në fig. 89 do të shënojmë me γ këndin në mes të vektorëve $\vec{r}$ dhe $\vec{v}$. Në shprehjen (2) për potencial duhet ta shprehim largësinë u të elementit të vëllimit nga pika P në koordinate polare. Dihet nga matematika se $1/u$ paraqet funksionin gjenerues të polinomeve të Lezhandrit. Tregohet se vlen formula:

$$\frac{1}{u} = \sum_{l=l}^{\infty} \frac{v^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\gamma) \qquad (15)$$

Këtu $1/u$ është zhvilluar në seri të shkallëve të v. Koeficientët e kësaj serie përmbajnë largësinë r në shkallën $r^{-(l+1)}$ dhe një polinom prej $\cos\gamma$ të shkallës së l-të. Këto polinome quhen polinome të Lezhandrit.

Në fig. 89 OZ paraqet boshtin polar. Pika P i ka koordinatet r, ϑ, φ kurse pika A ku gjendet elementi i vëllimit të elektricitetit i ka koordinatet polare v, ϑ' dhe φ'. Në shprehjen (15) paraqiten r dhe v, por paraqitet edhe γ, e cila duhet të zëvendësohet me këndet polare. Tregohet, gjithashtu, në matematikë se kjo kryhet me ndihmën e shprehjes:

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{l,m}(\vartheta', \varphi') \cdot Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) \qquad (16)$$

Këtu paraqiten funksionet speciale prej ϑ dhe φ. I quajmë harmonik sferik. Këtu funksione për indekset më të ulët shprehen në formën:

$$l=0 \qquad Y_{o,o} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$l=1 \qquad Y_{1,o} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta$$

$$Y_{1,\pm 1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\ \sin\vartheta\ e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\right) \tag{17}$$

$l = 2$

$$Y_{2,\pm 1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\ \sin\vartheta\cos\vartheta\ e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_{2,\pm 2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\ \sin^2 e^{\pm 2i\varphi}$$

Zëvendësojmë (16) në (15):

$$\frac{1}{u} = \sum_{l=o}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\ \frac{v^l}{r^{l+1}}\ Y^*_{l,m}(\vartheta',\varphi')\cdot Y_{l,m}(\vartheta,\varphi) \tag{18}$$

Kësisoji e kemi zhvilluar $1/u$ në seri sipas harmonikëve sferikë. Nga (18) dhe (2) për potencial fitojmë:

$$V = k\sum_{l=o}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\ \frac{1}{r^{l+1}}\ Y_{l,m}(\vartheta,\varphi)\ \cdot$$

$$\cdot\int\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\ \rho(\vec{v})\ v^l Y^*_{l,m}(\vartheta',\varphi')\ d\tau \tag{19}$$

Integrimi duhet kryer nëpër vëllim në të cilin është i shpërndarë elektriciteti. Si rezultat i integrimit është konstantja:

$$Q_{l,m} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int\rho(\vec{v})\ v^l Y^*_{l,m}(\vartheta',\varphi')\ d\tau \tag{20}$$

ndërsa për potencial kemi shprehjen përfundimtare:

$$V = k\sum_{l=o}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\ \frac{1}{r^{l+1}}\ Q_{l,m}\cdot Y_{l,m}(\vartheta,\varphi) \tag{21}$$

Do të tregojmë se shprehja e fundit është identike me (13) të cilën e kemi fituar në koordinate kënddrejta.
Të marrim së pari anëtarin $l = 0$. Sipas (21) e ka formën:

$$V_1 = k\sqrt{4\pi}\ \frac{1}{r}\ Q_{o,o}Y_{o,o}$$

kurse nga (20) dhe (17):

$$Q_{o,o} = \sqrt{4\pi} \int \rho \frac{1}{\sqrt{4\pi}} d\tau = \int \rho d\tau = q$$

dhe meqë $Y_{o,o} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ fitojmë:

$$V_1 = k \frac{b}{r}$$

e ky është anëtari i parë i shprehjes (13).

Për anëtarin e dytë duhet të marrim $l = 1$. Për këtë duhet t'i mbledhim tre anëtarët për tri mundësitë e vlerës m. Këto janë -1, 0 dhe 1, prandaj ky anëtar shprehet kësisoji:

$$V_2 = k \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{1}{r^2} (Q_{1,o} \cdot Y_{1,o} + Q_{1,1} \cdot Y_{1,1} + Q_{1,-1} \cdot Y_{1,-1})$$

Nga tabela (17) kemi:

$$Y_{1,o} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r}$$

dhe anëtari i parë e ka formën:

$$k \frac{Q_{1,o} \cdot z}{r^3}$$

Pastaj sipas (20):

$$Q_{1,o} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int \rho \sqrt{\frac{3}{4\pi}} v \cos\vartheta' d\tau = \int \rho\zeta \, d\tau = m_z$$

ose

$$\frac{km_z \cdot z}{r^3}$$

që paraqet komponenten e dipolit në kahje të boshtit z.

Do të tregojmë se edhe dy anëtarët tjerë japin komponentet e dipolit në kahje të x dhe y:

$$Q_{1,1} = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int \rho v \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta' e^{-i\varphi'} d\tau = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \rho v \sin\vartheta' (\cos\varphi' -$$

$$- i \sin\varphi') d\tau = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \rho(\xi - i\eta) d\tau = -\frac{1}{\sqrt{2}} (m_x - i m_y)$$

Në mënyrë të ngjashme fitojmë:

$$Q_{1,-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(m_x + i\,m_y)$$

Pastaj kemi:

$$\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\, e^{i\varphi} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{r}(r\sin\vartheta\cos\varphi +$$

$$+\, i\, r\sin\vartheta\sin\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{r}(x + i\,y)$$

dhe në mënyrë të ngjashme:

$$\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,Y_{1,-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{r}(x - i\,y)$$

kurse për shumë të të dy anëtarëve kemi:

$$\sqrt{\frac{4\pi}{3}}(Q_{1,1}Y_{1,1} + Q_{1,-1}Y_{1,-1}) = \frac{1}{2r}[(m_x - i\,m_y)(x + i\,y) +$$

$$+\,(m_x + i\,m_y)(x - i\,y)] = \frac{1}{r}(x\,m_x + y\,m_y)$$

Shuma e tre anëtarëve na jep shprehjen për potencial të dipolit elektrik:

$$V_2 = k\,\frac{1}{r^3}(x\,m_x + y\,m_y + z\,m_z) = k\,\frac{\vec{m}\,\vec{r}}{r^3}$$

Në mënyrë të ngjashme, pas njehsimit mjaft të gjatë, mund të tregohet se anëtari i tretë është identik me potencialin e kuadrupolit elektrik dhe kështu me radhë për multipolet e larta.

14. KAPACITETI I KONDENSATORËVE

Kondensator quajmë kombinimin e dy përcjellësve të cilët gjenden njëri afër tjetrit. Këta kanë potencial të ndryshëm, ashtu që njëri prej tyre ngarkohet me elektricitet q, kurse tjetri lidhet me Tokën, pra vazhdimisht e ka potencialin e Tokës V_1. Le të ketë përcjellësi i ngarkuar potencialin V_2 dhe për kondensator e përkufizojmë kapacitetin si marrëdhënie të sasisë së elektricitetit dhe tensionit të shprehur në formën:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} \tag{1}$$

Kapaciteti i kondensatorëve varet nga forma gjeometrike e tyre, kurse ne do të njehsojmë kapacitetin për tri forma themelore: për kondensatorë të rrafshët, sferikë dhe cilindrikë.

a) Kondensatori i rrafshët

Kondensatori i rrafshët përbëhet prej dy pllakave përcjellëse të rrafshta të vendosura paralel njëra ndaj tjetrës. Supozojmë se këto kanë sipërfaqe të madhe S, ndërsa largësia në mes tyre është e vogël.

Origjinën e sistemit të koordinateve e vendosim në njërën pllakë me boshtin x normal ndaj sipërfaqes. Së pari do të përcaktojmë shpërndarjen e potencialit në mes të pllakave të kondensatorit. Fillojmë nga ekuacioni i Puasonit:

$$\triangle V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

dhe meqë në mes të pllakave nuk ka shpërndarje elektriciteti $\rho = 0$, kurse ekuacioni i Puasonit shndërrohet në atë të Laplasit:

$$\triangle V = 0$$

Nëse pllakat janë mjaft të mëdha ashtu që deformimi i fushës në afërsi të skajeve mund të mos përfillet, atëherë potenciali V varet vetëm nga ndryshorja x, kurse Laplasiani redukohet në:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0$$

Integrimi i parë është:

$$\frac{dV}{dx} = A \tag{2}$$

kurse i dyti:

$$V = A\,x + B \tag{3}$$

Shihet se potenciali është funksion linear i x dhe rrënja e tij përgjatë koordinates është konstante.

Nga $\vec{E} = -\,grad\,V$ rrjedh:

$$\frac{dV}{dx} = -E_x$$

Sipas (2) shohim se e vetmja komponente e fushës është konstante. Pra, fusha elektrike në mes të pllakave të kondensatorit të rrafshët është homogjene. Por, ky përfundim vlen vetëm në përafrim, sepse pllakat, megjithatë, nuk mund të jenë pambarime të mëdha. Përfundimi i ynë është më i arsyeshëm sa më e madhe të jetë sipërfaqja e pllakave në krahasim me largësinë në mes tyre.

Kemi treguar në (XII.4) se komponentja normale e fushës elektrike në afërsi të përcjellësit është:

$$E_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$

dhe

$$A = \frac{dV}{dx} = - E_x = - \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$

Në pllakë mjaft të madhe shpërndarja e elektricitetit është përafërsisht e njëtrajtshme dhe mund të shkruajmë:

$$\sigma = \frac{q}{S}$$

kurse konstantja e integrimit e ka vlerën:

$$A = - \frac{q}{\varepsilon_o S}$$

E zëvendësojmë në (3):

$$V = - \frac{q}{\varepsilon_o S} x + B$$

Pllaka e parë gjendet në vendin $x = 0$ dhe e ka potencialin:

$$V_1 = B$$

kurse tjetra gjendet në vendin $x = d$ dhe e ka potencialin V_2. Fitojmë:

$$V_2 = - \frac{qd}{\varepsilon_o S} + V_1$$

Ndryshimi i potencialeve është:

$$V_1 - V_2 = \frac{qd}{\varepsilon_o S} \tag{4}$$

ndërsa kapaciteti fitohet nga (1):

$$C = \varepsilon_o \frac{S}{d} \tag{4}$$

ku d paraqet largësinë në mes të pllakave. Shprehja e fundit tregon se kapaciteti i kondensatorit të rrafshët është proporcional me sipërfaqen e pllakës dhe proporcional i zhdrejtë me largësinë në mes tyre.

b) Kondensatori sferik

Ky kondensator përbëhet prej dy sferave koncentrike. Le të jenë rrezet e tyre r_1 dhe r_2. Edhe në këtë rast për potencial në mes të sferave vlen ekuacioni i Laplasit:

$$\triangle V = 0$$

Meqë kemi simetri sferike, njehsimin do ta kryejmë në koordinate sferike me origjinë në qendër të sferave. Potenciali nuk varet prej ndryshoreve ϑ dhe φ, por vetëm prej largësisë r nga qendra e tyre, prandaj Laplasiani do të ketë formën:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

Pasi ta shumëzojmë me r^2, e integrojmë:

$$r^2 \frac{dV}{dr} = A$$

ose:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{A}{r^2} \tag{5}$$

E integrojmë edhe një herë:

$$V = - \frac{A}{r} + B \tag{6}$$

Nga (5) rrjedh:

$$\frac{A}{r^2} = \frac{dV}{dr} = - E_r$$

Vlera e saj në sipërfaqe të sferës me rreze r_1 është:

$$\frac{A}{r_1^2} = - E_{r1}$$

Sfera është përcjellës, prandaj komponentja normale e intensitetit të fushës është:

$$E_r = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$

ndërsa:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi r_1^2}$$

dhe

$$\frac{A}{r_1^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r_1^2} = -k\frac{q}{r_1^2}$$

E zëvendësojmë vlerën e fituar për konstante të integrimit në (6). Do të kemi:

$$V = k\frac{q}{r} + B$$

Në sferë me rreze r_1 potenciali është V_1, ndërsa në atë me rreze r_2 do të jetë V_2. Pra:

$$V_1 = k\frac{q}{r_1} + B$$

$$V_2 = k\frac{q}{r_2} + B$$

Për tension në mes të sferave fitojmë:

$$V_1 - V_2 = kq\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = kq\frac{r_1 - r_1}{r_1 r_2}$$

kurse për kapacitet të këtij kondensatori:

$$C = \frac{1}{k}\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \qquad (7)$$

Kjo është shprehje e saktë. Shohim se kapaciteti është proporcional i zhdrejtë me largësinë në mes të sferave $r_2 - r_1$.

Shprehjen e fituar mund ta shfrytëzojmë për përcaktimin e kapacitetit të një sfere. Njëra sferë fitohet kur rrezja e tjetrës tenton në pambarim. Nëse $r_2 \rightarrow \infty$ nga (7) kemi:

$$C = \frac{1}{k} \frac{r_1}{1 - \frac{r_1}{r_2}}$$

ose

$$C = \frac{1}{k} r_1 \tag{8}$$

Përfundojmë se kapaciteti i sferës së vetmuar është proporcional me rrezen e saj.

c) Kondensatori cilindrik

Ky kondensator përbëhet nga mbështjellësit e dy cilindrave njëboshtorë. Le të jenë rrezet e tyre r_1 dhe r_2 dhe gjatësia l. Do të supozojmë se gjatësia e cilindrave është mjaft e madhe në krahasim me largësinë ndërmjet tyre:

$$l \gg r_2 - r_1$$

Sikurse cilindrat të ishin pambarim të gjatë, potenciali i fushës do të varej vetëm prej largësisë nga boshti i tyre. Nëse kjo kondità kënaqet, do të paraqiten deformime të vogla të fushës vetëm në skaje të cilindrave.

Prapë fillojmë nga ekuacioni i Laplasit:

$$\triangle V = 0$$

i cili në koordinate cilindrike shprehet:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

Këtu është supozuar se potenciali varet vetëm prej r.

Integrali i parë na jep:

$$r \frac{dV}{dr} = A$$

ose:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{A}{r} \tag{9}$$

kurse i dyti:

$$V = A \cdot ln\, r + B \tag{10}$$

Në këtë shprehje mund të paraqesim komponenten radiale të intensitetit të fushës:

$$E_r = -\frac{A}{r}$$

Nëse në ndryshore r zëvendësojmë vlerën e rrezes r_1, atëherë gjendemi në sipërfaqe të cilindrit për të cilën komponentja normale e fushës është:

$$E_{r_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} = -\frac{A}{r_1}$$

Nëse supozojmë se shpërndarja e elektricitetit në sipërfaqe të cilindrit është homogjene e që është e realizuar sa më i gjatë të jetë cilindri, do të kemi:

$$\sigma = \frac{q}{2\pi r_1 l}$$

dhe

$$A = -\frac{q}{2\pi l \varepsilon_o} = -4\pi k \frac{q}{2\pi l} = -\frac{2kq}{l}$$

Prandaj:

$$V = -\frac{2kq}{l}\, ln\, r + B$$

Në sipërfaqe të cilindrave me rreze r_1 dhe r_2 potencialet janë të njohura V_1 dhe V_2, prandaj kemi:

$$V_1 = -\frac{2kq}{l}\, ln\, r_1 + B$$

$$V_2 = -\frac{2kq}{l}\, ln\, r_2 + B$$

Për tension në mes të cilindrave fitojmë shprehjen:

$$V_1 - V_2 = \frac{2kq}{l}\, ln\, \frac{r_2}{r_1}$$

dhe për kapacitet:

$$C = \frac{l}{2k\, ln\frac{r_2}{r_1}}$$

15. FUSHA ELEKTROSTATIKE NË IZOLATORË

a) Shprehjet themelore për fushë elektrostatike në izolatorë

Fusha elektrostatike mund të paraqitet jo vetëm në boshllëk, por edhe në mjedise jo përcjellëse. Këto mjedise shpesh quhen dielektrike. Për paraqitjen e teorisë së fushës elektrostatike në këto mjedise shfrytëzojmë të dhënën eksperimentale që tregon se forca e Kulonit në to është më e vogël se forca që do të paraqitej në boshllëk në të njëjtat kondita. Sa herë kjo forcë është më e vogël se forca përkatëse në boshllëk varet prej materialit të mjedisit në të cilin zhvillohet fusha. Ky numër është një konstante specifike e materialit jo përcjellës. E quajmë konstante dielektrike relative dhe do ta shënojmë me ε_i.

Ligji i Kulonit në mjedise të këtilla shprehet si vijon:

$$\vec{F} = \frac{k}{\varepsilon_i} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}_o \tag{1}$$

Kjo është e njëjta shprehje sikurse në boshllëk me të vetmin ndryshim se është pjesëtuar me konstanten relative dielektrike ε_i. Për këtë arsye edhe në shprehjen për fushë elektrike të sasisë pikësore të elektricitetit paraqitet faktori $1/\varepsilon_i$. Pra:

$$\vec{E} = \frac{k}{\varepsilon_i} \frac{q}{r^2} \vec{r}_o \tag{2}$$

Për njehsimin e fluksit nëpër element të sipërfaqes dS kemi pasur shprehjen:

$$d\Phi = E\, r^2\, d\Omega$$

Tani nga (2) rrjedh:

$$E\, r^2 = \frac{k}{\varepsilon_i}\, q$$

dhe për izolatorë kemi:

$$d\Phi = \frac{k}{\varepsilon_i}\, q\, d\Omega$$

Me integrim fitojmë fluksin nëpër sipërfaqe arbitrare:

$$\Phi = \frac{k}{\varepsilon_i}\, q\Omega \tag{3}$$

Nëse sipërfaqja është e mbyllur dhe burimi i fushës gjendet brenda saj $\Omega = 4\pi$ dhe fitojmë:

$$\Phi = \frac{4\pi k}{\varepsilon_i} q$$

E dimë se $4\pi k = 1/\varepsilon_o$, prandaj vlen:

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_o \varepsilon_i}$$

Në vend të prodhimit $\varepsilon_o \varepsilon_i$ do të paraqesim një simbol të ri:

$$\varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_i \tag{4}$$

i cili paraqet gjithashtu një konstante të materialit izolues dhe e quajmë konstante dielektrike absolute të izolatorit. Duke u bazuar në këtë, për fluks mund të shkruajmë:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon} \tag{5}$$

e cila paraqet shprehjen për teoremë të Gausit në izolator. Nëse e krahasojmë me shprehjen përkatëse në boshllëk, shohim se ndryshojnë vetëm për vlerë të konstantës dielektrike.

Në mënyrë të ngjashme sikurse për boshllëk mund të përfitojmë ekuacionin themelor diferencial për fushë elektrostatike në mjedis dielektriku. Do të kemi:

$$div\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{6}$$

Ndërsa kondita kufitare për komponenten normale të fushës në sipërfaqe të ngarkuar me elektricitet është:

$$\vec{n}_o \vec{E}_1 - \vec{n}_o \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{7}$$

Për potencial të fushës në izolator vlen ekuacioni i Puasonit:

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{8}$$

të cilin e fitojmë në (6) zëvendësojmë $\vec{E} = -\, grad\, V$.

b) Induksioni elektrik

Në shprehjet themelore të fushës elektrike në mjedise dielektrike (5), (6) dhe (7), në anën e djathtë, përveç madhësive karakteristike për burime të fushës, paraqiten edhe konstantet dielektrike të mje-

disit në të cilin zhvillohet ajo. Nëse dëshirojmë që në to të paraqiten vetëm madhësitë karakteristike për burime të fushës, duhet t'i shumëzojmë me ε. Atëherë në anën e majtë të tyre paraqitet prodhimi $\varepsilon \vec{E}$. Ky është gjithashtu një vektor i cili e ka të njëjtën kahje sikurse vektori i fushës $\vec{E}$, por është ε herë më intensiv. Këtë vektor:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \tag{9}$$

e quajmë vektor të induksionit elektrik, kurse me ndihmën e tij shprehjet (5), (6) dhe (7) i shkruajmë në formën:

$$\oint \vec{D}\, d\vec{S} = \rho \tag{10}$$

$$div\, \vec{D} = \rho \tag{11}$$

$$\vec{n}_o \vec{D}_1 - \vec{n}_o \vec{D}_2 = \sigma. \tag{12}$$

Nga të dhënat e paraqitura kuptojmë se fushën elektrike mund ta shprehim me ndihmën e dy vektorëve. Këta janë, vektori i fushës elektrike dhe vektori i fushës elektrike dhe vektori i induksionit elektrik $\vec{D}$. Intensiteti i fushës është forca me të cilën fusha vepron në elektricitetin $+1$, kurse induksioni elektrik është forcë me të cilën fusha vepron në elektricitetin $+\varepsilon$. Gjatë njehsimit me intensitet të fushës $\vec{E}$ paraqiten konstantet dielektrike të materialit në të cilin ajo zhvillohet. Përkundër kësaj, gjatë njehsimit me induksion elektrik $\vec{D}$ në shprehje nuk paraqiten konstantet e materialit. Te fushat statike këta dy vektorë ndryshojnë vetëm për faktorin ε, i cili paraqet konstante skalare dhe është krejt njësojë a kryhet njehsimi me vektorin $\vec{E}$ apo me vektorin $\vec{D}$. Siç do të shohim më vonë te fushat që ndryshojnë gjatë kohës të dy vektortë paraqiten në shprehje, ndërsa te fushat të cilat ndërrojnë shumë shpejt ε nuk është konstante. Në anën tjetër ε ka karakter skalari vetëm në izolator izotrop. Në izolatorët antizotropë ε ka karakter tenzorial dhe vektorët $\vec{E}$ dhe $\vec{D}$ nuk e kanë të njëjtën kahje.

c) Konditat kufitare në kufij të dy izolatorëve

Në mjedise dielektrike kemi raste kur gjatë një sipërfaqe takohen dy izolatorë të ndryshëm. Këto sipërfaqe kufitare duhet të kenë ndikim në vektorët e fushës elektrike dhe induksionit elektrik. Do t'i përcaktojmë konditat kufitare në sipërfaqen e takimit të dy izolatorëve.

Fillojmë nga kondita kufitare (12) të cilën mund ta shkruajmë në formën:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma$$

dhe meqë në sipërfaqen e takimit nuk ka elektricitet, $\sigma = 0$ do të ngel:

$$D_{1n} = D_{2n} \qquad (13)$$

të cilën në formë vektoriale e shkruajmë:

$$\vec{n}_o \vec{D}_1 = \vec{n}_o \vec{D}_2$$

Këtë konditë mund ta shprehim me ndihmën e vektorëve të intensitetit të fushës. Në këtë formë shprehet:

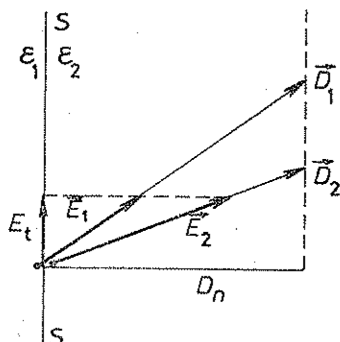


Fig. 90

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \qquad (14)$$

Së bashku me te vlen edhe kondita (XII.4.4) për komponente tangjenciale të fushës:

$$E_{1t} = E_{2t}$$

Shohim se në kufij të dy izolatorëve fusha elektrike kalon ashtu që komponentet tangjenciale të intensitetit të fushës mbesin të pandryshuara si dhe komponentet normale të induksionit elektrik.

Në fig. 90 është paraqitur me SS prerja e sipërfaqes së takimit të dy izolatorëve me konstante përkatëse dielektrike ε_1 dhe ε_2. Vektori i intensitetit të fushës pranë sipërfaqes kufitare në izolatorin e parë është $\vec{E}_1$. E zbërthejmë në komponenten tangjenciale dhe normale. Intensiteti i fushës në izolatorin e dytë është vektor i cili e ka të njëjtën komponente tangjenciale E_t, kurse atë normale të përcaktuar me (14). Në vizatim është shënuar me $\vec{E}_2$. Vektori i induksionit elektrik $\vec{D}_1$ në izolatorin e parë e ka kahjen e $\vec{E}_1$, por ε_1 herë intensitetin më të madh. Vektori $\vec{D}_2$ e ka kahjen e $\vec{E}_2$, por intensitetin e atillë që komponentja normale e tij është e barabartë me komponenten normale të vektorit $\vec{D}_1$. Pra, derisa mbarimet e vektorëve $\vec{E}_1$ dhe $\vec{E}_2$ qëndrojnë në të njëjtën normale në sipërfaqen kufitare, mbarimet e vektorëve $\vec{D}_1$ dhe $\vec{D}_2$ qëndrojnë në të njëjtën paralele me këtë sipërfaqe.

d) Polarizimi dielektrik

Mund të paraqesim pyetjen: Pse mjedisi dielektrik vepron në fushë elektrike? Që të përgjigjemi në këtë pyetje duhet të përkujtojmë se dielektriku përbëhet prej molekulave, ndërsa këto prej grimcave

elektrike, prej bërthamave pozitive të atomeve dhe grimcave negative, elektroneve. E dimë se molekulat kanë aq elektrone sa është elektrizimi pozitiv i bërthamës dhe si të tilla janë elektro neutrale. Shpërndarja e elektroneve në bërthamë mund të jetë e tillë ashtu që qendra e elektricitetit negativ të përputhet me qendrën e elektricitetit pozitiv. Në këtë rast ajo është plotësisht neutrale. Por, ka edhe molekula të disa izolatorëve te të cilat qendra e elektricitetit negativ nuk përputhet me atë të elektricitetit pozitiv. Këto molekula paraqesin dipole të vogla elektrike dhe i quajmë molekula polare. Edhe ky izolator nuk tregon veti elektrike jashtë fushës, sepse kahjet e dipoleve molekulare janë të shpërndara në mënyrë të parregullt nga lëvizja termike e molekulave.

Kur izolatori gjendet në fushë elektrike, atëherë në te paraqiten ndërrime. Nëse është i përbërë prej molekulave jopolare, fusha e jashtme vepron në grimca elektrike me forcë tërheqëse dhe dëbuese ashtu që molekula shndërrohet në dipol të vogël. Këto dipole të indukuara kësisoji i kanë kahjet e momenteve të dipoleve në kahje të fushës së jashtme elektrike. Nëse izolatori është i përbërë nga molekulat polare, fusha e jashtme i drejton momentet e tyre në kahje të vet. Në të dy rastet, kur izolatori gjendet në fushë elektrike, në të gjendet sistemi i dipoleve, momentet e të cilëve orientohen në kahje të fushës. Izolatori nuk zotëron sikurse trup neutral në këte fushë dhe themi se është polarizuar.

Izolatori i polarizuar përmban sistem të dipoleve elektrike, prandaj, përveç fushës së jashtme, duhet të merret në konsiderim edhe fusha e tyre.

Që të marrim në njehsim fushën e dipoleve, do të përkufizojmë vektorin e polarizimit $\vec{P}$. Ky është momenti dipolar i njësisë së vëllimit të dielektrikut. Vektori i polarizimit në përgjthësi ndërron si funksion i vendit, prandaj dielektrikun duhet ndarë në elemente të vogla të vëllimit $d\tau$. Momenti dipolar i këtij elementi të vëllimit është $\vec{P}\,d\tau$. Sipas shprehjes XII.10.6) kontributi i këtij elementi për potencial është $k\vec{P}\,grad_d \frac{1}{r}\,d\tau$. Nëse dëshirojmë të përcaktojmë potencialin e e të gjitha dipoleve, këtë duhet ta integrojmë nëpër vëllim të izolatorit. Pra:

$$V_p = k \int \vec{P}\,grad\,\frac{1}{r}\,d\tau$$

Integrimin mund ta zgjerojmë në të hapësirën pambarim të madhe, sepse ato pjesë të hapësirës të cilat nuk janë të të mbushura me izolator edhe ashtu nuk kontribuojnë asgjë, sepse $\vec{P} = 0$. Integralin do ta transferojmë duke shfrytëzuar shprehjen:

$$div\left(\vec{P}\frac{1}{r}\right)=\vec{P}\,grad\,\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\,div\,\vec{P}$$

dhe fitojmë:

$$V_p=k\int div\left(\vec{P}\frac{1}{r}\right)d\tau-k\int\frac{div\,\vec{P}}{r}\,d\tau$$

Integralin e parë e kthejmë në integral sipërfaqësor, duke shfrytëzuar teoremën e Gausit:

$$\int div\left(\vec{P}\frac{1}{r}\right)d\tau=\oint\vec{P}\,\frac{1}{r}\,d\vec{S}$$

Integrimi duhet kryer nëpër sipërfaqe e cila përfshin hapësirën pambarim të madhe, pra e integrojmë në sipërfaqe të sferës për $r\to\infty$. Meqë $1/r=0$, vlera e këtij integrali është e barabartë me zero. Pra:

$$V_p=-k\int\frac{div\,\vec{P}}{r}\,d\tau$$

Kjo shprehje na përkujton për potencial të elektricitetit të shpërndarë në vëllim, e cila e ka formën:

$$V=k\int\frac{r}{\tau}\,d\tau \qquad (15)$$

Prandaj dipolet në izolatorin e polarizuar e japin një fushë plotësuese e cila është ekuivalente me fushën e dendësisë së elektricitetit:

$$\rho_p=-\,div\,\vec{P} \qquad (16)$$

Pra, në izolatorë superpunohen dy fusha, e para nga shpërndarja e vërtetë e elektricitetit me dendësi ρ dhe e dyta nga dendësia e elektriciteteve ekuivalente ρ_p si rezultat i polarizimit të dielektrikut. Prandaj mund të marrim se dendësia totale e elektricitetit është $\rho+\rho_p$.

Ekuacioni themelor diferencial i fushës elektrostatike për këtë rast e ka formën:

$$div\,\vec{E}=\frac{\rho+\rho_p}{\varepsilon_o}$$

ose

$$div\,\varepsilon_o\vec{E}=\rho+\rho_p$$

I marrim në konsiderim shprehjet (11) dhe (16):

$$\rho=div\,\vec{D}$$

$$\rho_p = - \, div \, \vec{P}$$

dhe do të kemi:

$$div \, (\varepsilon_o \vec{E} - \vec{D} + \vec{P}) = 0$$

Kjo shprehje është e kënaqur identikisht, nëse vlen:

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_o \vec{E} \qquad (17)$$

E kemi fituar kështu shprehjen e cila polarizimin e dielektrikut e lidh me vektorin e induksionit dhe fushën elektrike.

Shfrytëzojmë (9) dhe për (17) do të fitojmë:

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_o) \, \vec{E} \qquad (18)$$

Shohim se polarizimi i dielektrikut është proporcional me fushën e cila e shkakton këtë. Faktori i proporcionalitetit $\varepsilon - \varepsilon_o$ varet vetëm prej materialit të dielektrikut dhe quhet susceptibilitet i tij.

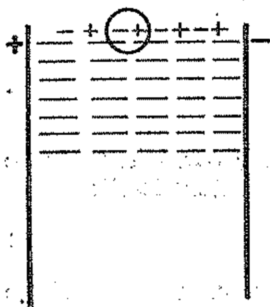


Fig. 91

Polarizimit dielektrik mund t'i japim edhe një kuptim tjetër fizik. Për këtë arsye e përcaktojmë sasinë e tërësishme të elektricitetit e cila paraqitet me polarizim. Kjo është:

$$\int \rho_p \, d\tau = - \int div \, \vec{P} \, d\tau$$

dhe pasi ta shndërrojmë në integral sipërfaqësor:

$$\int \rho_p \, d\tau = - \oint \vec{P} \, \vec{dS}$$

kuptojmë se në sipërfaqe të izolatorit paraqitet një elektricitet. Shprehja tregon se komponentja normale e vektorit $\vec{P}$ është e barabartë me dendësinë sipërfaqësore të këtij elektriciteti. Pra, komponentja e vektorit të polarizimit normale ndaj sipërfaqes së dielektrikut paraqet dendësinë sipërfaqësore të elektricitetit i cili rrjedh nga polarizimi i tij.

Fakti se shpërndarja hapësinore e sistemit të dipoleve është ekuivalente me dendësinë siprfaqësore të elektricitetit mund të kuptohet si vijon: Kur izolatori gjendet në fushë elektrike, molekulat e tij paraqesin dipole të orientuara. Në brendësi të tij, pranë polit negativ të një dipoli gjendet poli pozitiv i dipolit fqinj, sikurse tregon fig. 91. Veprimi i këtyre dy poleve anulohet. Por, ato pole të cilat gjenden në sipërfaqe të izolatorit nuk kanë pranë veti pole me të cilat do të anuloheshin, prandaj veprimi i tyre mbetet i atillë që në sipërfaqe paraqitet elektriciteti sipërfaqësor. Ky është rezultat i shpërndarjes vëllimore të dipoleve.

16. a) FORMULA E MOSOTI-KLAUSIUSIT

Të shqyrtojmë një dipol brenda izolatorit. Do të përcaktojmë veprimin e fushës në këtë dipol. Kuptohet, fusha që vepron në te dallohet nga fusha e jashtme $\vec{E}_o$, sepse në te, përveç kësaj fushe, vepron edhe fusha e dipoleve tjerë. Që të përcaktojmë veprimin e fushës së dipoleve në te, do të përshkruajmë rreth tij një sferë të vogël. Rrezja e saj le të jetë aq, sa që brenda saj të gjendet numër i madh i molekulave ashtu që për veprimin e tyre mund të marrim vlerën mesatare statistike. Do të përcaktojmë vlerën mesatare të forcës elektrike me të cilën dipolet brenda sferës veprojnë në dipolin e shqyrtuar.

Fushën elektrike të dipolit e përcaktojmë nga shprehja (XII.10.7) në të cilën prodhimin skalar do ta zhvillojmë sipas komponenteve:

$$E = \frac{k}{r^3}\left[\frac{3(x\,m_x+y\,m_y+z\,m_z)\,\vec{r}}{r^2} - \vec{m}\right]$$

E përcaktojmë njërën komponente të kësaj fushe:

$$E_x = \frac{k}{r^3}\left[\frac{3(x^2\,m_x+yx\,m_y+zx\,m_z)}{r^2} - m_x\right]$$

Vlera mesatare e kësaj komponente është:

$$\overline{E}_x = \frac{k}{r^3}\left[\frac{3(\overline{x^2}\,\overline{m_x}+\overline{yx}\,\overline{m_y}+\overline{zx}\,\overline{m_z})}{\overline{r^2}} - \overline{m_x}\right]$$

Për përcaktimin e vlerës mesatare të shprehjes në të cilën paraqiten koordinatet fillojmë nga formula:

$$\overline{x^2} + \overline{y^2} + \overline{z^2} = \overline{r^2}$$

Meqë asnjëra prej koordinateve nuk është e favorizuar, duhet pritur se vlen:

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2}$$

dhe fitojmë

$$\overline{x^2} = \frac{\overline{r^2}}{3}$$

Pastaj vlen:

$$\overline{xy} = \overline{xz} = \overline{yz} = 0$$

sepse çdo koordinate me të njëjtën bindje mund të ketë si vlera pozitive ashtu edhe vlera negative. Pasi t'i zvogëlojmë të gjitha këto, fitojmë:

$$\overline{E_x} = 0$$

Në mënyrë të ngjashme fitojmë edhe për komponente të tjera. Përfundojmë se dipolet brenda sferës nga shpërndarja statistike e tyre nuk kryejnë kurrfarë veprimi në dipolin e shqyrtuar. Prandaj në dipol të shqyrtuar veprojnë vetëm ato dipole të izolatorit të cilat gjinden jasht sferës. Nëse mendojmë se këto molekule brenda sferës i kemi larguar nga izolatori, sepse si të tilla nuk kanë kurrfarë ndikimi, mbetet izolatori në të cilin gjendet një zbraztësirë sferike. Dëshirojmë të përcaktojmë fushën në brendësi të kësaj zbraztësire.

b) Fusha në brendësi të zbraztësirës

Në izolator mjaft të madh gjendet zbraztësira e vogël në formë të sferës me rreze r. Fusha elektrike e polarizon izolatorin dhe në sipërfaqe të zbraztësirës paraqitet një elektricitet sipërfaqësor. Dendësia e tij sipërfaqësore është e barabartë me komponenten normale të polarizimit. Pra:

$$\sigma = P_n = P \cos\vartheta$$

këut me ϑ e kemi shënuar këndin në mes të kahjes së polarizimit përkatësisht fushës dhe kahjes së normales në sipërfaqe të zbraztësirës. E ndajmë sipërfaqen në elemente të vogla. Në njërin element dS gjendet elektriciteti $\sigma \, d\vec{S}$. Forca me të cilën ky elektricitet vepron në elektricitetin $+1$ në qendër të zbraztësirës sipas ligjit të Kulonit është:

$$d\vec{E} = k \, \frac{\sigma \, d\vec{S}}{r^2}$$

Komponentja e kësaj force në kahje të fushës së jashtme është:

$$dE = k \, \frac{\sigma \cos\vartheta \, dS}{r^2}$$

Komponentja e dytë normale në kahje të fushës së jashtme nuk është interesante, sepse në sferë për elementin e sipërfaqes dS ekziston elementi tjetër simetrik i cili do të japë komponenten normale të kundërt dhe që gjatë mbledhjes anulohen ndërmjet veti.

I mbledhim kontributet e të gjitha elementeve të sipërfaqes që të fitojmë fushën rezultuese:

$$\vec{E} = k \int \frac{\sigma \cos\vartheta \, dS}{r^2}$$

Elementi i sipërfaqes së sferës është:

$$dS = r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

dhe për σ zëvendësojmë vlerën $P \cos\vartheta$. Kështu fitojmë:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P \cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

Integrimi sipas ϑ është 2π, kurse integrimi sipas φ, 2/3. Përfundimisht fitojmë:

$$E = \frac{P}{3\varepsilon_o} \qquad (1)$$

Prandaj fusha e cila vepron në dipolin e shqyrtuar është e barabartë me shumën e fushës së jashtme E_o dhe fushës së përcaktuar me (1)

$$E = E_o + \frac{P}{3\varepsilon_o} \qquad (2)$$

c) Përfitimi i formulës së Mosoti-Klausiusit

Në fushë elektrike molekulet e izolatorit shndërrohen në dipole. Momenti i tyre i indukuar $\vec{p}$ me siguri është proporcional me fushën elektrike e cila e shkakton këtë polarizim. Prandaj, mund të shkruajmë:

$$\vec{p} = \alpha \vec{E} \qquad (3)$$

Faktori α është karakteristik për llojin e molekulave dhe quhet polarizibiliteti i tyre. Kur (3) e shumëzojmë me numrin e molekulave të njësisë së vëllimit të izolatorit fitojmë momentin e induktuar dipolar të njësisë së vëllimit të izolatorit, përkatësisht vektorin e polarizimit dielektrik. Pra:

$$\vec{P} = n\alpha \vec{E} \qquad (4)$$

Këtu nuk guxojmë ta marrim fushën elektrike të jashtme $\vec{E}_o$, por fushën efektive (2), sepse në çdo dipol veprojnë edhe dipolet tjerë të izolatorit. Pra:

$$\vec{P} = n\alpha \vec{E}_o + \frac{n\alpha}{3\,\varepsilon_o} \vec{P}$$

ose

$$\vec{P} \left(1 - \frac{n\alpha}{3\,\varepsilon_o}\right) = n\alpha \vec{E}_o$$

prej nga:

$$\vec{P} = \frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3\,\varepsilon_o}}\,\vec{E}_o$$

E krahasojmë këtë shprehje me shprehjen (XII. 15. 18) për lidhje në mes të polarizimit dhe fushës së jashtme:

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_o)\,\vec{E}_o$$

dhe gjejmë:

$$\varepsilon - \varepsilon = \frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3\,\varepsilon_o}}$$

$$\varepsilon - \varepsilon_o - \frac{n\alpha}{3\,\varepsilon_o}\,(\varepsilon - \varepsilon_o)\;\frac{n\alpha}{3\,\varepsilon_o}\;3\,\varepsilon_o$$

ose

$$\varepsilon - \varepsilon_o = \frac{n\alpha}{3\,\varepsilon_o}\,(3\,\varepsilon_o + \varepsilon - \varepsilon_o)$$

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_o}{\varepsilon + 2\,\varepsilon_o} = \frac{n\alpha}{3\,\varepsilon_o} \qquad (5)$$

Kjo shprehje e lidh një kombinim karakteristik të konstanteve dielektrike me polarizibilitetin e molekulave dhe numrin e tyre në njësi të vëllimit.

Në vend të numrit të molekulave në njësi të vëllimit ësntë më mirë të paraqesim numrin e molekulave në një mol, përkatësisht konstanten e Avogadrit A. Nëse masën e molit e shënojmë me M, kurse dendësinë si masë të njësisë së vëllimit me ρ, atëherë mund të paraqesim këtë marrëdhënie:

$$\rho : M = n : A$$

prej nga:

$$n = \frac{\rho A}{M}$$

kurse shprehjen (5) e paraqesim si vijon:

$$\frac{M}{\rho}\;\frac{\varepsilon - \varepsilon_o}{\varepsilon + 2\,\varepsilon_o} = \frac{A\alpha}{3\,\varepsilon_o} \qquad (6)$$

Kjo është formula e Mosoti-Klausiusit dhe shpreh polarizibilitetin e molekuleve me ndihmën e madhësive të cilat mund të maten.

17. TEORIA E DEBAIT PËR POLARIZIM

Supozojmë se izolatori përbëhet prej molekulave polare, pra prej molekulave të cilat e kanë momentin e dipolit $\vec{p}$ të caktuar. Izolatori si grumbull i këtyre molekuleve nuk është i polarizuar, sepse dipolet molekularë janë të shpërndarë në mënyrë të parregullt ashtu që rezultantja e tyre në njësi të vëllimit është e barabartë me zero. Kjo parregullsi e molekulave, përkatësisht e shpërndarjes së tyre paraqitet si rezultat i lëvizjes termike.

Kur izolatori i tillë gjendet në fushë elektrike, dipolet molekulare orientohen në kahje të saj. Këtij orientimi i kundërvehet parregullësia e shkaktuar nga lëvizja termike dhe do të arrihet një ekuilibrim në mes të këtyre dukurive, ashtu që një numër mesatar i molekulave të orientuara, do të jape rezultaten e polarizimit Kuptohet se ky polarizim varet prej temperaturës, sepse në tempraturë më të madhe lëvizja termike kaotike është më intensive dhe fusha mund të orientojë numër më të vogël të molekulave.

Do të njehsojmë polarizimin e izolatorit të gazët si rezultat të orientimit të dipoleve molekulare. Do të supozojmë se momentet dipolare të molekulave janë konstante. Boshtin x e vendosim në kahje të fushës së jashtme elektrike. Dipoli i cili me boshtin x mbyll këndin ϑ në kahje të këtij boshti e ka komponenten e momentit të vet $p \cos\vartheta$. Le të ketë në njësi të vëllimit dn dipole të cilat janë të orientuara ashtu që me fushën të mbyllin këndin në mes të $\vartheta + d\vartheta$. Kontributi i këtyre molekulave për polarizim është:

$$dP = p \cos\vartheta \, dn \tag{1}$$

Dipoli elektrik në fushë e ka energjinë potenciale sipas (XII. 10, 8) të barabartë me:

$$U = -\vec{p}\,\vec{E} = -p\,E \cos\vartheta \tag{2}$$

Nga teoria kinetike e gazeve e dimë se numri i molekeve në njësi të vëllimit, të cilat e kanë energjinë U, shprehet në formën:

$$dn = Ce^{-U/kT} \sin\vartheta \, d\vartheta \tag{3}$$

ku: T paraqet temperaturën absolute të gazit. Që të përcaktojmë konstanten C, duhet të integrojmë sipas këndit ϑ nga 0 deri në π. Në këtë mënyrë fitojmë numrin e të gjitha molekulave në njësi të vëllimit:

$$n = C \int_0^\pi e^{-U/kT} \sin\vartheta \, d\vartheta$$

prej nga e fitojmë vlerën e konstantes C:

$$C = \frac{n}{\int_0^\pi e^{-U/kT} \sin\vartheta \, d\vartheta}$$

dhe për numër të molekulave kemi:

$$dn = \frac{n\, e^{-U/kT} \sin\vartheta\, d\vartheta}{\int_0^{\pi} e^{-U/kT} \sin\vartheta\, d\vartheta} \tag{4}$$

ndërsa shprehja për kontribut të polarizimit do të ketë formën:

$$dP = \frac{p\, n\, e^{-U/kT} \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta}{\int_0^{\pi} e^{-U/kT} \sin\vartheta\, d\vartheta} \tag{5}$$

Që të fitojmë polarizimin, duhet të integrojmë për të gjitha kahjet e këndeve. E zëvendësojmë shprehjen për energji:

$$P = p\, n\, \frac{\int_0^{\pi} e^{pE\cos\vartheta/kT} \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta}{\int_0^{\pi} e^{pE\cos\vartheta/kT} \sin\vartheta\, d\vartheta} \tag{6}$$

Për integrim më të lehtë të kësaj shprehje paraqesim këtë shkurtim shënimi:

$$\frac{p\, E}{k\, T} = a \tag{7}$$

dhe ndryshoren e re të pavarur:

$$z = \cos\vartheta$$

$$dz = - \sin\vartheta\, d\vartheta$$

kurse kufijtë e integrimit shndërrohen në: për $\vartheta = 0$, $z = 1$, ndërsa për $\vartheta = \pi$, $z = - 1$. Do të kemi:

$$P = p\, n\, \frac{\int_{-1}^{1} e^{az} z\, dz}{\int_{-1}^{1} e^{az}\, dz}$$

E kryejmë integrimin parcial në numërues:

$$\int_{-1}^{1} e^{az} z\, dz = z\, \frac{1}{a}\, e^{az} \Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{a} \int_{-1}^{1} e^{az}\, dz = \frac{2}{a}\, ch\, a - \frac{a}{1} \int_{-1}^{1} e^{az}\, dz$$

ose

$$P = pn\left(\frac{\frac{2}{a}\,ch\,a}{\int\limits_{-1} e^{az}\,dz} - \frac{1}{a}\right)$$

Integrali në emërues është:

$$\int\limits_{-1}^{1} e^{az}\,dz = \frac{1}{a}\left(e^{a} - e^{-a}\right) = \frac{2}{a}\,sh\,a$$

Përfundimisht për polarizim fitojmë:

$$P = pn\,(cth\,a - 1/a) \tag{8}$$

Kjo është formula e Debait për polarizim të dielektrikut si rezultat i orientimit të dipoleve molekulare.

Nëse fusha elektrike nuk është mjaft e fuqishme dhe temperatura mjaft e lartë, atëherë në (7) madhësia a është mjaft e vogël. Në këtë rast funksionin $cth\,a$ mund ta zhvillojmë në seri, duke mospërfillur anëtarët e shkallës së lartë. Fitojmë:

$$cth\,a = \frac{1}{a} + \frac{1}{3}\,a + \ldots$$

dhe nga (8) do të kemi:

$$P = \frac{pn}{3}\,a = \frac{np^2}{3\,kT}\,E \tag{9}$$

Shohim se polarizimi i dielektrikut i cili paraqitet si rezultat i orientimit të dipoleve molekulare është proporcionalisht i zhdrejtë me temperaturën absolute, sikurse edhe është dashur të pritej.

Sipas shprehjes (XII. 16. 4) për polarizibilitet nga orientimi i dipoleve fitojmë:

$$\alpha_p = \frac{p^2}{3\,kT} \tag{10}$$

Në njehsimin e deritanishëm kemi supozuar se momentet dipolare të molekulave janë të njëjta për çdo orientim. Ky është vetëm përafrim, sepse fusha elektrike me forcën e vet e zmadhon largësinë në mes të poleve të dipoleve. Për këtë arsye edhe molekulat jo polare në fushë shndërrohen në molekula polare, përkatësisht në dipole. Forcat e brendshme molekulare i kundërvihen zmadhimit të largësisë në mes të po-

leve të dipoleve ashtu që arrihet ekuilibrim në mes të forcave elektrike dhe këtyre forcave. Njehsimi i forcave ndërmolekulare shqyrtohet në teorinë kuantike të molekulës, prandaj këtu do të kënaqemi me rezultatet e përafërta të njehsimit, sipas të cilit momentet dipolare të molekulave ndërrojnë proporcionalisht me fushën elektrike. Pra:

$$p = \beta E$$

dhe polarizibiliteti i molekulave si rezultat i deformimit të tyre përcaktohet me konstanten β e cila është e ndryshme për çdo lloj të molekulave. Polarizibiliteti total është i barabartë me shumën e këtyre dy polarizibiliteteve:

$$\alpha = \beta + \frac{p^2}{3\,kT} \tag{11}$$

Nëse izolatori përbëhet prej molekulave jopolare, atëherë $p = 0$ dhe ngel vetëm anëtari i parë.

Vlerën e fituar për polarizibilitet e zëvendësojmë në formulën e Mosoti-Klausiusit (XII. 16. 6):

$$\frac{M\,\varepsilon_o}{\rho}\,\frac{\varepsilon - \varepsilon_o}{\varepsilon + 2\,\varepsilon_o} = \frac{A}{3}\left(\beta + \frac{p^2}{3\,kT}\right) \tag{12}$$

Shënojmë shkurtimisht me:

$$y = \frac{M\,\varepsilon_o}{\rho}\,\frac{\varepsilon - \varepsilon_o}{\varepsilon + 2\,\varepsilon_o}$$

$$C = \frac{A\,p^2}{9\,k}$$

$$B = \frac{A\,\beta}{3}$$

dhe (12) e merr formën:

$$y = C\,\frac{1}{T} + B$$

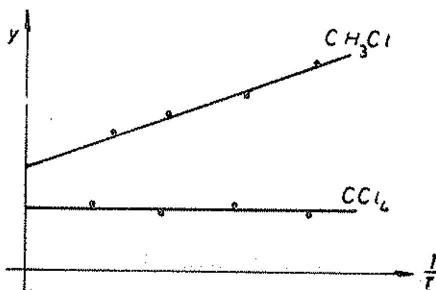


Fig. 92

Shohim se madhësia y është funksion linear i ndryshores $1/T$. Kjo mund të shfrytëzohet për vërtetimin eksperimental të teorisë. Duhet të matet konstantja dielektrike e gazit në temperatura të ndryshme. Nga rezultatet e fituara njehsohet vlera e funksionit y dhe vizatohet grafiku. Pikat e fituara duhet të qëndrojmë në drejtëz. Figura 92 tregon grafikët për pikat e përcaktuara të izolatorit $C\,Cl_4$ dhe CH_3Cl. Rezultatet tregojnë se matjet e pikave eksperimentale qëndrojnë rreth vi-

jës së drejtë, me çka edhe vërtetohet varshmëria lineare e funksionit y prej $1/T$. Në figurë janë zgjedhur dy shembuj tipikë. Drejtëza për $C\,Cl_4$ është paralele me boshtin e abshisës prej nga duhet të përfundojmë se $C = 0$, përkatësisht $p = 0$. Pra, molekulat e $C\,Cl_4$ janë jopolare. Këto jashtë fushës elektrike nuk kanë moment dipolar. Nga grafiku mund të përcaktohet B e nëpër mes të saj edhe β. Në këtë mënyrë përcaktohet polarizibiliteti i molekulave jopolare.

Në shembullin tjetër për CH_3Cl shohim se drejtëza e ka një pjerrësi ndaj boshtit të abshisës. Kjo tregon faktin se kemi të bëjmë me molekula polare. Koeficienti C i drejtimit të drejtëzës së fituar na bën të mundur njehsimin e momentit dipolar të molekulës.

Matjet eksperimentale për moment dipolar të molekulës së ujit (H_2O) kanë dhënë vlerën $p = 0{,}61 \cdot 10^{-29}$ $C\,m$, për molekulë të amoniakut (NH_3) $p = 0{,}48 \cdot 10^{-29}$ $C\,m$ etj. Dimensionet e këtyre matjeve plotësisht përgjigjen, sepse elektriciteti i poleve është i rendit të madhësisë së sasisë elementare të elektricitetit $10^{-19}\,C$ ndërsa largësia në mes të poleve është e rendit të madhësisë së molekulave $10^{-10}\,m$. Prodhimi i tyre paraqet momentin dipolar të molekulës i cili duhet të jetë i rendit të madhësisë 10^{-29} $C\,m$. Në fund duhet të përsërisim edhe një herë se kjo teori vlen për izolatorë të gazët, sepse vetëm në gaze është e lirë mundësia e orientimit të molekulave.

18. SFERA DIELEKTRIKE NË FUSHË HOMOGJENE ELEKTRIKE

a) Ekuacioni diferencial dhe kondität kufitare

Do të përcaktojmë fushën elektrike e cila paraqitet kur sfera e materialit dielektrik gjendet në fushën homogjene elektrike të jashtme me intensitet konstant $\vec{E}_o$. Do të vendosim boshtin z të sistemit të koordinateve në kahje të fushës së jashtme dhe mund të shkruajmë:

$$E_z = E_o$$

Potenciali i saj është:

$$V = -E_o\,z$$

sepse $E_z = -dV/dz$ që tregon se ky potencial me të vërtetë e shpreh këtë fushë. Në koordinate polare potenciali shprehet në formën:

$$V = -E_o\,r\cos\vartheta$$

Në këtë fushë homogjene e cila tërësisht është e mbushur me material dielektrik ε_2 e vendosim sferën me rreze a gjithashtu nga materiali dielektrik me konstante ε_1.

Potenciali i fushës i nënshtrohet ekuacionit diferencial të Laplasit

$$\triangle V = 0$$

sepse në hapësirën e shqyrtuar nuk ka elektricitet të shpërndarë.

Është më lehtë që njehsimin ta kryejmë në koordinate polare me origjinë në qendër të sferës dhe bosht polar në kahje të fushës së jashtme elektrike. Nga simetria ndaj këtij boshti potenciali V nuk varet prej koordinates φ, por vetëm nga r dhe ϑ. Për kët koordinate laplasiani e ka formën:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right)=0 \qquad (1)$$

Prandaj duhet të gjejmë një zgjidhje të këtij ekuacioni diferencial e cila duhet t'i kënaqë edhe kondiîtat kufitare të cilat po i paraqesim:

1. Fusha është homogjene, kurse vendosja e sferës në te shkakton deformim të saj. Është e qartë se ky deformim do të jetë më i vogël sa më larg sferës. Prandaj, në largësi të mëdha fusha duhet të mbetet homogjene për të cilën mund të shkruajmë:

$$r\to\infty \quad V=-E_o\,r\cos\partial \qquad (2)$$

2. Gjatë zgjidhjes së detyrës ne do të gjejmë potencialin e fushës, por duhet të dallojmë potencialin brenda sferës nga potenciali jashtë saj. Në sipërfaqe të sferës këto potenciale duhet të jenë të barabarta. Pra:

$$r=a \quad V_b=V_j \qquad (3)$$

3. Sipërfaqja e sferës është sipërfaqe kufitare e dy dielektrikëve. Kemi parë në (XII.15) se në sipërfaqe të këtillë komponentet normale të vektorëve të induksionit janë të barabartë. Meqë kahja e rrezes në sipërfaqe të sferës është normale, mund të shkruajmë:

$$D_{rb}=D_{rj}$$

ose

$$\varepsilon_1 E_{rb}=\varepsilon_2 E_{rj}$$

të cilat me ndihmën e potencialit i shprehim në formën:

$$r=a, \qquad \varepsilon_1\frac{\partial V_b}{\partial r}=\varepsilon_2\frac{\partial V_j}{\partial r} \qquad (4)$$

Kësisoji problemi është shtruar matematikisht.

b) Zgjidhja e problemit

Ekuacioni diferencial (1) është parcial, sepse varet prej dy ndryshoreve të pavarura r dhe ϑ. Do ta zgjidhim me metodën e ndarjes së ndryshoreve, prandaj zgjidhjen do ta paraqesim si prodhim të dy funksioneve, të cilat varen vetëm nga një ndryshore.

Pra:

$$V(r, \vartheta) = f(r) \cdot g(\vartheta) \qquad (5)$$

E zëvendësojmë në (1) dhe pjesëtojmë me $f \cdot g$:

$$\frac{1}{f} \frac{d}{dr} (r^2 f') = - \frac{1}{g \sin\vartheta} \frac{d}{d\vartheta} (\sin\vartheta\, g')$$

Me arsyetim të njëjtë sikurse në ekuacionet e ngjashme në mekanikë fitojmë dy ekuacione diferenciale:

$$\frac{d}{dr} (r^2 f') - c f = 0$$

$$\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{d}{d\vartheta} (\sin\vartheta\, g') + c g = 0$$

E zhvillojmë ekuacionin e dytë:

$$g'' + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} g' + c g = 0$$

Kuptojmë se këtë e zgjidh funksioni:

$$g(\vartheta) = \cos\vartheta \qquad (6)$$

nëse për c marrim vlerën 2. E zëvendësojmë në ekuacionin e parë:

$$\frac{d}{dr} (r^2 f') - 2f = 0$$

ose

$$r^2 f'' + 2rf' - 2f = 0$$

$$f'' + 2 \left(\frac{f'}{r} - \frac{f}{r^2} \right) = 0$$

Anëtarin e dytë mund ta shkruajmë si derivat të herësit:

$$f'' + 2 \frac{d}{dr} \left(\frac{f}{r} \right) = 0$$

E integrojmë:

$$f' + 2\,\frac{f}{r} = 3B$$

Konstanten e integrimit e kemi shënuar me $3B$ për lehtësim njehsimi. Shumëzojmë me r^2:

$$r^2 f' + 2r\,f = 3B\,r^2$$

ana e majtë e tij shprehet në formën:

$$\frac{d}{dr}\,(r^2 f) = 3B\,r^2$$

kurse integrimi na jep:

$$r^2 f = B\,r^3 + A$$

prej nga:

$$f = \frac{A}{r^2} + B\,r \tag{7}$$

E zëvendësojmë (6) dhe (7) në (5)

$$V = \left(\frac{A}{r^2} + B\,r\right)\cos\vartheta$$

Këtu duhet të bëjmë dallimin në mes të potencialit të fushës brenda sferës nga potenciali jashtë saj. Kuptohet se të dy potencialet i shpreh i njëjti funksion, por dallojnë në konstante të integrimit.

$$V_j = \left(\frac{A}{r^2} + B\,r\right)\cos\vartheta;\ r > a$$

$$V_b = \left(\frac{C}{r^2} + D\,r\right)\cos\vartheta;\ r < a$$

Për përcaktimin e konstanteve të integrimit shfrytëzojmë konditat kufitare. Fillojmë nga (1). Për $r \to \infty$ kemi:

$$-E_o\,r\cos\vartheta = B\,r\cos\vartheta$$

prej nga

$$B = -E_o$$

Për $r = 0$ $V_b \to \infty$ që fizikisht nuk ka kuptim prandaj për C marrim vlerën zero. Pas zëvendësimit të këtyre konstanteve fitojmë:

$$V_j = \left(\frac{A}{r^2} - E_b\, r\right) \cos\vartheta$$

$$V_b = D\, r \cos\vartheta$$

I shfrytëzojmë kondítat (3) dhe (4):

$$D\, a \cos\vartheta = \left(\frac{A}{a^2} - E_o\, a\right) \cos\vartheta$$

$$\varepsilon_1 D \cos\vartheta = \varepsilon_2 \left(- \frac{2A}{a^3} - E_o\right) \cos\vartheta$$

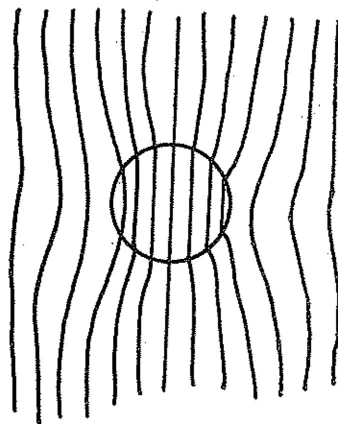


Fig. 93

Nga i pari rrjedh:

$$A = (D + E_o)\, a^3$$

dhe e zëvendësojmë në të dytin:

$$\varepsilon_1 D = \varepsilon_2(- 2D - 3E_o)$$

dhe fitojmë:

$$D = \frac{- 3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\, E_o$$

$$A = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\, a^3 E_o$$

Për potenciale fitojmë përfundimisht:

$$V_b = - \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\, E_o\, r \cos\vartheta \qquad (8)$$

$$V_j = \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \cdot \frac{a^3}{r^2} - r\right) E_o \cos\vartheta \qquad (9)$$

Do të përcaktojmë edhe intensitetin e fushës. Brenda sferës, nga $z = r \cos\vartheta$ kemi:

$$E_{bx} = E_{by} = 0$$

$$E_{bz} = \frac{3\,\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\, E_o \qquad (10)$$

që do të thotë se është konstante. Pra, fusha elektrike brenda sferës është homogjene. Kahja e saj përputhet me z, me kahjen e fushës homogjene e cila ka qenë para vendosjes së sferës në te.

Për fushë jashtë sferës fitojmë shprehje të ndërlikuar dhe nuk do ta përfitojmë. Në figurën 93 janë vizatuar vijat e forcës së kësaj fushe. Brenda sferës këto janë vija paralele. Gjithashtu, vijat janë paralele në largësi të madhe nga sfera. Këto janë të deformuara në afërsi të sferës sikurse tregon fig. 93.

c) Sfera dielektrike në boshllëk

Të shqyrtojmë rastin e veçantë, kur sfera dielektrike gjendet në boshllëk. Për këtë rast duhet të shkruajmë:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon \text{ dhe } \varepsilon_2 = \varepsilon_o$$

dhe për fushë brenda sferës fitojmë:

$$\vec{E} = \frac{3\varepsilon_o}{\varepsilon + 2\varepsilon_o} \vec{E}_o \tag{11}$$

Sfera në fushë të jashtme është polarizuar. Vektori i saj i polarizimit është:

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_o) \vec{E} = 3\varepsilon_o \frac{\varepsilon - \varepsilon_o}{\varepsilon + 2\varepsilon_o} \vec{E}_o \tag{12}$$

Nga ky polarizim në sferë paraqitet elektriciteti sipërfaqësor, dendësia e të cilit është:

$$\sigma = P_n = 3\varepsilon_o \frac{\varepsilon - \varepsilon_o}{\varepsilon + 2\varepsilon_o} E_o \cos\vartheta$$

Prandaj, në pole të sferës ky elektricitet është më i dendur, në gjerësi më të vogla zvogëlohet, ndërsa në ekuator nuk ka fare. Kuptojmë se sfera paraqet dipol elektrik me moment dipolar:

$$\vec{m} = \vec{p}\, V = \frac{1}{k} \frac{\varepsilon - \varepsilon_o}{\varepsilon + 2\varepsilon_o} a^3 \vec{E}_o$$

Fushën elektrike në sferë mund ta shprehim edhe me ndihmën e polarizimit. Nga (12) kemi:

$$\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_o} = \frac{\varepsilon + 2\varepsilon_o - 3\varepsilon_o}{\varepsilon + 2\varepsilon_o} \vec{E}_o = \vec{E}_o - \frac{3\varepsilon_o}{\varepsilon + 2\varepsilon_o} \vec{E}_o = \vec{E}_o - \vec{E}$$

pra:

$$\vec{E} = \vec{E}_o - \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_o} \tag{13}$$

Shihet se fusha në sferë dallon nga fusha e jashtme për madhësinë e cila është proporcionale me polarizimin.

Në mënyrë të ngjashme mund të shqyrtojmë rastin e zbraztësirës sferike në dielektrik. Për këtë rast duhet shënuar $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ dhe $\varepsilon_2 = \varepsilon$. Fitojmë shprehje të ngjashme në të cilat ε_0 dhe ε i ndërrojnë vendet e tyre.

19. ENERGJIA E FUSHËS ELEKTRIKE

Që të grumbullohet elektriciteti i cili është burim i fushës elektrike, duhet të kryejmë punë. Kjo punë në fushë është e shpërndarë si energji potenciale e saj. Që të përcaktojmë energjinë e fushës, duhet të njehsojmë punën të cilën e haxhojmë për formimin e saj.

Supozojmë se burim i fushës elektrike është elektriciteti vëllimor me dendësi të njohur ρ dhe elektriciteti sipërfaqësor σ me dendësi sipërfaqësore të njohur. Potencialin e saj e shënojmë me V. Për formimin e fushës duhet në hapësirë t'i vendosim burimet e saj. Menjëherë si të vendosim një sasi të vogël të elektricitetit, kjo e formon fushën e vet dhe bartja e sasive të reja të tij është e lidhur me zotërimin e forcave dëbuese të sasisë së përparshme, përkatësisht me harxhimin e punës.

Do të supozojmë se për ndërtimin e fushës elektricitetin e bartim njëtrajtësisht ashtu që në çdo kohë dhe në të gjitha vendet e kemi të njëjtën pjesë të sasisë së tij. Këtë pjesë do ta shënojmë me α ashtu që vlen $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Vlerat momentale të dendësive të elektricitetit janë:

$$\rho' = \alpha\rho \quad \text{dhe} \quad \sigma' = \alpha\sigma$$

kurse vlera momentale e potencialit është:

$$V' = \alpha V$$

Në këtë gjendje do të bartim sasinë e elektricitetit dq dhe do ta shpërndajmë ashtu që pjesa e fundme e shpërndarjes të zmadhohet për $d\alpha$. Sasia e elektricitetit e bartur në elementin e vëllimit $d\tau$ dhe në elementin e sipërfaqes dS është:

$$dq = d\rho' d\tau + d\sigma' dS = \rho d\tau\, d\alpha + \sigma dS\, d\alpha$$

Gjatë bartjes së kësaj sasie të elektricitetit duhet të kryejmë punë $V' dq$, sepse V' është puna të cilën e kryejmë gjatë bartjes së elektricitetit $+1$. Pra, kjo punë elementare është:

$$\alpha V(\rho d\tau d\alpha + \sigma dS\, d\alpha) = \alpha d\alpha\, (V\rho\, d\tau + V\sigma\, dS)$$

Që të fitojmë punën për bartjen e elektricitetit në tërë hapësirën, këtë duhet ta integrojmë nëpër vëllim në të cilin është i shpërndarë elektriciteti dhe nëpër të gjitha sipërfaqet në të cilat gjendet. Fitojmë:

$$\alpha d\alpha (\int V\rho \, d\tau + \int V\sigma \, dS)$$

Ndërsa për përfitimin e punës së tërë fushës, këtë duhet ta integrojmë edhe sipas α,

$$W = \int_0^1 \alpha d\alpha (\int V\rho \, d\tau + \int V\sigma \, dS)$$

Integrimi sipas α është 1/2, prandaj:

$$W = \frac{1}{2} \int V\rho \, d\tau + \frac{1}{2} \int V\sigma \, dS \qquad (1)$$

Në këtë mënyrë energjia e fushës është shprehur me ndihmën e potencialit dhe madhësive karakteristike për burime të saj. Do të tentojmë që ta shprehim me ndihmën e madhësive karakteristike të fushës. Sipas shprehjeve (XII.15.11) dhe (XII.15.12) për sipërfaqe përcjellëse te të cilat është $D_1 = 0$ kemi:

$$\rho = div \vec{D} \quad \text{dhe} \quad \sigma = - \vec{D} \vec{n}_o$$

Zëvendësojmë në (1):

$$W = \frac{1}{2} \int V \, div \vec{D} \, d\tau - \frac{1}{2} \int V \vec{D} \vec{n}_o \, dS$$

Integralin e dytë e shndërrojmë në integral vëllimor:

$$\int V \vec{D} \vec{n}_o \, dS = \int (V \vec{D}) \, d\vec{S} = \int div (V \vec{D}) \, d\tau =$$

$$= \int (V \, div \vec{D} + \vec{D} \, grad \, V) \, d\tau$$

dhe fitojmë:

$$W = \frac{1}{2} \int V \, div \vec{D} \, d\tau - \frac{1}{2} \int V \, div \vec{D} \, d\tau - \frac{1}{2} \int \vec{D} \, grad \, V \, d\tau$$

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{D} (- grad \, V) \, d\tau$$

Nga shprehja:

$$\vec{E} = - grad \, V$$

fitojmë përfundimisht:

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{D}\,\vec{E}\,d\tau \tag{2}$$

Kjo është shprehja për energji e paraqitur me ndihmën e vektorëve të cilët janë karakteristik për fushën. Mund të përfundojmë se dendësia e energjisë së fushës, pra energjia e njësisë së vëllimit, është:

$$\omega = \frac{1}{2}\,\vec{E}\,\vec{D} \tag{3}$$

ose

$$\omega = \frac{1}{2}\,\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\,\frac{D^2}{\varepsilon} \tag{4}$$

Shohim se dendësia e energjisë është funksion katror i vektorëve të fushës.

20. FORCAT NË FUSHË ELEKTROSTATIKE

Në fillim të përkufizimit të fushës elektrostatike e kemi paraqitur shprehjen (XIII.1.4) sipas së cilës forca me të cilën fusha vepron në elektricitet q është:

$$\vec{F} = q\,\vec{E}$$

prandaj fusha vepron në njësi të vëllimit në të cilën gjendet elektriciteti me forcën:

$$\vec{f} = \rho\,\vec{E} \tag{1}$$

Përveç kësaj force, paraqitet edhe një tjetër në vendet ku ndërron konstantja dielektrike. Do ta njehsojmë këtë forcë për njësi të vëllimit, duke supozuar se fusha elektrike është kontante.

Nëse me $\vec{f}$ e shënojmë forcën në njësi të vëllimit, atëherë kjo në tërë hapësirën e shqyrtuar është $\int f\,d\tau$. Të mendojmë se këtë element të vëllimit e kemi zhvendosur për $d\vec{r}$. Për këtë harxhojmë energji:

$$dW = -\,d\vec{r}\int \vec{f}\,d\tau$$

E dimë se ndërrimi i funksionit skalar shprehet në formën·

$$dW = grad\,W \cdot d\vec{r}$$

dhe nëse për energji e shkruajmë shprehjen (XII.19.2):

$$W = \frac{1}{2} \int \varepsilon E^2 d\tau$$

do të kemi:

$$grad \frac{1}{2} \int \varepsilon E^2 d\tau\, d\vec{r} = - d\vec{r} \int \vec{f} d\tau$$

Meqë zhvendosja $d\vec{r}$ është plotësisht arbitrare, ekuacioni do të kënaqet nëse edhe faktorët tjerë janë të barabartë. Pra:

$$\int \vec{f} d\tau = - \frac{1}{2} \int E^2 grad\, \varepsilon\, d\tau$$

prej nga fitojmë forcën:

$$\vec{f} = - \frac{1}{2} E^2 grad\, \varepsilon \qquad (2)$$

Shohim se kjo forcë paraqitet vetëm nëse ndryshon konstantja dielektrike e izolatorit. Kjo forcë e ka parashenjën minus, pa marrë parasysh kahjen e fushës, që do të thotë se është gjithmonë forcë tërheqëse.. Me këtë forcë mund të shpjegojmë eksperimentin themelor sipas të cilit trupi i elektrizuar dielektrik i tërheq grimcat e lehta të izolatorit. Në të vërtetë, fusha e trupit të elektrizuar vepron me forcë në sipërfaqe të izolatorit në të cilën paraqitet ndërrimi i konstantes dielektrike.

XIII. FUSHA MAGNETIKE E RRYMËS ELEKTRIKE

1. REKAPITULIM I PËRKUFIZIMEVE NGA KURSI I PËRGJITHSHËM

a) Intensiteti dhe dendësia e rrymës elektrike

Deri tash kemi shqyrtuar fushën statike elektrike. Burime të saj janë sasitë e elektricitetit në qetësi. E dimë se rëndësi shumë më të madhe ka elektriciteti në lëvizje, prandaj do t'i zgjerojmë dituritë tona për rastin e tij.

Lëvizjen e orientuar të elektricitetit në përcjellës e quajmë rrymë elektrike. Rrymat i dallojmë për nga intensiteti i tyre. Për intensitet të saj e përkufizojmë atë sasi të elektricitetit e cila në njësi të kohës kalon nëpër prerjen tërthore të përcjellësit. Nëse në kohën e shkurtër dt nëpër prerje të përcjellësit kalon elektriciteti dq, atëherë intensiteti i rrymës shprehet:

$$I = \frac{dq}{dt} \tag{1}$$

Në jetën e përditshme përcjellësit kanë formë të telave të hollë dhe të gjatë. Nëse prerja e tij është mjaft e vogël, themi se kemi rrymë vijore. Rryma vijore është përafrim, të cilës i afrohet rryma e vërtetë sa më i hollë të jetë përcjellësi në krahasim me gjatësine e vet.

Nëse prerja e përcjellësit është e madhe, nuk do të thotë që nëpër të gjitha pjesët e saj në njësi të kohës të kalojë e njëjta sasi e elektricitetit e as kahja e lëvizjes së elektricitetit në te të jetë e njëjtë. Që të marrim këtë në konsiderim, do të përkufizojmë dendësinë e rrymës elektrike. Si dendësi të rrymës elektrike përkufizojmë intensitetin e saj të njehsuar në njësi të sipërfaqes së prerjes tërthore. Pra:

$$j = \frac{dI}{dS} \tag{2}$$

Dendësinë e rrymës e mendojmë si madhësi vektoriale e cila e ka kahjen e përcaktuar me lëvizjen e elektricitetit pozitiv. Shprehja (2) e përcakton vetëm intensitetin e kësaj rryme.

Në këtë kapitull do të shqyrtojmë vetëm rrymat stacionare. Këto janë ato rryma, intensiteti i të cilave nuk varet prej kohës, pra në çdo kohë janë të barabarta.

Rrymat të cilat kalojnë nëpër përcjellës të gjerë i quajmë rryma hapësinore. Shpesh do të jetë e nevojshme që shprehjet për rrymë hapësinore t'i shndërrojmë në shprehje për rrymë vijore, prandaj do të paraqesim këtë kalim.

Ta mendojmë elementin e vogël të vëllimit $d\tau$ nëpër të cilin kalon rryma me dendësi $\vec{j}$. Meqë elementi i vëllimit gjithmonë mund të shprehet si prodhim i elementit të sipërfaqes dhe elementit të gjatësisë, do të kemi:

$$d\tau = d\vec{S}\, d\vec{l}$$

Prandaj prodhimi:

$$\vec{j}\, d\tau = \vec{j}\, d\vec{S}\, d\vec{l} = j\, dS\, d\vec{l}$$

sepse në rrymë vijore të tre vektorët e kanë të njëjtën kahje. Mirëpo, prodhimi $j\, dS$ paraqet intensitetin e rrymës vijore, nëse dS është i vogël. Do të kemi:

$$\vec{j}\, d\tau = I\, d\vec{l} \tag{3}$$

Pra, në shprehjet për rrymë hapësinore prodhimin $\vec{j}\, d\tau$ mund ta zëvendësojmë me $I\, d\vec{l}$ dhe të fitojmë shprehjen përkatëse për rrymë vijore.

b) Lidhja në mes të dendësisë së rrymës dhe intensitetit të fushës

Dihet se në përcjellës ekzistojnë bartësit e lirë të elektricitetit. Në përcjellës metalikë këto janë elektronet e lira, ndërsa në elektrolit, jonet. Këta bartës janë të shpërndarë njëtrajtësisht në përcjellës. Supozojmë se në njësi të vëllimit i kemi n të këtillë. Kur në ta nuk vepron kurrfarë force, atëherë lëvizin në mënyrë kaotike termike. Mirëpo, nëse në përcjellës paraqitet një fushë e vazhduar elektrike $\vec{E}$, atëherë nën ndikimin e saj bartësit e elektricitetit kryejnë lëvizje të orientuar ashtu që pozitivët lëvizin në kahje të fushës, kurse negativët në kahje të kundërt të saj. Nëse grimca e elektrizuar bart elektricitetin e, për dendësi do të kemi:

$$\rho = e \cdot n$$

Shpejtësia e lëvizjes së grimcave do të jetë e ndryshme, por ne do të njehsojmë me vlerën mesatare statistike të tyre $\vec{v}$. Të gjitha grimcat të cilat në njësi të kohës kalojnë nëpër njësi të sipërfaqes së prerjes tërthore gjenden në vëllimin e prizmit, lartësia e të cilit është e bara-

bartë me shpejtësinë mesatare. Pra, vëllimi i prizmit është $1 \cdot \vec{v}$. Sasinë e elektricitetit të bartur e gjejmë duke shumëzuar këtë vëllim me dendësinë e elektricitetit të cilin e përmban njësia e vëllimit. Meqë kjo sasi e elektricitetit është e barabartë me dendësinë e rrymës, mund të shkruajmë:

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \tag{4}$$

Ka ngel të përcaktohet shpejtësia mesatare e grimcave. Në trup të ngurtë elektronet e lira lëvizin në mes të joneve të rrjetës kristalore. Nën veprimin e fushës këta lëvizin në mënyrë të nxituar. Por, elektronet pas një kohe ndeshen me jonet e kësaj rrjete. Kësisoji ata e humbin një pjesë të energjisë së vet kinetike dhe vazhdojnë me shpejtësi të zvogëluar. Shpejtësia e tyre prapë do të rritet deri në ndeshjen e ardhshme me jone dhe kështu ky proces vazhdimisht përsëritet. Në elektrolit grimca e elektrizuar është joni i cili gjithashtu nxitohet në fushë, por edhe ky kohë pas kohe ndeshet me ndonjë molekulë dhe e zvogëlon shpejtësinë e lëvizjes. Molekula e goditur është neutrale dhe lëvizja e saj nuk i kontribuon rrymës elektrike. Pra, në të dy rastet grimca e elektrizuar pas goditjes fillon me një shpejtësi fillestare $\vec{v}_o$ dhe nxitohet me nxitim $\vec{a}$. Pas kohës t, grimca do të ketë shpejtësinë:

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}\, t$$

Nnxitimin e saj e shkakton fusha elektrike, prandaj vlenë:

$$m \vec{a} = e \vec{E}$$

prej nga:

$$\vec{a} = \frac{e}{m} \vec{E}$$

kurse shpejtësia:

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \frac{e\, t}{m} \vec{E}$$

Kohën mesatare në mes të dy goditjeve do ta shënojmë me 2τ dhe do ta njehsojmë shpejtësinë mesatare për këtë kohë. Meqë shpejtësitë fillestare $\vec{v}_o$ të grimcave të ndryeshme janë të orientuara në të gjitha kahjet dhe këto kahje njëtrajtësisht janë të shpërndara, do të jetë shpejtësia mesatare e tyre e barabartë me zero. Për njehsimin e vlerës mesatare ngel:

$$\vec{v} = \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \frac{eE}{m} t\, dt = \frac{1}{2\tau} \frac{eE}{m} \frac{t^2}{2} \Big|_0^{2\tau} = \frac{e\tau}{m} \vec{E}$$

ndërsa për dendësi të rrymës kemi:

$$\vec{j} = e n \frac{e\tau}{m} \vec{E} = \frac{e^2 n\tau}{m} \vec{E}$$

Shohim se dendësia e rrymës është proporcionale me intensitetin e fushës elektrike. Faktori i proporcionalitetit

$$\sigma = \frac{e^2 n\tau}{m}$$

varet vetëm prej vetive të përcjellësit. Paraqet një konstante specifike për përcjellësin dhe e quajmë përçueshmëri specifike. Me ndihmën e saj shprehjen e fituar e shkruajmë në formën:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \qquad (5)$$

që do na nevojitet në njehsimet e mëvonshme.

c) Ligji i Ohmit

Do të njehsojmë intensitetin e rrymës elektrike e cila rrjedh nëpër përcjellës me prerje tërthore S dhe gjatësi l. Supozojmë se prerja e telit është e vogël ashtu që në te dendësia e rrymës gjithkund është e njëjtë. Për intensitet kemi:

$$I = j S$$

dhe nga (5)

$$I = S \sigma E$$

Supozojmë se fusha elektrike është rezultat i tensionit U, i cili zotëron në skaje të telit. Tensioni paraqet punën e forcës së fushës elektrike në rrugë të barabartë me gjatësinë e telit. Pra: $U = E\, l$

ose
$$E = \frac{U}{l}$$

dhe për intensitet kemi:

$$I = \frac{\sigma S U}{l}$$

Shohim se rryma është proporcionale me tensionin. Faktori i proporcionalitetit varet prej dimensioneve dhe vetive elektrike të telit. Vlera reciproke e këtij faktori quhet rezistencë e telit:

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S} \tag{6}$$

Faktori $\frac{1}{\sigma}$ quhet rezistencë specifike e materialit. Pasi ta zëvendësojmë vlerën e rezistencës në shprehjen për intensitet, fitojmë:

$$I = \frac{U}{R} \tag{7}$$

e cila paraqet ligjin e Ohmit.

d) Energjia e rrymës elektrike

Le të zotërojë në skaje të përcjellsit tensioni U. Sipas përkufizimit të tij, ky paraqet punën e nevojshme që të bartet elektriciteti + 1 nëpër tel. Për bartjen e elektricitetit dq nevojitet puna:

$$dW = U\, dq$$

Kur këtë elektricitet e bart rryma I, mund të shkruajmë:

$$dq = I\, dt$$

dhe për energji fitojmë:

$$dW = U\, I\, dt$$

Kjo është energjia në kohë të shkurtër dt. Në kohë të fundme për te fitojmë:

$$W = \int U\, I\, dt \tag{8}$$

Në rryma të vazhduara U dhe I janë konstante dhe do të kemi:

$$W = U\, I\, t \tag{9}$$

e) Ligji i Xhulit

Kemi theksuar më parë se gjatë mekanizmit të përcjelljes së rrymës elektrike paraqitet goditja në mes të grimcave elektrike dhe neutrale. Gjatë këtij procesi grimcat neutrale vazhdimisht marrin energji

nga grimcat lëvizëse. Kjo energji e zmadhon lëvizjen e tyre kaotike dhe me këtë e ngrit edhe temperaturën e përcjellësit. Pra, kur rryma rrjedh nëpër përcjellës, ai nxehet dhe e liron këtë në ambientin përreth. Do të përcaktojmë nxehtësinë të cilën e zhvillon rryma në njësi të kohës dhe në njësi të vëllimit të përcjellësit.

E shënojmë me dQ sasinë e nxehtësisë të cilën gjatë kohës dt e zhvillon rryma në njësi të vëllimit. Në element të vëllimit $d\tau$ rryma e zhvillon energjinë $dQ \cdot d\tau$. Kjo është e barabartë me prodhimin e sasisë së elektricitetit dq dhe tensionit dU, i cili zotëron në skaje të elementit të vëllimit. Pra:

$$dQ \cdot d\tau = dq \cdot dU$$

E shprehim sasinë e elektricitetit me ndihmën e dendësisë:

$$dq = I\, dt = \vec{j}\, d\vec{S}\, dt$$

ndërsa tensionin me ndihmën e fushës:

$$dU = E\, d\vec{l}$$

Pra:

$$dQ\, d\tau = \vec{E}\, d\vec{l}\, \vec{j}\, d\vec{S}\, dt$$

Meqë: $d\tau = d\vec{S}\, d\vec{l}$

kemi:

$$dQ = \vec{j}\, \vec{E}\, dt$$

Në njësi të kohës zhvillohet sasia e nxehtësisë:

$$\frac{dQ}{dt} = \vec{j}\, \vec{E}$$

dhe me ndihmën e (5):

$$\frac{dQ}{dt} = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma} \tag{10}$$

Kjo shprehje tregon se nxehtësia e liruar është proporcionale me katrorin e intensitetit të fushës, përkatësisht me katrorin e dendësisë së rrymës.

2. FUSHA MAGNETIKE E RRYMËS ELEKTRIKE NË BOSHLLËK

a) Ekuacioni themelor diferencial

Elektriciteti në lëvizje të orientuar është burim i një fushe të forcës të cilën e quajmë fushë magnetike. Në hapësirë përreth rrymës elektrike formohet fusha magnetike.

Do të fillojmë nga eksperimenti themelor vijues. Kur nëpër tel të drejtë rrjedh rryma e intensitetit të caktuar dhe në rrafsh normal ndaj tij vendosim grimca të imta hekuri, shohim se këto shpërndahen në vija rrethore me qendër në vendin e depërtimit të përcjellësit në rrafsh. Këta rrathë paraqesin vijat e forcës së fushës magnetike të rrymës. Fusha magnetike ka karakter vektorial dhe do ta shënojmë me $\vec{H}$. Meqë vijat e kësaj fushe janë të mbyllura në vetvete, mund të kryejmë integrimin vijor të fushës gjatë vijës së këtillë të mbyllur. Pasi forca vazhdimisht vepron në kahje të integrimit, është e qartë se ky integral vijor nuk mund të jetë i barabartë me zero. Pra:

$$\oint \vec{H}\, d\vec{r} \neq 0$$

Fusha magnetike është rrjedhim i rrymës elektrike, prandaj duhet pritur se vlera e këtij integrali varet prej intensitetit të rrymës elektrike. Është treguar se në njësitë tona vlen:

$$\oint H\, d\vec{r} = I \tag{1}$$

Për rryma hapësinore duhet shkruar:

$$\oint \vec{H}\, d\vec{r} = \int \vec{j}\, d\vec{S}$$

Këtë integral mund ta shndërrojmë në formën diferenciale, duke e shndërruar integralin vijor sipas teoremës së Stoksit në integral sipërfaqësor:

$$\int rot\, \vec{H}\, d\vec{S} = \int \vec{j}\, d\vec{S}$$

Që kjo të kënaqet për të gjitha fushat dhe për të gjitha sipërfaqet, funkisonet nën integrale duhet të jenë të barabarta. Pra:

$$rot\, \vec{H} = \vec{j} \tag{2}$$

Ky është ekuacioni themelor diferencial i fushës magnetike të rrymave elektrike të vazhduara. Shprehja tregon se fusha magnetike është fushë shtjellore te e cila intensiteti i shtjellave është i pabarabartë me dendësinë e rrymës.

Meqë vijat e forcës së fushës magnetike janë të mbyllura, ato nuk kanë askund as fillim e as mbarim. Kjo do të thotë se fluksi i fushës magnetike nëpër ndonjë sipërfaqe të mbyllur është i barabartë me zero. Çdo vijë e forcës e cila hyn dikund në sipërfaqe duhet të dalë nga ajo. Pra:

$$\Phi = \oint \vec{H}\, d\vec{S} = 0$$

E shndërrojmë në integral vëllimor dhe do të kemi:

$$\int div\, \vec{H}\, d\tau = 0$$

prej nga nxjerrim përfundimin:

$$div\, \vec{H} = 0 \qquad (3)$$

Ky është ekuacioni i dytë themelor diferencial i fushës magnetike të rrymës elektrike. Ky tregon se fusha magnetike është fushë pa burime. Fushat shtjellore pa burime quhen fusha solenoidale. Përfundojmë se fusha magnetike e rrymës elektrike është shembull tipik i fushës vektoriale solenoidale.

b) Fusha magnetike e përcjellësit drejtvizor

Si shembull të njehsimit të fushës magnetike të rrymës elektrike do të marrim rastin e përcjellësit drejtvizor. Le të jetë intensiteti i rrymës I, kurse fushën dëshirojmë ta përcaktojmë në pikë të larguar për a nga përcjellësi. Në rrafshin normal ndaj kahjes së rrymës do ta vendosim rrethin me qendër në përcjellës i cili e ka rrezen a. Fusha magnetike ka kahje të tangjentes në këtë rreth, sepse vektori i fushës është gjithmonë tangjencial në vijë të forcës që në rastin tonë është identike me rrethin e shqyrtuar. Nga shprehja (1) kemi:

$$\oint H\, dr = I$$

sepse në këtë rast prodhimi skalar është i barabartë me prodhimin e intensiteteve. Për gjatë rrethit fusha magnetike gjithkund e ka të njejtin intensitet, prandaj H është konstant. Integrali i mbetur është i barabartë me perimetrin e rrethit. Fitojmë:

$$H\, 2a\pi = I$$

ose

$$H = \frac{1}{2\pi} \frac{I}{a} \qquad (4)$$

Kuptojmë se kjo fushë është proporcionale me rrymën, por proporcionalisht e zhdrejtë me largësinë e pikës nga rryma në të cilën e kërkojmë atë.

3. FUSHA MAGNETIKE NË MJEDISE

a) Induksioni magnetik

Në mjedise materiale fusha magnetike e burimeve të caktuara ndryshon nga fusha magnetike e burimeve të njëjtë në boshllëk. Ky ndryshim është rezultat i vetive magnetike të materialit.

E dimë se çdo material përbëhet prej molekulave dhe atomeve. Në atome elektronet lëvizin nëpër vija të vogla të mbyllura dhe paraqesin rryma të vogla elektrike. Sikurse do të tregojmë më vonë fusha magnetike e rrymës së mbyllur është ekuivalente me dipolin magnetik. Prandaj në materiale kemi numër të madh të dipoleve elementare magnetike.

Ekzistojnë dy lloje të molekulave. Molekulat e llojit të parë nuk kanë moment të dipolit magnetik, sepse elektronet në të lëvizin ashtu që rezultantja e të gjitha momenteve magnetike të elektroneve të molekulave është e barabartë me zero. Në llojin e dytë ekziston rezultantja e momenteve të dipoleve magnetike. Në materiale të këtilla momentet e dipoleve magnetike janë të shpërndara statistikisht dhe veprimi i tyre reciprok anulohet.

Kur ky material gjendet në fushë magnetike, kjo do të veprojë në dipolet elementare. Te molekulat të cilat nuk kanë moment dipoli fusha e jashtme e indukon momentin e tyre, duke i shndërruar në dipole. Në anën tjetër, te materialet e përbëra nga dipolet fusha e jashtme i orienton ashtu që veprimi i tyre reciprok nuk do të anulohet. Pra, në çdo rast materiali në fushë magnetike përbëhet prej sistemit të orientuar të dipoleve magnetike. Momenti dipolar i njësisë së vëllimit quhet magnetizim i materialit dhe do ta shënojmë me $\vec{M}$.

Me njehsim të ngjashëm, sikurse në elektrostatikë, mund të tregohet se fusha e të gjitha dipoleve është e barabartë me fushën të cilën e jep dendësia e magnetizimit:

$$\rho_m = -\, div\, \vec{M} \qquad (1)$$

Këtu duhet cekur se dendësia e magnetizimit është madhësi e cila përkufizohet në mënyrë të ngjashme me madhësinë përkatëse në elektrostatikë, me dendësinë e elektricitetit. Por, për derisa elektriciteti realisht ekziston dhe mund ta grumbullojmë në ndonjë pjesë të hapësirës, dendësia e magnetizimit është thjesht madhësi fiktive, madhësi për njehsim, sepse sasia e magnetizimit në natyrë nuk ekziston. Magnetizmi është vetëm dukuri përcjellëse e rrymës elektrike dhe nuk ekziston si veti e veçantë e materies. Megjithatë, është mirë të përdoret ky përkufizim fiktiv për dendësinë e magnetizmit i cili ka ngelur nga teoritë e vjetra, kur mendohej se realisht ekziston sepse me ndihmën e këtij përkufizimi mund të zhvillojmë ngjashmërinë e fushës magnetike me atë elektrostatike. Në këtë mënyrë do të shkurtojmë njehsimin dhe përfundimet.

Në mënyrë të ngjashme sikurse në elektrostatikë (shiko shprehjen XII.1.17) mund të përfitojmë shprehjen:

$$div\,\vec{H} = \frac{\rho_m}{\mu_o} \qquad (2)$$

Atje në shprehjen e cekur paraqitej konstantja e proporcionalitetit $1/\varepsilon_o$, kurse këtu do të marrim konstante tjetër që do ta shënojmë me $1/\mu_o$. Konstantja μ_o quhet permeabilitet i boshllëkut dhe e ka vlerën:

$$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{Vs}{Am} = 12{,}56 \cdot 10^{-7}\,\frac{Vs}{Am} \qquad (3)$$

Nga (1) dhe (2) fitojmë:

$$div\,\vec{H} = -\frac{1}{\mu_o}\,div\,\vec{M}$$

ose

$$div\,(\mu_o\vec{H} + \vec{M}) = 0$$

Shohim se kombinimi i vektorëve:

$$\mu_o\,\vec{H} + \vec{M} = \vec{B} \qquad (4)$$

është madhësi për të cilën

$$div\,\vec{B} = 0 \qquad (5)$$

pra, funksion vektorial fusha e të cilit nuk ka burime. Këtë funksion e quajmë induksion magnetik. Ky funksion vektorial është karakteristik për fushë magnetike. Shohim se në fushë magnetike i kemi dy funksione karakteristike vektoriale të cilat e përcaktojnë fushën. Këto janë: intensiteti i fushës magnetike $\vec{H}$ dhe induksioni magnetik $\vec{B}$.

Shprehja (5) është njëra prej ekuacioneve themelore diferenciale për induksion magnetik. Që të fitojmë edhe ekuacionin tjetër e kryejmë rotorin e shprehjes (4):

$$rot\,\vec{B} = \mu_o\,rot\,\vec{H} + rot\,\vec{M}$$

kurse nga (XIII.2.2) kemi:

$$rot\,\vec{B} = \mu_o\,\vec{j} + rot\,\vec{M} \qquad (5)$$

Ky është ekuacioni i dytë diferencial themelor për induksion magnetik.

Shprehja (4) është e ngjashme me (XII.15.17) në elektrostatikë dhe mund të përfundojmë se magnetizimi e ka të njëjtin rol sikurse polarizimi në elektrostatikë. Magnetizimi dhe polarizimi janë të përkufizuar njësoj dhe janë rrjedhim i veprimit të dipoleve elementare.

Në elektrostatikë polarizimi shprehej në mënyrë proporcionale me fushën që e shkaktonte atë. Edhe për fushë magnetike në mënyrë të ngjashme mund të shkruajmë:

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \tag{7}$$

Faktori i proporcionalitetit shpreh susceptibilitin magnetik të materialit. Eksperimentet tregojnë se kjo varshmëri e thjeshtë paraqitet te shumica e materialeve. Për ndryshim nga susceptibiliteti elektrik, i cili kishte vetëm vlera pozitive, tregohet se susceptibiliteti magnetik për disa materiale ka vlerë pozitive, ndërsa për disa tjerë ka vlerë negative sikurse do të shohim nga teoria e mëvonshme. Materialet, ndaj vetive të tyre magnetike, i ndajmë në paramagnetike dhe diamagnetike. Materialet paramagnetike e kanë susceptibilitetin pozitiv, ndërsa diamagnetike negativ.

Mjediset të cilat i kanë vetitë magnetike mjaft të theksuara nuk zotërojnë sipas shprehjes (9). I quajmë materiale ferromagnetike. Në këto susceptibiliteti është mjaft i madh dhe nuk është konstant, por në mënyrë asimtotike i afrohet vlerës te e cila paraqitet ngopja. Gjithashtu, varet nga rritja apo dobësimi i fushës magnetike. Gjatë dobësimit të fushës magnetizimi zvogëlohet ngadalë në krahasim me rritjen e tij gjatë zmadhimit të intensitetit të fushës. Dukuria quhet histerezis.

Nëse kufizohemi për materiale jo ferromagnetike për të cilat vlenë (7), atëherë shprehjen (4) mund ta shkruajmë:

$$\vec{B} = (\mu_o + \chi) \vec{H}$$

dhe nëse për konstante të re shkruajmë:

$$\mu = \mu_o + \chi \tag{8}$$

të cilën e quajmë permeabilitet të mjedisit. Do të kemi:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{9}$$

E kemi fituar shprehjen e cila është plotësisht e ngjashme me shprehjen (XII.15.9) në elektrostatikë.

Lehtë mund të gjejmë shprehjen e ngjashme me (XII.15.18). Mjafton që nga (8) të njehsojmë χ dhe ta zëvendësojmë në (7). Fitohet:

$$\vec{M} = (\mu - \mu_o) \vec{H} \tag{10}$$

Në grup të ferromagnetikëve bëjnë pjesë hekuri, kobalti, nikeli dhe disa toka të rralla, por edhe disa legura tregojnë veti të ngjashme. Këto materiale e kanë edhe një veti karakteristike. Kur materiali i këtillë vendoset në fushë magnetike të fuqishme dhe magnetizohet, ky do të ruajë vetitë magnetike edhe pasi të nxirret nga fusha, duke u shndërruar kësisoji në magnet të përhershëm.

c) Fusha magnetike e magnetëve të përhershëm

Në magnetët e përhershëm ngel një sasi e magnetizimit, por:

$$\vec{M} = const.$$

prandaj vlen:

$$rot\,\vec{M} = 0$$

Do të shqyrtojmë fushën magnetike e cila si burim e ka magnetin e përhershëm. Në këtë rast nuk ka rrymë, prandaj $\vec{j} = 0$. Duke u bazuar në këtë të dhënë, ekuacioni diferencial (6) e ka formën:

$$rot\,\vec{B} = 0$$

prej nga rrjedh:

$$rot\,\vec{H} = 0 \tag{11}$$

Përfundojmë se fusha e magnetëve të përhershëm është fushë pa shtjella dhe ekziston potenciali i saj φ, i cili me fushën lidhet me shprehjen:

$$\vec{H} = -\,grad\,\varphi \tag{12}$$

Pra, fusha e magnetëve të përhershëm qenka plotësisht e ngjashme me fushën elektrostatike. Në mënyrë të ngjashme sikurse në elektrostatikë edhe këtu mund të tregohet se magnetizimi interpretohet si dendësi sipërfaqësore e magnetizmit.

Të mendojmë magnetin në formë thupre. Në dy sipërfaqet e kundërta të cilat janë normale ndaj vektorit të magnetizimit paraqiten polet magnetike ashtu që tërë thupra vepron si dipol magnetik. Si intensitet të polit magnetik e përkufizojmë prodhimin e dendësisë së magnetizmit dhe të sipërfaqes së polit. Dendësia e magnetizmit paraqet intensitetin e magnetizimit $\sigma = M$ dhe nëse sipërfaqen e shënojmë me S për intensitet të polit kemi:

$$m = MS$$

Momenti dipolar i thuprës magnetike është:

$$\vec{P} = M\vec{\tau} = \vec{M}\,Sl = MS\,\vec{l} = m\,\vec{l}$$

Kemi fituar për rezultat se momenti dipolar i thuprës magnetike shprehet me prodhimin e intensitetit të polit dhe largësisë në mes të poleve. Ky është plotësisht në pajtim me përkufizimin e momentit dipolar.

4. MAGNETIZIMI SI RRJEDHIM I MIKRORRYMAVE

Ndryshimin në mes të fushës magnetike në mjedise dhe të njëjtës fushë në boshllëk e kemi shqyrtuar duke u bazuar në ngjashmërinë formale me rastet përkatëse në elektrostatikë. Tani, këtë ndryshim do ta shqyrtojmë më hallësisht. Mjedisi është i mbushur me atome në të cilat lëvizin elektronet. Këto paraqesin rryma elektrike rrethore, të cilat veprojnë si dipole të vogla magnetike. Fusha e jashtme magnetike vepron në këto dipole, prandaj për fushë të jashtme duhet të merret në konsiderim edhe fusha magnetike e rrymave molekulare. Ky veprim duhet të shprehet me madhësi makroskopike të cilat mund të maten. Për këto madhësi të cilat janë rrjedhim i proceseve molekulare duhet të marrim vlerën mesatare të tyre. Nëse me $\vec{j}_{mol}$ e shënojmë dendësinë e rrymave molekulare, atëherë mund të konstatojmë makroskopisht vetëm veprimin masatar të numrit të madh të molekulave si vlerë mesatare të dendësisë së rrymave $\overline{\vec{j}}_{mol}$. *Sipas rregullave matematike* vlera mesatare e të gjitha rrymave molekulare të cilat gjenden në vëllimin V njehsohet sipas shprehjes:

$$\overline{\vec{j}}_{mol} = \frac{1}{V}\int \vec{j}_{mol}\, d\tau$$

E dimë se rrymat molekulare si rrezultat i lëvizjes së elektroneve rreth bërthamës së atomit janë rryma vijore, prandaj në shprehje duhet të paraqesim këto rryma. Në fillim kemi theksuar se ky kalim kryhet me zëvendësimin:

$$\vec{j}\, d\tau = \mathrm{I}\, d\,\vec{l}$$

por, në rastin tonë duhet të mbledhim të gjitha rrugët e elektroneve në vëllim të shqyrtuar. Pra, do të kemi:

$$\overline{\vec{j}}_{mol} = \frac{1}{V}\int \mathrm{I}\,\Sigma\, d\,\vec{l}$$

Për përcaktimin e funksionit nën integral duhet të paraqesim ndonjë supozim për rryma molekulare. Për lehtësim shqyrtimi do të supozojmëse këto paraqesin rryma rrethore me rreze a. Kjo rrymë paraqet një fletë magnetike, pra një dipol të vogël magnetik me moment:

$$m = \mathrm{I}\, a^2 \pi$$

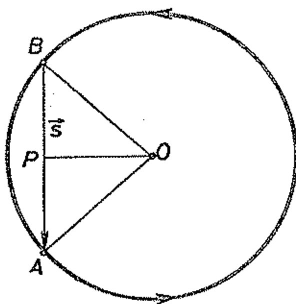


Fig. 94

Sikurse do të shohim në vazhdim do të biejnë madhësitë I dhe a, prandaj ky supozim i thjeshtë është i arsyeshëm, duke mos e kufizuar përgjithshmërinë e zgjidhjes.

Për të gjitha ato rryma rrethore të cilat gjenden brenda vëllimit të shqyrtuar vlen $\Sigma d\vec{l} = 0$,i sepse paraqesin vija të mbyllura të cilat përfundojnë aty ku kanë filluar. Por, kjo shumë nuk do të jetë e barabartë me zero për ato rryma rrethore sipërfaqja e të cilave e pret sipërfaqen kufitare të vëllimit V. Sikurse shihet nga fig. 94 brenda vëllimit gjendet vetëm pjesa e harkut rrethor në mes të pikave A dhe B. Shuma vektoriale e të gjitha harqeve është e barabartë me vektorin e tetivës BA të rrethit në të cilën sipërfaqja kufitare e pret rrethin. Madhësia e kësaj tetive është:

$$s = 2\sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2}$$

Kur nga qendra e rrethit e tërheqim normalen në sipërfaqen kufitare të vëllimit, kjo këtë e pret në pikën O' sikurse tregon fig. 95, e cila paraqet projeksionin e rrethit të fig. 94 nga ana. Largësinë në mes të pikave O dhe O' do ta shënojmë me x dhe nga trekëndëshi POO' do të kemi:

$$|x| = \overline{OP}\, sin\varphi$$

Kuptohet se kjo madhësi duhet të jetë:

$$|x| < a \sin\varphi$$

që rrethi ta pretë sipërfaqen kufitare të vëllimit. Meqë është:

$$\overline{OP} = \frac{|x|}{\sin\varphi}$$

mund të shkruajmë:

$$s = 2\sqrt{a^2 - \frac{x^2}{\sin^2\varphi}} = \frac{2\sqrt{a^2\sin^2\varphi - x^2}}{\sin\varphi}$$

Do ta shënojmë numrin e të gjitha rrymave rrethore në njësi të vëllimit, momenti magnetik i të cilave qëndron brenda këndit hapësinor $d\omega$ me $N(\omega)\,d\omega$. Numri i këtyre rrymave rrethore, të cilat e prejnë elementin e sipërfaqes dS dhe gjenden në shtresën për të cilën x lëviz në intervalin e vogël dx, do të jetë:

$$N(\omega)\,d\omega \cdot dS \cdot dx$$

Fig. 95

Këto rryma kontribuojnë për shumën e shqyrtuar me:

$$\mathrm{I}\,s\,N(\omega) \cdot d\omega \cdot dS \cdot dx = 2\mathrm{I}\;\frac{\sqrt{a^2 \sin^2\varphi - x^2}}{\sin\varphi}\;N(\omega)\,d\omega\,dSdx$$

Që të fitojmë kontributin e të gjitha rrymave molekulare, këto orientime duhet t'i integrojmë për të gjitha vlerat e x. Pra:

$$\mathrm{I}\,|\Sigma\,d\,\vec{l}|_{\omega} = 2\mathrm{I}\,N(\omega)\,d\omega dS \int\limits_{-a\sin\varphi}^{a\sin\varphi} \frac{\sqrt{a^2 \sin\varphi^2 - x^2}}{\sin\varphi}\,dx$$

Ky integral zgjidhet, duke zbatuar shprehjen:

$$\int \sqrt{b^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(b^2 \arcsin\frac{x}{b} + x\sqrt{b^2 - x^2}\right)$$

Pra:

$$\frac{1}{\sin\varphi}\int\limits_{-a\sin\varphi}^{a\sin\varphi} \sqrt{a^2 \sin^2\varphi - x^2}\,dx = \frac{1}{2\sin\varphi}\left[a^2 \sin^2\varphi\,\arcsin\frac{x}{a\sin\varphi} + \right.$$

$$\left. + x\sqrt{a^2 \sin^2\varphi - x^2}\right]\Bigg|_{-a\sin\varphi}^{a\sin\varphi} = \frac{1}{2\sin\varphi}\,a^2 \sin^2\varphi \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a^2\pi}{2}\,\sin\varphi$$

Prandaj do të kemi

$$\mathrm{I}\,|\Sigma d\,\vec{l}|_{\omega} = N(\omega)\,d\omega\,dS \cdot \mathrm{I} \cdot a^2\pi \sin\varphi = N(\omega)\,d\omega \cdot dS\,m \sin\varphi$$

sepse

$$m = \mathrm{I}\pi\,a^2$$

Prodhimi $dS \cdot m \cdot sin\varphi$ paraqet intensitetin e prodhimit vektorial $|d\vec{S} \times \vec{m}|$, meqë momenti magnetik qëndron normal ndaj sipërfaqes së rrethit dhe φ paraqet këndin të cilin e mbyllin vektorët $\vec{m}$ dhe normalja në element të sipërfaqes $d\vec{S}$. Pasi kahja e prodhimit vektorial përputhet me kahjen e vektorit $d\vec{S}$, mund të shkruajmë:

$$I|\Sigma d\vec{l}|_{\omega} = d\vec{S} \times \vec{m} \cdot N(\omega) d\omega$$

Këtë duhet ta integrojmë për të gjitha kahjet e momenteve magnetike, pra sipas ndryshores ω:

$$I\Sigma d\vec{l} = \int d\vec{S} \times \vec{m} \cdot N(\omega)\, d\omega = d\vec{S} \int \vec{m} N(\omega)\, d\omega$$

Shprehja:

$$\int \vec{m} \cdot N(\omega) d\omega = \vec{m} N$$

ku: N është numri i të gjitha molekulave në njësi të vëllimit, paraqet momentin total magnetik të njësisë së vëllimit të materialit. Kjo madhësi ka rëndësi themelore dhe e quajmë magnetizim të mjedisit.

$$\vec{M} = \vec{m} N$$

Pra:

$$I \Sigma d\vec{l} = d\vec{S} \times \vec{M}$$

Këtë duhet ta integrojmë sipas sipërfaqes e cila e mbyll elementin e vëllimit V. Pra:

$$\int I \Sigma d\vec{l} = \oint d\vec{S} \times \vec{M}$$

ose

$$\vec{j}_{mol} = \frac{1}{V} \oint d\vec{S} \times \vec{M}$$

Këtë integral e transferojmë me shprehjen e njohur nga analiza vektoriale. Le të jetë $\vec{a}$ ndonjë vektor konstant:

$$div(\vec{a} \times \vec{M}) = \vec{a}\, rot\, \vec{M} + \vec{M}\, rot\, \vec{a} = \vec{a}\, rot\, \vec{M}$$

sepse anëtari i dytë është i barabartë me zero, meqë $\vec{a} = const$. Pra, do të kemi:

$$\vec{a} \int rot\, \vec{M}\, d\tau = \int div\, (\vec{a} \times \vec{M})\, d\tau$$

Integralin e fundit e shndërrojmë në sipërfaqësore sipas teoremës së Gausit:

$$\vec{a} \int rot\, \vec{M}\, d\tau = \oint \vec{a} \times \vec{M}\, d\vec{S}$$

E dimë se vlen:

$$(\vec{a} \times \vec{M})\, d\vec{S} = (d\vec{S} \times \vec{M})\, \vec{a}$$

prandaj kemi:

$$\vec{a} \int rot\, \vec{M}\, d\tau = \vec{a} \oint d\vec{S} \times \vec{M}$$

ose

$$\oint d\vec{S} \times \vec{M} = \int rot\, \vec{M}\, d\tau$$

Nga shprehja e fundit fitojmë për dendësinë mesatare të rrymave molekulare:

$$\overline{\vec{j}}_{mol} = \frac{1}{V} \int rot\, \vec{M}\, d\tau$$

Mirëpo, $\frac{1}{V} \int rot\, \vec{M}\, d\tau$ paraqet vlerën mesatare të vektorit $rot\, \vec{M}$, prandaj, vlen:

$$\overline{\vec{j}}_{mol} = \overline{rot\, \vec{M}}$$

Pasi vlera mesatare e madhësive molekulare është madhësi makroskopike, fitojmë:

$$\vec{j}_{mol} = rot\, \vec{M} \qquad (1)$$

Kjo shprehje na tregon se magnetizimi në mjedise varet prej rrymave molekulare të tyre.

5. POTENCIALI VEKTORIAL

Fusha magnetike e rrymës elektrike është fushë shtjellore, dhe për te nuk mund të përkufizohet potenciali si funksion skalar, sepse siç e dimë kjo është e mundur vetëm te fushat pa shtjella. Por, megjithatë edhe për këto fusha është e mundur të gjendet një funksion vektorial

i cili në mënyrë të thjeshtë lidhet me burimet e fushës magnetike të rrymës elektrike. Ky funksion vektorial e kryen rolin e potencialit, prandaj e quajmë potencial vektorial.

E dimë se për induksion magnetik vlen shprehja (XIII.3.5)

$$div\,\vec{B} = 0$$

Gjithashtu, e dimë se divergjenca e rotorit të çdo funksioni vektorial identikisht është e barabartë me zero. Pandaj, vektorin $\vec{B}$ mund ta shprehim si rotor të ndonjë vektori të cilin do ta shënojmë me $\vec{A}$. Pra:

$$\vec{B} = rot\,\vec{A} \qquad (1)$$

Ky vektor i përkufizuar në këtë mënyrë quhet potencial vektorial i fushës magnetike. Nëse për ndonjë fushë e përcaktojmë këtë potencial, atëherë, duke shfrytëzuar (1), shumë lehtë mund ta gjejmë vektorin e induksionit të saj.

Ka ngelur të përcaktojmë shprehjen e cila potencialin vektorial e lidh me rrymë si burim të fushës magnetike. Fillojmë nga shprehja (XIII.2.2):

$$rot\,\vec{H} = \vec{j}$$

e shumëzojmë me μ dhe fitojmë:

$$rot\,\vec{B} = \mu\,\vec{j}$$

E zëvendësojmë potencialin vektorial (1):

$$rot\,rot\,\vec{A} = \mu\,\vec{j}$$

ose

$$grad\,div\,\vec{A} - \triangle\,\vec{A} = \mu\,\vec{j}$$

Me formulën e përkufizimit e kemi përcaktuar vetëm rotorin e potencialit vektorial, por divergjenca ka ngelur e papërcaktuar. Këtë mund ta marrim sipas dëshirës dhe që të fitojmë shprehje më të thjeshta do të marrim se vlen:

$$div\,\vec{A} = 0 \qquad (2)$$

prandaj fitojmë këtë ekuacion diferencial:

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{j} \quad (3)$$

Kuptojmë se edhe potenciali vektorial i nënshtrohet ekuacionit të Puasonit, të cilin e kemi përfituar për potencialin e fushës elektrostatike. Aty e ka pasur formën:

$$V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

dhe zgjidhja e tij ishte:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{\rho\, d\tau}{r}$$

Për potencial vektorial në vend të konstantes $1/\varepsilon_o$ qëndron konstantja μ, prandaj zgjidhja e tij do të jetë:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{j}\, d\tau}{r}$$

E shënojmë konstanten përpara integralit me:

$$k_m = \frac{\mu}{4\pi} \quad (4)$$

e cila në boshllëk e ka vlerën:

$$k_{om} = \frac{\mu_o}{4\pi} = 10^{-7} \frac{V s}{A m}$$

Duke shfrytëzuar konstanten e re për potencial vektorial fitojmë:

$$\vec{A} = k_m \int \frac{\vec{j}\, d\tau}{r} \quad (5)$$

Për rryma vijore sipas (XIII.1.3) kemi:

$$\vec{A} = k_m I \oint \frac{d\vec{l}}{r} \quad (6)$$

Në fund do të tregojmë se për fushë homogjene

$$\vec{B} = const.$$

potenciali vektorial e ka formën:

$$\vec{A} = -\frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{B}) \tag{7}$$

Saktësinë e saj e tregojmë duke kryer rotorin:

$$rot\,\vec{A} = -\frac{1}{2}\,rot\,(\vec{r} \times \vec{B})$$

E dimë nga analiza vektoriale se rotori i prodhimit vektorial e ka formën:

$$rot\,(\vec{r} \times \vec{B}) = \vec{r}\,div\,\vec{B} - \vec{B}\,div\,\vec{r} + (\vec{B}\nabla)\,\vec{r} - (\vec{r}\nabla)\,\vec{B}$$

Meqë vektori $\vec{B}$ është konstant, anëtari i parë dhe i fundit janë të barabartë me zero. Dy anëtarët tjerë i kanë vlerat:

$$(\vec{B}\nabla)\,\vec{r} = \vec{B} \quad \text{dhe} \quad div\,\vec{r} = 3$$

Prandaj:

$$rot\,(\vec{r} \times \vec{B}) = -2\,\vec{B}$$

dhe kënaqet kondita $\vec{B} = rot\,\vec{A}$.

6. FORMULA E BIO-SAVARIT

Kjo formulë na lidh drejtpërdrejt induksonin magnetik me rryma si burim të fushës.

Për potencial vektorial shfrytëzojmë shprehjen (XIII.5.5):

$$\vec{A} = k_m \int \frac{\vec{j}\,d\tau}{r}$$

ndërsa lidhja në mes të potencialit vektorial dhe induksionit magnetik shprehet në formën:

$$\vec{B} = rot\,\vec{A}$$

Nga shprehja e parë dhe e dytë fitohet:

$$\vec{B} = k_m \int rot\left(\frac{\vec{j}}{r}\right) d\tau$$

E zbërthejmë rotorin e prodhimit të vektorit me skalar:

$$rot\left(\frac{\vec{j}}{r}\right) = \frac{1}{r}\, rot\, \vec{j} + grad\, \frac{1}{r} \times \vec{j}$$

Anëtari i parë është i barabartë me zero, sepse për rryma të vazhduara $\vec{j}$ është konstant. Pasi të njehsojmë gradientin e $1/r$, do të kemi:

$$rot\left(\frac{\vec{j}}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\vec{r}_o \times \vec{j} = -\frac{\vec{r} \times \vec{j}}{r^3}$$

Prandaj vlen:

$$\vec{B} = -k_m \int \frac{\vec{r} \times \vec{j}}{r^3}\, d\tau \qquad (1)$$

Kjo është formula e Bio-Savarit. Për rryma vijore kjo e ka formën:

$$\vec{B} = k_m I \, \frac{d\,\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \qquad (2)$$

Edhe pse lidhja në mes të induksionit magnetik dhe rrymave si burime të fushës mund të shkruhet sipas (1) apo (2), megjithatë njehsimi i drejtpërdrejtë i fushës është mjaft i vështirë nga vetë forma e integralit. Vetëm te vijat e rregullta gjeometrike të rrymës integrimi është i lehtë dhe mund të kryhet.

a) Shembuj për zbatimin e formulës së Bio-Savarit

Do të tregojmë në dy shembujt vijues zbatimin e formulës së Bio-Savarit. Së pari do të përcaktojmë fushën magnetike në qendër të rrymës rrethore. Le të jetë rrezja e saj R. Në këtë rast elementi i harkut dl qëndron normal ndaj largësisë prej qendrës dhe shprehja (2) reduktohet në:

$$B = k_m I \int \frac{R\, dl}{R^3} = \frac{\mu}{4\pi}\, I\, \frac{1}{R^2}\, 2\pi R$$

ose

$$B = \frac{\mu}{2}\, \frac{I}{R} \qquad (3)$$

Shohim se induksioni magnetik është proporcional me intensitetin e rrymës, por proporcional i zhdrejtë me rrezen e rrymës rrethore. Nëse dëshirojmë të përcaktojmë këtë induksion në ndonjë pikë të boshtit

normal, i cili kalon nëpër qendër të rrethit, atëherë duhet të veprojmë si vijon. E shënojmë largësinë e pikës në të cilën dëshirojmë të përcaktojmë induksionin nga qendra e rrethit me u. Nga figura 96 shohim se vlen ky ekuacion vektorial:

$$\vec{r} = \vec{u} - \vec{R}$$

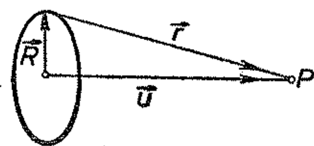


Fig. 96

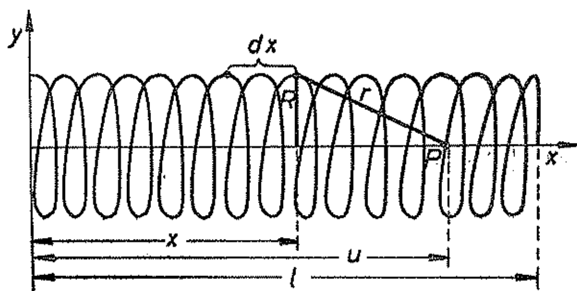


Fig. 97

E zëvendësojmë në formulë të Bio-Savarit dhe fitojmë:

$$\vec{B} = k_m I \left(\oint \frac{d\,\vec{l} \times \vec{u}}{r^3} - \oint \frac{d\,\vec{l} \times \vec{R}}{r^3} \right)$$

Integrali i parë është i barabartë me zero, sepse dy elemente simetrike të gjatësisë i kontribuojnë integralit me vlera të njëjta, por me parashenja të kundërta. Në integralin e dytë $d\,\vec{l}$ qendron normal ndaj $\vec{R}$, prandaj vlen $|d\,\vec{l} \times \vec{R}| = R\,dl$. Do të kemi:

$$\vec{B} = k_m I \oint \frac{R\,dl}{(R^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{\mu}{4\pi} I \frac{2R^2\pi}{(R^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{\mu}{2} I \frac{R^2}{(R^2 + u^2)^{3/2}} \quad (4)$$

Shohim se rasti i mëparshëm fitohet për $u = 0$.

Duke njohur këtë zgjidhje, mund të njehsojmë induksionin magnetik të fushës në bosht të ndonjë suste nëpër të cilën rrjedh rryma elektrike e vazhduar. Në këtë rast sustën mund ta mendojmë të përbërë prej n rrymave rrethore.

Do të vendosim boshtin x në bosht të sustës sikurse tregon figura 97. Do ta shënojmë me n numrin e vijave rrethore në njësi të gjatësisë. Në gjatësinë e vogël dx gjenden $n \cdot dx$ vija. Do ta vendosim origjinën e sistemit në fillim të sustës e cila e ka gjatësinë l. Fushën dëshirojmë ta përcaktojmë në një pikë të boshtit të sustës, p.sh. në pikën P, e cila e ka apshisën $x = u$. Kontributi i elementit dx për induksionin magnetik të fushës fitohet kur shprehjen (2) e shumëzojmë me numrin e vijave rrethore. Pra:

$$dB = \frac{\mu}{2} I \frac{R^2 n \, dx}{[R^2 + (u-x)^2]^{3/2}}$$

sepse $r = \sqrt{R^2 + (u-x)^2}$.

Për përfitimin e kontributit të të gjitha vijave rrethore këtë duhet ta integrojmë përgjatë gjatësisë së sustës. Pra:

$$B = \frac{\mu}{2} I R^2 n \int_0^l \frac{dx}{[R^2 + (u-x)^2]^{3/2}}$$

Integrimi kryhet me zëvendësim:

$$u - x = R \operatorname{tg}\varphi$$

$$\sqrt{R^2 + (u-x)^2} = R\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{R}{\cos\varphi} \quad \text{dhe} \quad dx = -\frac{R\,d\varphi}{\cos\varphi}$$

Pra:

$$J = \frac{dx}{[R^2 + (u-x)^2]^{3/2}} = -\frac{1}{R^2}\int \cos\varphi \, d\varphi = -\frac{1}{R^2} \sin\varphi = -$$

$$-\frac{1}{R^2} \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}}$$

ose

$$J = \frac{1}{R^2} \frac{x-u}{\sqrt{R^2 + (u-x)^2}}$$

Pasi t'i zëvendësojmë kufijtë, fitojmë:

$$B = \frac{\mu}{2} I n \left[\frac{l-u}{\sqrt{R^2 + (u-l)^2}} + \frac{u}{\sqrt{R + u^2}} \right] \tag{5}$$

Kjo shprehje e paraqet induksionin magnetik në çfarëdo pike të boshtit të sustës nëpër të cilën rrjedh rryma e vazhduar.

Në mes të sustës $u = \frac{l}{2}$ dhe do të kemi:

$$B_m = \mu I n l \frac{1}{\sqrt{4R^2 + l^2}} \tag{6}$$

ndërsa për skaje të saj $u = 0$ dhe $u = l$ fitohet:

$$B = \frac{\mu}{2} I n l \frac{1}{\sqrt{R^2 + l^2}} \tag{7}$$

Kahja e induksionit përputhet me kahjen e boshtit të sustës. Sikur susta të ishte pambarim e gjatë, atëherë çdo pikë të boshtit të saj mund ta mendojmë si mes dhe me kalimin kufitare të (6) fitohet për $l \to \infty$

$$B = \mu I n \tag{8}$$

Pra, është proporcional me intensitetin e rrymës dhe numrit të vijave të saj.

7. FUSHA MAGNETIKE E QARKUT TË MBYLLUR TË RRYMËS

Supopojmë se rryma elektrike rrjedh nëpër përcjellësin e mbyllur të formës arbitrare. Do të përcaktojmë induksionin magnetik të fushës së kësaj rryme në largësi të mëdha në krahasim me dimensionet e qarkut.

Potenciali vektorial i kësaj rryme përcaktohet me shprehjen (XIII.5.6):

$$\vec{A} = k_m I \int \frac{d\vec{l}}{r}$$

I shumëzojmë të dy anët me një vektor unitar të kahjes arbitrare:

$$\vec{a}\vec{A} = k_m I \oint \frac{\vec{a}}{r}\, d\vec{l}$$

Integralin vijor e shndërrojmë në sipërfaqësor, duke shfrytëzuar teoremën e Stoksit:

$$\vec{a}\vec{A} = k_m I \int rot\left(\frac{\vec{a}}{r}\right) d\vec{S}$$

Meqë $\vec{a} = const.$, do të kemi:

$$\vec{a}\vec{A} = k_m I \int \left(grad_s \frac{1}{r} \times \vec{a}\right) d\vec{S}$$

dhe me zëvendësimin ciklik të faktorëve në prodhimin e përzierjes fitojmë:

$$\vec{a}\vec{A} = k_m I \int \left(d\vec{S} \times grad_s \frac{1}{r} \right) \vec{a}$$

Në këto shprehje gradienti është marrë sipas koordinateve të sipërfaqes së integrimit, sepse rotori është përfituar në këto koordinate. Prandaj, nga

$$grad_s \frac{1}{r} = -grad \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \vec{r_o} = \frac{\vec{r}}{r^3}$$

e gjejmë shprehjen për potencial vektorial:

$$\vec{A} = k_m I \int d\vec{S} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{1}$$

Duke u bazuar në supozimin se $\vec{r}$ është mjaft i madh në krahasim me sipërfaqen e integrimit të qarkut, kuptojmë se faktori $\vec{r} / r^3$ mund të merret si konstant, meqë si i tillë ndërron shumë pak. Integralin e mbetur e shënojmë me

$$\vec{m} = I \int d\vec{S} \tag{2}$$

dhe potenciali vektorial mund të shkruhet:

$$\vec{A} = k_m \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \tag{3}$$

Induksionin magnetik të këtij qarku e gjejmë nga shprehja:

$$\vec{B} = rot\,\vec{A} = k_m\, rot \left[\frac{1}{r^3} (\vec{m} \times \vec{r}) \right] =$$

$$= k_m \left[\frac{1}{r^3} rot\,(\vec{m} \times \vec{r}) + grad \frac{1}{r^3} \times (\vec{m} \times \vec{r}) \right]$$

Kemi treguar në (XIII.5) se për fushë homogjene potenciali vektorial e ka formën:

$$rot\,(\vec{m} \times \vec{r}) = 2\,\vec{m}$$

E dimë se grad $\frac{1}{r^3} = -\frac{3}{r^4} \vec{r_o} = -3 \frac{\vec{r}}{r^5}$

Prandaj

$$\vec{B} = k_m \left[\frac{2\vec{m}}{r^3} - 3\frac{1}{r^5}\vec{r} \times (\vec{m} \times \vec{r}) \right]$$

E zhvillojmë prodhimin e dyfishtë vektorial:

$$\vec{B} = k_m \left[\frac{2\vec{m}}{r^3} - \frac{3}{r^5}(\vec{m}\, r^2 - \vec{r}\,(\vec{m}\,\vec{r})) \right]$$

dhe përfundimisht fitojmë:

$$\vec{B} = \frac{k_m}{r^3} \left[\frac{3\vec{r}\,(\vec{m}\,\vec{r})}{r^2} - \vec{m} \right] \tag{4}$$

Kjo shprehje është plotësisht identike me (XIII.10.7) në elektrostatikë. Prandaj, mund të përfundojmë se fusha magnetike e rrymës së mbyllur elektrike është identike me fushën e dipolit magnetik. Zatën këtë fakt e kemi cekur edhe me parë, por për te nuk patëm paraqitur vërtetim matematik. Momenti i dipolit magnetik është

$$\vec{m} = \int I\, d\vec{S} \tag{5}$$

Shohim se kahja e dipolit qëndron normal në sipërfaqe të rrymës së mbyllur, kurse momenti i tij është proporcional me intensitetin e rrymës dhe sipërfaqes që mbyll ajo.

Në mënyrë të ngjashme sikurse në elektrostatikë kuptojmë se fusha e dipolit magnetik mund të përfitohet nga një potencial skalar të shprehur me formulën:

$$\vec{B} = -\, grad\varphi$$

nëse për potencial marrim:

$$\varphi = k_m \frac{\vec{m}\,\vec{r}}{r^3} \tag{6}$$

8. ENERGJIA E FUSHËS MAGNETIKE

a) Energjia e qarkut të rrymës në fushë magnetike

Le të gjendet qarku i rrymës I me sipërfaqe mjaft të vogël në fushë magnetike me induksion B. Meqë sipërfaqja e qarkut është e vogël, mund të supozojmë se vektori $\vec{B}$ në te është konstant. E dimë se rryma

e mbyllur zotëron sikurse një dipol. Prandaj, energjia e qarkut të shqyrtuar në fushë përcaktohet me shprehjen për energji të dipolit në fushë të cilën e kemi përfituar në elektrostatikë (shiko XII.10.8). Për fushë magnetike në mënyrë të ngjashme fitojmë:

$$dW = -\vec{B}\, d\vec{m}$$

Momenti dipolar përcaktohet me shprehjen (XIII.7.2). Kahjen e rrymës e marrim të atillë që normalja të jetë negative:

$$d\vec{m} = -I\, d\vec{S}$$

dhe për energji fitojmë:

$$dW = I\, \vec{B}\, d\vec{S}$$

Kjo është energjia e rrymës e cila përshkruan sipërfaqen elementare.

Nëse kemi rrymë të mbyllur me përmasa të fundme, atëherë sipërfaqen e qarkut mund ta ndajmë në elemente të sipërfaqes dhe t'i mbledhim energjitë e tyre. Në të vërtetë, nëse përfytyrojmë se rreth çdo elementi të sipërfaqes rrjedh rryma I, atëherë nëpër pjesë të brendshme të elementeve kjo rrymë do të kalojë dy herë në kahje të kundërta, njërën herë gjatë rrjedhjes nëpër njërin element, kurse herën tjetër gjatë rrjedhjes nëpër elementin tjetër fqinje. Prandaj, rryma nëpër vijat kufitare të elementeve të brendshme të sipërfaqes do të anulohet, por do të ngelë rryma e vijës së jashtme e kjo është rryma e cila rrjedh nëpër qarkun me sipërfaqe të fundme. Energjia e rrymës së mbyllur të këtillë është:

$$W = I \int \vec{B}\, d\vec{S} \qquad (1)$$

Ky integral paraqet fluksin e induksionit magnetik nëpër sipërfaqe të kufizuar me rrymën e mbyllur. Pra:

$$\Phi = \int \vec{B}\, d\vec{S}$$

prej nga

$$W = I\, \Phi \qquad (2)$$

Këtë shprehje mund ta shndërrojmë në një formë tjetër:

$$W = I \int rot\, \vec{A}\, d\vec{S}$$

kurse nga teorema e Stoksit fitojmë:

$$W = I \oint \vec{A}\, d\vec{l} \qquad (3)$$

energjinë e shprehur me integral vijor.

b) Energjia e dy qarqeve të rrymës

Le të kemi dy qarqe të mbyllura të rrymës elektrike. Qarku i parë gjendet në fushë magnetike të qarkut të dytë. Energjinë e qarkut të parë në fushë të qarkut të dytë e njehsojmë sipas (3):

$$W_{12} = I_1 \oint_1 \vec{A}_2 \, d\vec{l}_1$$

Integrimi duhet kryer nëpër vijën e rrymës së qarkut të parë, energjinë e të cilit e kërkojmë, ndërsa potenciali vektorial e përshkruan fushën, burim i së cilës është rryma e qarkut të dytë. Për këtë potencial vektorial e kemi shprehjen (XIII.5.6):

$$\vec{A}_2 = k_m I_2 \oint_2 \frac{d\vec{l}_2}{r}$$

kurse për energji kemi:

$$W_{12} = k_m I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{l}_1 \, d\vec{l}_2}{r} \tag{4}$$

Në këtë shprehje r paraqet largësinë nga elementi i rrymës $d\vec{l}_1$ deri te elementi i rrymës $d\vec{l}_2$. Do të shënojmë shkurtimisht me

$$L_{12} = k_m \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{l}_1 \, d\vec{l}_2}{r} \tag{5}$$

Ky faktor varet vetëm prej formës dhe përmasave të qarqeve të rrymës, nga pozita e tyre reciproke dhe permeabiliteti i materialit në të cilin gjenden ata. Pra, me formimin e qarqeve të rrymës dhe vendosjen e njërit pranë tjetrit faktori L_{12} është plotësisht i përcaktuar. E quajmë koeficient të induksionit reciprok. Me ndihmën e këtij koeficienti për energji mund të shkruajmë:

$$W_{12} = L_{12} I_1 I_2 \tag{6}$$

Sikur ta kërkonim energjinë e qarkut të dytë në fushë magnetike të të parit në mënyrë të ngjashme, do të fitonim:

$$W_{21} = L_{21} I_2 I_1$$

Nga (5) shohim se vlen:

$$L_{12} = L_{21}$$

Prandaj, këto dy energji janë të barabarta. Shpesh për shkak simetrie i shkruajmë si shumë të tyre në formën:

$$W = \frac{1}{2} (L_{12} I_1 I_2 + L_{21} I_2 I_1) \tag{7}$$

c) **Energjia e sistemit të qarqeve të rrymës**

Le të kemi një numër të caktuar të qarqeve të rrymës. Energjia e çdo çifti është e përcaktuar me shprehjen (7). Që të fitojmë energjinë për tërë sistemin, këtë duhet ta zgjerojmë duke kryer mbledhjen prej *l* deri në *n*. Fitojmë:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} L_{ij} I_i I_j \tag{8}$$

Nëse dëshirojmë të përcaktojmë energjinë e njërit, të themi të qarkut të *i*-të në fushën magnetike të qarqeve të tjera, atëherë duhet mbledhur sipas të gjitha qarqeve. Pra:

$$W_i = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i = 1}^{n} L_{ij} I_i I_j$$

dhe me ndihmën e (5):

$$W_i = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i = 1}^{n} k_m \oint \oint \frac{I_i d\vec{l_i}\, I_j d\vec{l_j}}{r}$$

Për rryma hapësinore kjo shprehje do të ketë formën:

$$W_i = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i = 1}^{n} k_m \int \int \frac{\vec{j_i}\, d\tau_i\, \vec{j_j}\, d\tau_j}{r}$$

E ndajmë integralin e dyfishtë:

$$W_i = \frac{1}{2} \int \vec{j_i}\, d\tau_i \sum_{j \neq i = 1}^{n} k_m \int \frac{\vec{j_j}\, d\tau_j}{r}$$

Sipas (XIII. 5.5) potenciali vektorial i qarqeve të tjera është:

$$\vec{A} = \sum_{j=1}^{n} k_m \int \frac{\vec{j}_j\, d\tau_j}{r}$$

dhe rrjedh:

$$W_i = \frac{1}{2} \int \vec{j}\,\vec{A}\, d\tau \tag{9}$$

d) Energjia e fushës magnetike

Shprehjen (9) për energji të qarqeve të rrymës në fushë të veprimit të qarqeve të tjera do ta paraqesim me ndihmën e vektorëve të fushës dhe do të fitojmë energjinë e fushës të pavarur nga burimi i saj. Shfrytëzojmë shprehjen (XIII.2.2):

$$\vec{j} = rot\,\vec{H}$$

dhe e zëvendësojmë në (9):

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{A}\, rot\,\vec{H}\, d\tau$$

Këtë integral do ta transferojmë sipas shprehjes për divergjencë të prodhimit vektorial:

$$div\,(\vec{H} \times \vec{A}) = \vec{A}\, rot\,\vec{H} - \vec{H}\, rot\,\vec{A}$$

E integrojmë sipas vëllimit:

$$\int div\,(\vec{H} \times \vec{A})\, d\tau = \int \vec{A}\, rot\,\vec{H}\, d\tau - \int \vec{H}\, rot\,\vec{A}\, d\tau$$

Integralin në anën e majtë e shndërrojmë në integral sipërfaqësor:

$$\int div\,(\vec{H} \times \vec{A})\, d\tau = \oint (\vec{H} \times \vec{A})\, d\vec{S}$$

Integrimin e kryejmë në tërë hapësirën pambarim, prandaj integrimi sipërfaqësor duhet të kryhet në sipërfaqe të sferës me rreze pambarim të madhe. Meqë në pambarim edhe $\vec{H}$ edhe $\vec{A}$ janë të barabartë me zero, ky integral do të jetë i barabartë me zero. Pra:

$$\int \vec{A}\, rot\,\vec{H}\, d\tau = \int \vec{H}\, rot\,\vec{A}\, d\tau$$

Për energji fitojmë:

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{H} \, rot \, \vec{A} \, d\tau$$

E dimë se $\vec{B} = rot \, \vec{A}$
dhe do të fitojmë përfundimisht për energjinë e fushës magnetike:

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{H} \vec{B} \, d\tau \qquad (10)$$

Kjo shprehje vlen, në përgjithësi, pa marrë parasysh se nga cilat burime formohet fusha magnetike.

Nga (9) shohim se dendësia e energjisë së fushës magnetike:

$$W = \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B} = \frac{\mu}{2} H^2 = \frac{B^2}{2\mu} \qquad (11)$$

Shprehjet e fituara janë plotësisht të ngjashme me shprehjet përkatëse në elektrostatikë (shiko XII.19.2 dhe 3).

e) Energjia e polit magnetik

Fillojmë nga shprehja (10):

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{B} \vec{H} \, d\tau$$

Për pol të magnetit të përhershëm intensitetin e fushës e shprehim me ndihmën e potencialit skalar (XIII.3.12):

$$\vec{H} = - \, grad\varphi$$

dhe për energji fitojmë:

$$W = - \frac{1}{2} \int \vec{B} \, grad\varphi \, d\tau$$

Edhe këtë integral e transferojmë, duke shfrytëzuar shprehjen e njohur nga analiza vektoriale:

$$div \, (\varphi \cdot \vec{B}) = \vec{B} \, grad\varphi + \varphi \, div \, \vec{B}$$

Pasi ta integrojmë dhe ta shfrytëzojmë teoremën e Gausit, do të kemi:

$$\oint (\varphi \vec{B}) \, d\vec{S} = \int \vec{B} \, grad\varphi \, d\tau + \int \varphi \, div \, \vec{B} \, d\tau$$

Integrali në anën e majtë në sferën pambarim të madhe është i barabartë me zero, prandaj vlen:

$$\int \vec{B}\, grad\varphi\, d\tau = -\int \varphi\, div\, \vec{B}\, d\tau$$

Duke shfrytëzuar shprehjen e fundit për energji, do të kemi:

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi\, div\, \vec{B}\, d\tau$$

Shfrytëzojmë gjithashtu shprehjen:

$$div\, B = \frac{\rho_m}{\mu}$$

prandaj

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi \frac{\rho_m}{\mu}\, d\tau$$

Për pole të veçuara $\varphi = const.$, ndërsa integrali i mbetur:

$$m = \int \frac{\rho_m}{\mu}\, d\tau$$

paraqet intensitetin e polit magnetik. Në këtë rast fitojmë përfundimisht shprehjen:

$$W = \frac{1}{2} \varphi\, m \qquad (12)$$

e cila paraqet energjinë e polit të veçuar me intensitet m në fushë magnetike të magnetit të përhershëm me potencial φ.

9. FORCAT NË FUSHË MAGNETIKE

a) Forca me të cilën fusha vepron në element të rrymës

Në qark të rrymës, i cili gjendet në fushë magnetike, fusha vepron me ndonjë forcë. Nga kjo forcë varet, përveç të tjerash, edhe forma e rrugës së rrymës. Që të largohemi nga vështirësia e formës së qarkut të rrymës, do të kufizohemi në njehsimin e forcës e cila vepron në një element $d\,\vec{l}$, të rrymës me intensitet I. Të mendojmë se këtë e kemi zhvendosur për $d\,\vec{a}$. Gjatë kësaj kryejmë punë $-\vec{F}\, d\,\vec{a}$ dhe ndërrohet energjia e fushës:

$$dW = -\vec{F}\, d\vec{a}$$

Për energji shfrytëzojmë shprehjen (XIII.8.2) sipas së cilës:

$$dW = I\, d\Phi = I\, \vec{B}\, d\vec{S}$$

Elementi i sipërfaqes mund të paraqitet në këtë formë:

$$d\vec{S} = d\,\vec{l} \times d\vec{a}$$

Kur të gjitha i marrim në konsiderim, fitojmë:

$$-\vec{F}\, d\vec{a} = I\, \vec{B}\, (d\,\vec{l} \times d\vec{a}) = I\, d\vec{a}\, (\vec{B} \times d\,\vec{l})$$

Prej nga rrjedh forca:

$$\vec{F} = I\, (d\,\vec{l} \times \vec{B}) \qquad (1)$$

me të cilën fusha magnetike vepron në element të rrymës. Për rryma hapësinore, duke shfrytëzuar lidhjen e njohur, do të kemi:

$$\vec{F} = (\vec{j} \times \vec{B})\, d\tau \qquad (2)$$

Të dy shprehjet tregojnë se fusha magnetike vepron me forcë e cila qëndron normal në kahje të fushës dhe në kahje të rrymës.

b) Forca me të cilën vepron fusha në elektrone lëvizëse

Të mendojmë grumbullin e elektroneve të cilat lëvizin me shpejtësi $\vec{v}$. Këto elektrone gjithashtu e prodhojnë një rrymë elektrike prandaj në ta do të veprojë fusha magnetike me ndonjë forcë, të cilën do ta përcaktojmë.

Çdo elektron e bart elektricitetin e. Në njësi të kohës, nëpër njësi të sipërfaqes kalojnë të gjitha elektronet të cilat gjenden në vëllimin e prizmit me lartësi v. Le të jetë numri i tyre, në njësi të vëllimit n, atëherë në prizm do të ketë $n \cdot e$ elektrone të cilat e bartin elektricitetin $e \cdot n \cdot v$. Por, elektriciteti të cilin e bartin elektronet në njësi kohe nëpër njësi të sipërfaqes paraqet dendësinë e rrymës elektrike. Pra, vlen:

$$\vec{j} = e \cdot n \cdot \vec{v}$$

E zëvendësojmë në (2) dhe fitojmë forcën:

$$\vec{F} = n\, e\, (\vec{v} \times \vec{B})\, d\tau$$

Nëse dëshirojmë të përcaktojmë forcën me të cilën fusha vepron në një elektron të vetëm, atëherë këtë forcë duhet ta pjesëtojmë me numrin e elektroneve në vëllimin e shqyrtuar, i cili është $n\,d\tau$. Pra:

$$\vec{f} = e(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{3}$$

Kjo është forca e Lorencit me të cilën fusha magnetike vepron në elektrone lëvizëse. Nëse elektronet qëndrojnë në qetësi, shpejtësia $\vec{v} = 0$ forcë nuk do të ketë. Kjo forcë e zhvendos elektronin nga rruga e vet në kahje e cila është normal ndaj kahjes së lëvizjes dhe kahjes së fushës magnetike.

c) Forca në mes të dy elementeve të rrymës

Të mendojmë dy elemente të rrymës me gjatësi $d\,\vec{l}_1$ dhe $d\,\vec{l}_2$ nëpër të cilët rrjedh rryma e intensitetit I_1 dhe I_2. Rryma I_1 gjendet në fushë magnetike të burimit I_2. Kjo fushë në elementin I_1 vepron me forcën (1):

$$\vec{F}_{21} = I_1\,(d\,\vec{l}_1 \times \vec{B}_2)$$

Induksionin magnetik të elementit $d\,\vec{l}_2$ e gjejmë sipas shprehjes (XIII.6.2):

$$\vec{B}_2 = -k_m\,I_2\,\frac{d\,\vec{l}_2 \times \vec{r}}{r^3}$$

Parashenja minus duhet të shkruhet sepse e kemi marrë kahjen e vektorit $\vec{r}$ nga $d\,\vec{l}_1$ kah $d\,\vec{l}_2$, kurse aty kahja e vektorit të pozitës është e kundërt. Zëvendësojmë:

$$\vec{F}_{21} = -\,k_m\,\frac{I_1\,I_2}{r^3}\,[d\,\vec{l}_1 \times (d\,\vec{l}_2 \times \vec{r})]$$

dhe pasi ta zhvillojmë prodhimin e dyfishtë vektorial kemi:

$$\vec{F}_{21} = -\,k_m\,\frac{I_1\,I_2}{r^3}\,[d\,\vec{l}_2(\vec{r}\,d\,\vec{l}_1) - \vec{r}\,(d\,\vec{l}_1\,d\,\vec{l}_2)] \tag{4}$$

Në mënyrë të ngjashme fitojmë forcën me të cilën elementi i rrymës I_1 vepron në rrymën I_2:

$$\vec{F}_{12} = k_m\,\frac{I_1\,I_2}{r^3}\,[d\,\vec{l}_1\,(\vec{r}\,d\,\vec{l}_2) - \vec{r}\,(d\,\vec{l}_1\,d\,\vec{l}_2)] \tag{5}$$

Në veçanti le të jetë pozita e elementeve të rrymës, paralele. Atëherë, $\vec{r}\, d\vec{l_1} = 0$; $d\vec{l_1}\, d\vec{l_2} = dl_1\, dl_2$ dhe do të fitojmë:

$$\vec{F}_{21} = k_m \frac{I_1 I_2}{r^3} \quad dl_1\, dl_2 \vec{r} \tag{6}$$

dhe vlen:

$$\vec{F}_{12} = - \vec{F}_{21}$$

Forca $\vec{F}_{21}$ e ka kahjen e $\vec{r}$, pra kahjen kah $d\vec{l_2}$ prandaj përfundojmë se në mes të rrymave paralele forca është tërheqëse. Nëse rrymat kanë kahje të kundërta reciproke, atëherë $d\vec{l_1}\, d\vec{l_2} = - dl_1\, dl_2$, që do të thotë se në mes tyre veprojnë forcat dëbuese.

d) Forcat në mes të dy poleve magnetike

Të mendojmë dy pole magnetike të veçuara m_1 dhe m_2. Energjia e këtij sistemi do të jetë sipas (XIII.8.12):

$$W = \frac{1}{2} \varphi_1 m_1 + \frac{1}{2} \varphi_2 m_2$$

Potenciali magnetik φ_1 është potencial i fushës burim i së cilës është poli m_2. Këtë e njehsojmë sipas shprehjes:

$$\varphi_1 = k_m \int \frac{\sigma_2 dS_2}{r}$$

Për pole me sipëfaqe të vogël r është përafërsisht konstant dhe meqë:

$$\int \sigma_2 dS_2 = m_2$$

potenciali i polit është:

$$\varphi_1 = k_m \frac{m_2}{r}$$

Në mënyrë të ngjashme fitojmë për:

$$\varphi_2 = k_m \frac{m_1}{r}$$

dhe për energji fitojmë:

$$W = k_m \frac{m_1 m_2}{r}$$

Ndërrimi i kësaj energjie i shkaktuar nga ndërrimi i largësisë është i barabartë me punën:

$$\vec{F}\, d\vec{r} = - dW = - k_m m_1 m_2 d\left(\frac{1}{r}\right) = - k_m m_1 m_2\, grad\left(\frac{1}{r}\right) d\vec{r}$$

prej nga rrjedh:

$$\vec{F} = - k_m m_1 m_2\, grad\left(\frac{1}{r}\right)$$

ose

$$\vec{F} = k_m \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_o \qquad (7)$$

Kemi fituar ligjin e Kulonit për forcën në mes të dy poleve magnetike. Shprehja tregon se konstantja k_m për forcë në mes të poleve magnetike ka kuptim të ngjashëm sikurse konstantja k për fushë elektrike.

10. TEORIA E DIAMAGNETIZMIT

Mjediset diamagnetike në fushë magnetike fitojnë magnetizim të kahjes së kundërt me fushën e cila i ka magnetizuar. Sipas shprehjes:

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \qquad (1)$$

këto mjedise duhet të kenë susceptibilitet negativ. Do të përcaktojmë shprehjen për këtë susceptibilitet, duke u bazuar në lëvizjen e elektroneve rreth bërthamave të atomit. Në të vërtetë, kur elektronet e këtij mjedisi gjenden në fushë të jashtme magnetike, kjo fushë vepron në lëvizjen e tyre e me këtë edhe në magnetizimin i cili është rrjedhim i momenteve magnetike të rrymave rrethore të elektroneve.

Për forcën me të cilën fusha magnetike vepron në elektron lëvizës shfrytëzojmë shprehjen (XIII.9.3):

$$\vec{F} = \mu_o e(\vec{v} \times \vec{B}) \qquad (2)$$

Elektroni i cili lëviz nëpër vijë të mbyllur rreth bërthamës, mekanikisht vepron sikurse fuga dhe nëse në te vepron forca e cila tenton t'ia rrotullojë boshtin e tij, të cilën gjë e bën forca e fushës magnetike, atëherë ai duhet të kryejë lëvizje precesioni. Nga kjo, rrafshi në të cilin lëviz elektroni rrotullohet rreth fushës magnetike ashtu që normalja e tërhequr në këtë rrafsh dhe bërthamë të atomit përshkruan sipërfaqe konike. Kjo lëvizje njihet si precesion i Larmorit (fig. 98). Do ta shfrytëzojmë shprehjen (V. 3. 4) për shpejtësi këndore të precesionit të Larmorit.

$$\vec{\omega} = \frac{\mu_o e}{2m_o} \vec{H} \qquad (3)$$

Ky rrotullim e zmadhon momentin e sasisë së lëvizjes të elektroneve në atom për madhësinë:

$$\vec{L} = m_o \sum_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \qquad (4)$$

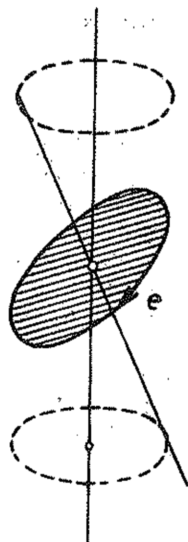


Fig. 98.

Shpejtësia te lëvizjet rrotulluese shprehet në formën:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

E zëvendësojmë në (4):

$$\vec{L} = m_o \sum_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = m_o \sum \{\vec{\omega}\, r^2_i - \vec{r}_i\, (\vec{r}_i\, \vec{\omega})\}$$

Boshtin z të sistemit të koordinatave e vendosim në kahje të fushës magnetike, prandaj njëkohësisht paraqet edhe boshtin e rrotullimit për precesion. Komponentja z e momentit të sasisë së lëvizjes është e barabartë me vlerën totale të këtij momenti, prandaj duhet të njehsojmë këtë komponente të shprehjes. Së pari shohim se vlen:

$$\vec{r}_i\, \vec{\omega} = z_i \omega$$

sepse shpejtësia këndore e ka kahjen e boshtit të rrotullimit. Do të kemi:

$$L = L_z = m_o \sum_i [\omega r_i^2 - z_i(z_i \omega)] = m_o \omega \sum_i (r^2_i - z^2_i)$$

Tani duhet të njehsojmë vlerën mesatare të të gjitha elektroneve në atom. Ky numër është Z, sa është numri rendor i atomit në sistemin periodik të elementeve. Për vektor të pozitës gjithmonë vlen:

$$\overline{r^2_i} = \overline{x^2_i} + \overline{y^2_i} + \overline{z^2_i}$$

dhe meqë asnjë kahje nuk është më e theksuar se tjetra:

$$\overline{x_i^2} = \overline{y_i^2} = \overline{z_i^2} = \overline{r_i^2}/3$$

Fitojmë:

$$L = \frac{2}{3} m_o \omega Z \overline{r_i^2} \qquad (5)$$

Duhet të gjejmë edhe ndikimin e momentit të sasisë së lëvizjes në momentin magnetik. Në të vërtetë, çdo elektron e ka momentın magnetik nga rrotullimi rreth bërthamës, pra pse e ka edhe momentin e sasisë së lëvizjes. Prandaj, duhet të ekzistojë ndonjë lidhje në mes të momentit të sasisë së lëvizjes dhe momentit magnetik.

E dimë se rryma rrethore paraqet një fletë magnetike e cila e ka momentin magnetik:

$$m = I\,S$$

ku: S është sipërfaqja e kësaj flete. Intensitetin e rrymës mund ta shprehim në formën:

$$I = -e\nu = -e/t$$

ku: ν — është numri i rrotullimeve të elektronit rreth bërthamës në njësi kohe, t — koha e një rrotullimi, ndërsa parashenja minus tregon se elektroni është negativisht i ngarkuar. Me ndihmën e kësaj shprehje për moment magnetik të fletës do të kemi:

$$m = -e\,S/t$$

Madhësia S/t paraqet shpejtësinë sipërfaqësore, pra këndin që rreze vektori e përshkruan në njësi të kohës. Nëse shpejtësia këndore është ω_1, atëherë nga fig. 99 shohim se vlen:

$$S/t = r\omega_1 \cdot r/2 = r^2\omega_1/2$$

dhe për moment fitojmë:

$$m = -er^2\omega_1/2$$

Në anën tjetër, për moment të sasisë së lëvizjes vlen:

Fig. 99

$$L = m_o r^2 \omega_1$$

dhe, meqë të dy momentet e kanë të njëjtën kahje, do të vlejnë:

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_o}\vec{L} \qquad (6)$$

Kjo shprehje e cila tregon lidhmërinë e momentit magnetik me momentin e sasisë së lëvizjes quhet paralelizëm magnetomekanik. E zëvendësojmë në (6) vlerën e momentit të sasisë së lëvizjes (5):

$$\vec{m} = -\frac{e Z \overline{r^2}\,\vec{\omega}}{3}$$

dhe vlerën e (3)

$$\vec{m} = -\frac{\mu_o e^2 Z \overline{r^2}}{6m_o}\vec{H} \tag{7}$$

Supozojmë se shpërndarja e elektroneve në atom është e atillë që momenti rezultues magnetik i tij është i barabartë me zero. Materiali i këtillë jashtë fushës magnetike nuk ka kurrfarë magnetizimi. E vendosim këtë në fushë magnetike ashtu që çdo atom fiton momentin magnetik $\vec{m}$. Nëse me N e shënojmë numrin e atomeve në njësi të vëllimit, atëherë duhet ta shumëzojmë momentin magnetik të një atomi me numrin e atomeve për të fituar momentin magnetik të njësisë së vëllimit. Ky është magnetizimi i mjedisit. Pra:

$$\vec{M} = -\frac{\mu_o e^2 N Z \overline{r^2}}{6m_o}\vec{H} \tag{8}$$

I krahasojmë shprehjet (8) dhe (1) dhe për susceptibilitet magnetik fitojmë shprehjen:

$$\chi = -\frac{\mu_o e^2 N Z \overline{r^2}}{6m_o} \tag{9}$$

Kuptojmë se në mjediset diamagnetike susceptibiliteti është negativ. Nga shprehja (9) shihet se ky nuk varet nga temperatura.

11. PARAMAGNETIZMI

Për mjediset diamagnetike kemi supozuar se molekulat e tyre nuk kanë moment magnetik, kur gjenden jashtë veprimit të fushës magnetike. Mirëpo, molekulat e mjediseve paramagnetike edhe jashtë fushës e kanë një moment magnetik të cilin do ta shënojmë me m_1. Edhe në këto molekula lëvizjet e elektroneve janë identike me fletë të holla magnetike, por shuma vektoriale e momenteve magnetike të molekulës nuk do të jetë i barabartë me zero. Fusha e jashtme magnetike këto momente dipolare i orienton në kahje të vet. Këtij orientimi i kundërvihet çrregullimi i shkaktuar nga lëvizja kaotike termike dhe në mes tyre vendoset një gjendje ekuilibrimi.

Njehsimin të cilin e ka paraqitur Lanzhveni për susceptibilitet paramagnetik me (1905) është plotësisht i ngjashëm me njehsimin të cilin e kemi paraqitur për përcaktimin e susceptibilitetit elektrik të izolatorit të përbërë prej molekulave polare. Prandaj, këtu mund ti paraqesim rezultatet. Për moment magnetik të njësisë së vëllimit fitohet shprehja:

$$M = m_1 N \, L\,(m_1 H/kT) \tag{1}$$

ku: $L(a)$ paraqet funksionin e Lanzhvenit të përkufizuar në formën:

$$L(a) = -\frac{1}{a} + cth\, a \tag{2}$$

Për vlera të vogla të $a = m_1H/kT$ mund të merret vlera e përafërt e funksionit të Lanzhvenit:

$$L(a) \approx a/3$$

dhe për magnetizim fitojmë:

$$M = \frac{m^2_1 N}{3kT} H \tag{3}$$

prej nga për susceptibilitet të mjediseve paramagnetike fitojmë:

$$\chi = \frac{m^2_1 N}{3kT} \tag{4}$$

Susceptibiliteti mund të njehsohet edhe për masën e një moli. Atëherë në vend të numrit N duhet shënuar numrin e Avogadrit:

$$A = 6{,}03 \cdot 10^{23}$$

dhe për susceptibilitet molar do të fitojmë:

$$\chi_{mol} = \frac{Am^2_1}{3kT}$$

dhe nëse me C e shënojmë konstanten $Am^2_1/3k$ mund ta shkruajmë shkurtimisht:

$$\chi_{mol} = \frac{C}{T} \tag{5}$$

Ky është ligji i Kyriut për susceptibilitet paramagnetik. Sipas tij susceptibiliteti është proporcional i zhdrejtë me temperaturën absolute.

Ky ligj është përfituar për gaze paramagnetike, por është treguar se edhe disa lëngje dhe mjedise të ngurta paramagnetike mund të përshkruhen me te.

Ndonjëherë për fusha të fuqishme dhe temperatura të ulëta funksioni i Lanzhvenit nuk mund të përafrohet me anëtarin e parë të zhvillimit në seri. Për këto raste duhet shfrytëzuar shprehjen (1) të formës së plotë.

Megjithë sukseset e mëdha të kësaj teorie, ekzistojnë edhe raste kur rezultatet e matjeve nuk përputhen me parashikimet teorike. Ky mospajtim rrjedh nga hipoteza punuese e bazuar në modelin klasik të atomit. Gjatë njehsimit me dukuri mikroskopike duhet shfrytëzuar rezultatet e teorisë së kuanteve. Sipas saj, orientimi i dipoleve në fushë magnetike i nënshtrohet disa konditave kuantike të cilat kanë ndikim në njehsimin e susceptibilitetit magnetik. Në kuadër të elektrodinamikës klasike mund të kënaqemi me rezultatet e bazuara në modelin klasik të atomit, por këto rezultate duhet kuptuar si të përafërta.

Dukuritë ferromagnetike edhe më fuqishëm janë të lidhura me ligjet e mekanikës së kuanteve, prandaj këtu nuk do të reprodukojmë teorinë e tyre klasike.

12. LËVIZJA E GRIMCËS SË ELEKTRIZUAR NË FUSHË HOMOGJENE ELEKTRIKE DHE MAGNETIKE

a) Ekuacionet kanonike të lëvizjes së grimcës në fushë elektromagnetike

Me ndihmën e potencialit skalar dhe vektorial ekuacioni i lëvizjes së grimcës në fushë elektrike dhe magnetike mund të shkruhet në formën e Hamiltonit. Ekuacionet kaonike të lëvizjes në përgjithësi e kanë këtë formë në koordinate kënddrejta:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} \qquad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x}$$
$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} \qquad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} \qquad (1)$$
$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} \qquad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z}$$

Duke shfrytëzuar shprehjen (VII.12.6) për funksion të Hamiltonit për lëvizje të grimcës, p.sh. elektronit në fushë elektrike dhe magnetike, do të kemi:

$$H = \frac{1}{2m}\left[(p_x - e\,A_x)^2 + (p_y - e\,A_y)^2 + (p_z - e\,A_z)\right] + e\,V \qquad (2)$$

E zëvendësojmë funksionin e Hamiltonit në ekuacionet kanonike:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{1}{m}(p_x - e\,A_x)$$
$$\dot{y} = \frac{1}{m}(p_y - e\,A_y) \qquad (3)$$
$$\dot{z} = \frac{1}{m}(p_z - e\,A_z)$$

Siç shohim, impulset nuk janë të barabarta me prodhimin e masës dhe shpejtësisë.

Nga ekuacioni i parë i shtyllës së dytë kemi:

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -e\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{e}{m}\left[(p_x - e\,A_x)\frac{\partial A_x}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + (p_y - e\,A_y)\frac{\partial A_y}{\partial x} + (p_z - e\,A_z)\frac{\partial A_x}{\partial x}\right. \qquad (4)$$

Në mënyrë të ngjashme fitojmë edhe për komponentet tjera të impulsit. I zëvendësojmë shpejtësitë nga (3) në (4):

$$\dot{p}_x = -e\frac{\partial V}{\partial x} + e\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \tag{5}$$

E zgjidhim ekuacionin e parë të (3) sipas p_x dhe pasi ta derivojmë sipas kohës kemi:

$$\dot{p}_x = m\ddot{x} + e\frac{dA_x}{dt} \tag{6}$$

E dimë se derivati i plotë i komponentes A_x sipas kohës është:

$$\frac{dA_x}{dt} = \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \tag{7}$$

Nga shprehjet (5). (6) dhe (7) fitojmë ekuacionin:

$$m\ddot{x} = -e\frac{\partial V}{\partial x} - e\frac{\partial A_x}{\partial t} + e\left[\dot{y}\underbrace{\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)}_{B_z} - \dot{z}\underbrace{\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)}_{B_y}\right]$$

Për fusha stacionare fitojmë:

$$m\ddot{x} = eE_x + e(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y)$$

sepse

$$\vec{E} = -\,grad\,V \text{ dhe } \vec{B} = rot\,\vec{A}$$

Në mënyrë të ngjashme fitojmë edhe për komponentet tjera dhe nga të tri komponentet fitojmë ekuacionin e lëvizjes në fushë elektrike dhe magnetike:

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E} + e(\vec{v}\times\vec{B}) \tag{8}$$

b) Lëvizja në fushë elektrike

Fusha homogjene elektrike në elekton vepron me forcë $e\vec{E}$, prandaj ekuacioni i lëvizjes do të jetë:

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E}$$

integrali i parë është:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{e}{m}\vec{E}t + \vec{v}_o \tag{9}$$

kurse i dyti:

$$\vec{r} = \frac{e}{2m}\vec{E}t^2 + \vec{v}_o t + \vec{r}_o \tag{10}$$

Konstantet e integrimit i përcaktojmë nga konditat fillestare të lëvizjes. E vendosim origjinën e sistemit në vendin e hyrjes së elektronit në fushë me boshtin x në kahje të shpejtësisë. Do të kemi $\vec{r}_o = 0$ dhe $\vec{v}_o = \vec{i}\, v_o$. Fusha le të ketë kahjen e boshtit z.

Pra:

$$\vec{E} = \vec{k}\, E$$

Meqë lëvizja kryhet në rrafshin x, z vektorin e pozitës mund ta zbërthejmë në komponente:

$$\vec{r} = \vec{i}\, x + \vec{k}\, z$$

Pasi t'i zëvendësojmë në (10), fitojmë:

$$\vec{i}\, x + \vec{k}\, z = \frac{e}{2m}\, \vec{k}\, E\, t^2 + \vec{i}\, v_o t$$

I barazojmë koeficientet pranë vektorëve unitarë:

$$x = v_o t$$

$$z = \frac{e}{2m}\, E\, t^2$$

Nëse kërkojmë formën eksplicite të rrugës, atëherë duhet të eliminohet koha nga ky sistem. Do të kemi:

$$z = \frac{e\, E}{2mv_o^2}\, x^2 \qquad (11)$$

Përfundojmë se fusha homogjene elektrike lëvizjen e elektronit e përkulë në rrugë parabolike.

c) Lëvizja në fushë magnetike

Në elektron i cili lëviz në fushë magnetike vepron forca e përcaktuar me anëtarin e dytë të (8), pra forca e Lorencit:

$$m\ddot{\vec{r}} = e\, (\vec{v} \times \vec{B}) \qquad (12)$$

ose

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{m}\, (\dot{\vec{r}} \times \vec{B}) \qquad (13)$$

Nëse boshtin z të sistemit të koordinatave kënddrejta e vendosim në kahje të fushës magnetike, atëherë $B_z = B$ dhe nga (13) do të kemi:

$$\vec{i}\,\ddot{x}+\vec{j}\,\ddot{y}+\vec{k}\,\ddot{z}=\frac{e}{m}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\\ 0 & 0 & B\end{vmatrix}=\vec{i}\,\frac{e}{m}B\dot{y}-\vec{j}\,\frac{e}{m}B\dot{x}$$

prej nga fitojmë sistemin:

$$\ddot{x}=\frac{eB}{m}\dot{y}$$

$$\ddot{y}=-\frac{eB}{m}\dot{x} \tag{14}$$

$$\ddot{z}=0$$

Në këtë sistem më së lehti është zgjidhja e ekuacionit të tretë. Integrimi i parë na jep:

$$\dot{z}=v_{o\parallel}$$

kurse i dyti:

$$z=v_{o\parallel}\,t+z_o \tag{15}$$

Këtu me $v_{o\parallel}$ e kemi shënuar komponenten e shpejtësisë fillestare $\vec{v}_o$ e cila është paralel me fushën magnetike. Shohim se elektroni lëviz njëtrajtësisht me shpejtësi konstante në kahje paralele me fushën magnetike.

Me ndihmën e dy ekuacioneve të para të (14) mund të përcaktojmë lëvizjen e elektronit në rrafshin normal ndaj fushës. E derivojmë sipas kohës të parin dhe e zëvendësojmë të dytin në te:

$$\dddot{x}=-\frac{e^2B^2}{m^2}\dot{x}$$

Shënojmë shkurtimisht me

$$\omega=\frac{eB}{m} \tag{16}$$

dhe mund ta shkruajmë në formën:

$$(\dot{x})^{\cdot\cdot}+\omega^2\dot{x}=0$$

Ky ekuacion diferencial e përcakton komponenten e shpejtësisë $\dot{x}$. E dimë nga oshilimet se zgjidhja e tij është:

$$\dot{x}=A\cos(\omega t+\alpha) \tag{17}$$

E zëvendësojmë në ekuacionin e dytë të (14):

$$\ddot{y}=-A\omega\cos(\omega t+\alpha)$$

dhe me integrim fitojmë:

$$\dot{y} = -A \sin(\omega t + \alpha) \tag{18}$$

Shprehjet (17) dhe (18) tregojnë se komponentet e shpejtësisë në rrafsh normal ndaj fushës magnetike ndërrojnë sikurse funksionet oshiluese. I ngrisim në katrorë dhe i mbledhim:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = A^2 = v_{o\perp}^2 \tag{19}$$

Kuptojmë nga kjo shprehje se fusha e ndërron intensitetin e shpejtësisë në rrafshin normal, por vetëm kahjen e saj. Prandaj, katrori i shpejtësisë është i barabartë me katrorin e komponentes normale të shpejtësisë fillestare të cilën e kemi shënuar me $v_{o\perp}$. Në (17) dhe (18) zëvendësojmë në vend të A vlerën $v_{o\perp}$ dhe i integrojmë:

$$\begin{aligned} x - x_o &= \frac{v_{o\perp}}{\omega} \sin(\omega t + \alpha) \\ y - y_o &= \frac{v_{o\perp}}{\omega} \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned} \tag{20}$$

Pasi t'i ngrisim në katrorë dhe i mbledhim fitojmë:

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = \frac{v_{o\perp}^2}{\omega^2} = R^2 \tag{21}$$

ekuacionin e rrethit. Pra, projeksioni i lëvizjes në rrafsh normal në fushën magnetike është lëvizje e njëtrajtshme rrethore. Nëse e marrim në konsiderim edhe ekuacionin (15), mund të përfundojmë se elektroni lëviz në fushë magnetike nëpër spirale cilindrike. Kjo spirale mund të degjenerohet në drejtëz, nëse shpejtësia fillestare ka kahje paralele me fushën ose në rreth, nëse shpejtësia fillestare ka kahje normale ndaj kësaj fushe.

Rrezja e projeksionit rrethor të lëvizjes është sipas (21):

$$R = \frac{v_{o\perp}}{\omega} = \frac{m\, v_{o\perp}}{e B} \tag{22}$$

Nëse elektroni lëviz normal në fushë magnetike, atëherë ai përshkruan rreth dhe koha e një rrotullimi të plotë është:

$$T = \frac{2\pi R}{v_o} = \frac{2\pi m}{e B}$$

Kjo kohë nuk varet prej shpejtësisë fillestare të elektronit. Prandaj, elektronet e të gjitha shpejtësive fillestare për të njëjtën kohë e kalojnë rrugën rrethore në fushë magnetike. Kjo e dhënë është mjaft e rëndësishme te funksioni i ciklotronit, prandaj (16) quhet frekuencë ciklotroni.

ç) Lëvizja e elektronit në fushë elektrike dhe magnetike

Nëse elektroni lëviz njëkohësisht në fushë elektrike dhe magnetike, atëherë ekuacioni i lëvizjes e ka formën e (8):

$$m\dot{\vec{v}} = e\vec{E} + e(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{23}$$

Shpejtësinë e elektronit e zbërthejmë në dy pjesë:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \tag{24}$$

Këtu $\vec{v}_1$ paraqet atë shpejtësi të cilën do ta kishte elektroni, sikur të lëvizte vetëm në fushë magnetike. Kjo është shpejtësia për të cilën vlen shprehja (13):

$$\dot{\vec{v}}_1 = \frac{e}{m}(\vec{v}_1 \times \vec{B}) \tag{24}$$

ndërsa komponentet e saj përcaktohen me (17) dhe (18). Fillimin e matjes së kohës e marrim të atillë që $\alpha = 0$. Për komponente të shpejtësisë $\vec{v}_1$ do të kemi:

$$v_{1x} = v_{o\perp} \cos\omega t$$
$$v_{1y} = -v_{o\perp} \sin\omega t \tag{25}$$

Pjesa tjetër e shpejtësisë (24) le të jetë konstante gjatë kohës dhe le të ketë kahje normale ndaj induksionit magnetik $\vec{B}$. Në këtë rast $\dot{\vec{v}}_2 = 0$ dhe $\vec{v}_2 \vec{B} = 0$.

Do të përcaktojmë sa duhet të jetë kjo shpejtësi. E zëvendësojmë (24) në (23):

$$\dot{\vec{v}}_1 = \frac{e}{m}\vec{E} + \frac{e}{m}(\vec{v}_1 \times \vec{B}) + \frac{e}{m}(\vec{v}_2 \times \vec{B})$$

Nga (24) do të mbetet:

$$\vec{v}_2 \times \vec{B} = -\vec{E}$$

Për përcaktimin e $\vec{v}_2$ e shumëzojmë këtë ekuacion në mënyrë vektoriale me $\vec{B}$:

$$\vec{B} \times (\vec{v}_2 \times \vec{B}) = \vec{E} \times \vec{B}$$

E zbërthejmë anën e majtë:

$$\vec{v}_2 B^2 - \vec{B}(\vec{v}_2 \vec{B}) = \vec{E} \times \vec{B}$$

Meqë $\vec{v}_2 \vec{B} = 0$, mbetet:

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{B^2} (\vec{E}^2 \times \vec{B}) \qquad (26)$$

Komponentet e kësaj shpejtësie janë:

$$v_{2x} = \frac{E_y}{B} \text{ dhe } v_{2y} = -\frac{E_x}{B} \qquad (27)$$

Shepjtësia $\vec{v}_2$ quhet shpejtësi e drajfit. Kjo e lëviz qendrën e rrethit nëpër të cilën lëviz elektroni sikur të ekzistonte vetëm fusha magnetike. Shenja (26) tregon se shpejtësia e drajfit është normale edhe ndaj kahjes së fushës elektrike edhe ndaj kahjes së fushës magnetike.

Shpejtësia totale e elektronit në fusha të shqyrtuara është:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \frac{1}{B^2} (\vec{E} \times \vec{B}) \qquad (28)$$

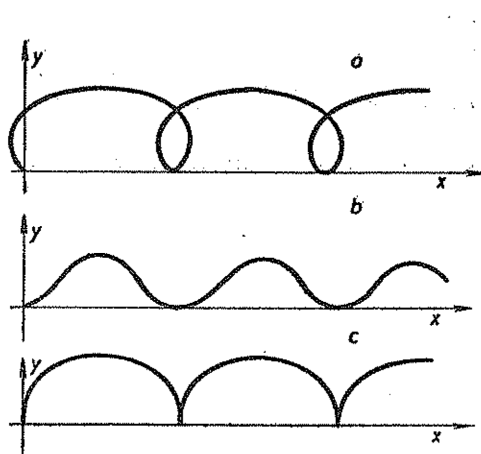


Fig. 100

Do të marrim në veçanti se fusha elektrike është normale ndaj fushës magnetike. Në këtë rast boshtin y e vendosim në kahje të fushës elektrike, prandaj $E_x = 0$, ndërsa komponentet e shpejtësisë totale sipas (25) dhe (27) janë:

$$v_x = v_{o\perp} \cos\omega t + \frac{E}{B}$$
$$v_y = v_{o\perp} \sin\omega t \qquad (29)$$

Me integrim të tyre fitojmë:

$$x = \frac{v_{o\perp}}{\omega} \sin\omega t + \frac{E}{B} t + x_o$$
$$y = -\frac{v_{o\perp}}{\omega} \cos\omega t + y_o \qquad (30)$$

Konstantet e integrimit i përcaktojmë nga konditat fillestare. Supozojmë se në fillim të kohës $t = 0$ elektroni gjendej në origjinë të sistemit të koordinatave. Atëherë rrjedh nga (30):

$$x_o = 0 \quad \text{dhe} \quad y_o = \frac{v_{o\perp}}{\omega}$$

dhe përfundimisht fitojmë:

$$x = \frac{v_{o\perp}}{\omega} \sin\omega t + \frac{E}{B} t$$
$$y = \frac{v_{o\perp}}{\omega} (1 - \cos\omega t) \tag{31}$$

Këto janë ekuacionet parametrike të lakores nëpër të cilën elektroni lëviz. Lakorja quhet trohoidë dhe paraqitet kur pika lëviz nëpër rreth në mënyrë të njëtrajtshme dhe njëkohësisht qendra e këtij rrethi lëviz me shpejtësi të drajfit. Forma e vetë lakores varet prej intensitetit të shpejtësisë fillestare. Kur është $v_{o\perp} > E/B$ lakorja e ka formë sikurse tregon fig 100a. Ky rast paraqitet kur shpejtësia e lëvizjes nëpër rreth është më e madhe se shpejtësia e drajfit. Për rastin kur është $v_{o\perp} < E/B$ rruga e elektronit e ka formën e treguar në fig. 100b, ndërsa kur $v_{o\perp} = - E/B$ si rrugë të tij fitojmë cikloidën e treguar në fig. 100c.

XIV. FUSHAT E NDRYSHUARA ELEKTROMAGNETIKE

1. LIGJI I INDUKSIONIT

a) Ligji i Faradeut

Deri tash kemi shqyrtuar fushat statike elektrike dhe magnetike, pra fushat të cilat nuk varen nga koha. Do të vazhdojmë zgjerimin e diturive për fusha jostacionare, për fusha të cilat ndërrojnë gjatë kohës.

Zbulimin themelor eksperimental për rryma të indukuara e ka paraqitur Faradeu. Nëse ndonjë qark i rrymës gjendet në fushë magnetike, atëherë gjatë ndërrimit të fluksit magnetik të fushës nëpër sipërfaqe të tij në te do të paraqitet një rrymë elektrike. E quajmë rrymë elektrike të indukuar.

Ligjin e tensionit të indukuar mund ta përfitojmë me ndihmën e shqyrtimit energjetik. E dimë se energjia e rrymës I në fushë magnetike është:

$$W = I\,\Phi$$

ku: Φ është fluksi i induksionit magnetik i cili kalon nëpër sipërfaqe të mbyllur me vijën e rrjedhjes së rrymës. Nëse fluksi ndërron për çfarëdo arsye, atëherë do të ndërrojë edhe energjia e qarkut në fushë. Ky ndërrim shkruhet në formën:

$$dW = I\,d\,\Phi$$

Sipas ligjit të ruajtjes së energjisë duhet të paraqitet edhe një ndërrim i saj. Sikurse ka treguar Faradeu, në qark paraqitet rryma. Energjia e saj është:

$$dW_s = U\,I\,dt$$

Sipas ligjit të ruajtjes së energjisë shuma e këtyre dy ndërrimeve duhet të jetë e barabartë me zero. Pra:

$$dW_s + dW = 0$$

ose

$$U\,I\,dt = -\,I\,d\,\Phi$$

prej nga rrjedh:

$$U = -\,\frac{d\Phi}{dt} \tag{1}$$

Kjo është shprehja themelore për tension të indukuar. Shohim se ky tension është i barabartë me shpejtësinë e ndërrimit të fluksit magnetik. Pra, shenja minus tregon se tensioni i indukuar ka kahje të kundërt nga kahja e ndërrimit të fluksit i cili e ka shkaktuar atë indukim.

b) Ekuacioni II i Maksuelit

Do ta shprehim ligjin e induksionit me ndihmën e vektorëve të fushës. Për tension mund të shkruajmë këtë integral:

$$U = \oint \vec{E}\, d\,\vec{l}$$

ndërsa për fluksin magnetik:

$$\Phi = \int \vec{B}\, d\,\vec{S}$$

I zëvendësojmë në (1):

$$\oint \vec{E}\, d\,\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B}\, d\,\vec{S} = -\int \frac{d\vec{B}}{dt}\, d\,\vec{S}$$

Supozojmë se induksioni magnetik gjatë kohës nuk ndërron prej koordinatave, prandaj në vend të derivatit total mund të shkruajmë derivatin parcial:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \dot{\vec{B}}$$

Pra,

$$\oint \vec{E}\, d\,\vec{l} = -\int \dot{\vec{B}}\, d\,\vec{S}$$

Integralin e anës së majtë e shndërrojmë në integral sipërfaqësor, duke shfrytëzuar teoremën e Stoksit

$$\int rot\,\vec{E}\, d\,\vec{S} = -\int \dot{\vec{B}}\, d\,\vec{S}$$

dhe me barazimin e funksioneve nën integrale fitojmë:

$$rot\,\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad (2)$$

Ky ekuacion diferencial e lidh vektorin e fushës elektrike me vektorin e fushës magnetike dhe paraqet njërin prej ekuacioneve themelore diferenciale për fushë elektromagnetike. Quhet ekuacioni II i Maksuelit. Ky ekuacion së bashku me tjetrin, të cilin do ta përfitojmë më vonë, formojnë ekuacionet themelore për fushë elektromagnetike.

Shprehja (2) tregon se ndërrimi kohor i fushës magnetike shkakton paraqitjen e një rryme elektrike shtjellore. Intensiteti i shtjellave të saj është i barabartë me shpejtësinë e ndërrimit të induksionit magnetik.

c) **Induksioni reciprok**

Të mendojmë dy qarqe të rrymës dhe nëpër të parin të cilin e quajmë qark primar le të rrjedh rryma me intensitet I_1. Kjo rrymë është burim i një fushe magnetike, fluksi i së cilës kalon nëpër sipërfaqen e qarkut të dytë sekondarë.

$$\Phi_{21} = \int_2 \vec{B}_1 \, d\,\vec{S}_2$$

E shprehim me ndihmën e potencialit vektorial:

$$\Phi_{21} = \int_2 rot\,\vec{A}_1 \, d\,\vec{S}_2 = \oint_2 \vec{A}_1 \, d\,\vec{l}_2$$

Potenciali vektorial i qarkut primar është:

$$\vec{A}_1 = k_m I_1 \oint_1 \frac{d\,\vec{l}_1}{r}$$

dhe për fluks fitojmë:

$$\Phi_{21} = k_m I_1 \oint_1 \oint_2 \frac{d\,\vec{l}_1 \, d\,\vec{l}_2}{r}$$

I shënojmë këto integrale me

$$L_{21} = k_m \oint_1 \oint_2 \frac{d\,\vec{l}_1 \, d\,\vec{l}_2}{r} \qquad (3)$$

dhe për fluks fitojmë:

$$\Phi_{21} = L_{21} I_1 \qquad (4)$$

Nëse të dy qarqet janë të atilla që shprehja (1) mbetet konstante, atëherë edhe fluksi (2) është konstant dhe në qarkun sekondar nuk ka rrymë.

Mirëpo, nëse ndërron intensiteti i rrymës primare, do të ndërrojë edhe fluksi në qarkun sekondar dhe në te do të indukohet tensioni. Nga (1) dhe (4) për tension të indukuar fitojmë shprehjen:

$$U_2 = - L_{21} \frac{dI_1}{dt} \qquad (5)$$

Shohim se ky tension është proporcional me shpejtësinë e ndërrimit të rrymës primare. Koeficienti L_{21} varet nga gjeometria e qarqeve dhe quhet koeficient i induksionit reciprok për të cilin kemi bërë fjalë në (XIII.8).

d) Vetinduksioni

Të mendojmë qarkun e rrymës nëpër të cilin rrjedh rryma me intensitet I. Kjo rrymë është gjithashtu burim i një fushe magnetike, fluksi i së cilës kalon nëpër sipërfaqen e qarkut të vet. E shprehim në formën:

$$\Phi = \oint \vec{A} \, d\vec{l}$$

Potenciali i kësaj fushe është:

$$\vec{A} = k_m I \oint \frac{d\vec{l}'}{r}$$

Duhet theksuar se për njehsimin e potencialit vektorial qarkun e ndajmë asisoji në elemente të gjatësisë, ashtu që $d\vec{l}$ dhe $d\vec{l}'$ nuk përputhen, sepse në të kundërtën $r = 0$, çka nuk ka kuptim. Për fluks do të kemi:

$$\Phi = k_m I \oint \oint \frac{d\vec{l} \, d\vec{l}'}{r}$$

Faktorin

$$L = k_m \oint \oint \frac{d\vec{l} \, d\vec{l}'}{r} \qquad (6)$$

i cili varet prej formës dhe dimensioneve të qarkut si dhe prej vetive magnetike të mjedisit në të cilin është i vendosur e quajmë koeficient të vetinduksionit. Me ndihmën e tij për fluks do të kemi:

$$\Phi = L I$$

Edhe në këtë rast përderisa rryma në qark nuk ndërron, fluksi mbetet konstant, por ndërrimi i saj, shkakton edhe ndërrimin e fluksit dhe paraqitjen e tensionit të indukuar:

$$U = - L \frac{dI}{dt} \qquad (7)$$

Gjithashtu, tensioni i vetinduksionit është proporcional me shpejtësinë e ndërrimit të intensitetit të rrymës elektrike. Parashenja minus tregon se gjatë zmadhimit të intensitetit të rrymës, tenisoni i vetindukuar ka kahje të kundërt prej zmadhimit të saj. Në rast se rryma në qark dobësohet, tensioni i vetindukuar ka kahje të njëjtë me kahjen e rrymës. Mund të përfundojmë se tensioni i vetindukuar e ka kahjen e atillë që tenton ta kundërshtojë ndërrimin që e ka shkaktuar.

2. EFEKTI I SKINIT

a) Shpërndarja e dendësisë së rrymës

Efekt të Skinit quajmë të dhënën eksperimentale të kalimit të rrymës alternative me frekuencë të lartë nëpër sipërfaqe të përcjellësit. Pra, dendësia e këtyre rrymave nuk është e njëjtë në tërë prerjen tërthore të përcjellësit. Do ta arsyetojmë matematikisht këtë dukuri.

Le të jetë $\vec{j}$ dendësia e rrymës e cila rrjedh nëpër përcjellësin cilindrik. Kjo rrymë është burim i fushës magnetike për të cilën vlenë ekuacioni:

$$rot\,\vec{H} = \vec{j} \tag{1}$$

Meqë kjo është e ndryshuar, e indukon fushën elektrike të përshkruar me ekuacionin:

$$rot\,\vec{E} = -\mu\,\dot{\vec{H}} \tag{2}$$

Meqë $\vec{j} = \sigma\,\vec{E}$, do të kemi:

$$rot\,\vec{j} = -\mu\sigma\,\dot{\vec{H}} \tag{3}$$

Që të fitojmë ekuacionin diferencial sipas $\vec{j}$, duhet të eliminojmë nga (1) dhe (3) vektorin $\vec{H}$. Kërkojmë edhe një herë rotorin e (3):

$$rot\,rot\,\vec{j} = -\mu\sigma\,rot\,\dot{\vec{H}}$$

E zbërthejmë rotorin e dyfishtë dhe marrim në konsiderim se

$$div\,\vec{j} = 0$$

Do të kemi:

$$rot\,rot\,\vec{j} = grad\,div\,\vec{j} - \Delta\vec{j} = -\Delta\vec{j}$$

Zëvendësojmë (1) dhe fitojmë ekuacionin diferencial të ndërrimit të dendësisë së rrymës:

$$\Delta j = \mu\sigma\,\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} \tag{4}$$

Ne kërkojmë atë zgjidhje të këtij ekuacioni e cila i përgjigjet simetrisë cilindrike, sepse kërkojmë shpërndarjen e dendësisë së rrymës në përcjellësin cilindrik. Për këtë arsye ekuacionin (4) do ta shkruajmë në koordinata cilindrike dhe marrim në konsiderim se dendësia varet vetëm prej koordnatës r dhe kohës t. Për këtë rast ekuacioni (4) e merr formën:

$$\frac{\partial^2 \vec{j}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{j}}{\partial r} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \tag{5}$$

Le të ndërrojë rryma alternative si funksion harmonik i kohës. Atëherë dendësinë e saj mund ta shprehim në formën:

$$j = f(r)\, e^{i\omega t}$$

dhe duhet të përcaktojmë varshmërinë prej r. E zëvendësojmë në (5) dhe do të kemi:

$$f'' + \frac{1}{r} f' - i\omega\sigma\mu f = 0 \tag{6}$$

Do të shënojmë shkurtimisht me

$$2p^2 = \mu\omega\sigma \tag{7}$$

dhe paraqesim ndryshoren e re

$$x = pr\sqrt{-2i} \tag{8}$$

Që të kalojmë në ndryshore të re, duhet të njehsojmë:

$$f' = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dr} = \frac{df}{dx}\, p\sqrt{-2i}$$

$$f'' = \frac{d^2f}{dx^2}\, p\,(-2i)$$

Fitojmë ekuacionin:

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{df}{dx} + f = 0 \tag{9}$$

Ky është ekuacioni diferencial i Beselit dhe zgjidhja e tij është funksioni i Beselit i rendit zero:

$$f = A \cdot J_o(x) = A \cdot J_o(pr\sqrt{-2i})$$

ku: A është konstante e integrimit. Për dendësi të rrymës fitojmë:

$$\vec{j} = \vec{A} \cdot J_o(pr\sqrt{-2i})\, e^{i\omega t} \tag{10}$$

Që të përcaktojmë konstanten e integrimit, duhet të dimë amplitudën e dendësisë së rrymës $\vec{j}_o$ në sipërfaqe të përcjellësit. Do ta shënojmë me r_o rrezen e prerjes së tij. Atëherë për $r = r_o$ do të kemi:

$$\vec{j}_o = \vec{A}\, J_o(pr_o\sqrt{-2i})$$

prej nga

$$\vec{A} = \frac{\vec{j}_o}{J_o(pr_o\sqrt{-2i})}$$

E zëvendësojmë në (10):

$$\vec{j} = \frac{j_o J_o(pr\sqrt{-2i})}{J_o(pr_o\sqrt{-2i})} e^{i\omega t} \tag{11}$$

Kjo shprehje e përcakton varshmërinë e dendësisë së rrymës nga qendra e përcjellësit cilindrik.

Këtë do ta diskutojmë për dy raste.

1. Frekuenca është e vogël, ndërsa përcjellësi është i hollë. Atëherë vlen:

$$pr_o = \sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}}\, r_o \ll 1$$

dhe zhvillimi në seri i funksionit të Beselit do të ketë formën:

$$J_o(x) = 1 - \frac{1}{1!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \dots$$

që për rastin tonë:

$$J_o(pr_o\sqrt{-2i}) = 1 + \frac{1}{2}\, i\, p^2 r^2_o - \frac{1}{16}\, p^4 r^4_o + \dots$$

Ky zhvillim përmban anëtarët të cilët janë të vegjël ndaj njëshit dhe si të tillë mund të mos përfillen. Prandaj, mund të marrim se vlen:

$$J_o(pr_o\sqrt{-2i}) = 1$$

dhe meqë vlen:

$$r < r_o$$

aq më parë për

$$J_o(pr\sqrt{-2i}) = 1$$

Pra, dendësia nuk varet nga r, që do të thotë se rrymat e vazhduara dhe me frekuencë të vogël gjatë rrjedhjes shfrytëzojnë tërë prerjen e përcjellësit dhe dendësia e tyre në te është në tërë prerjen e njëjtë. Në këtë rast nuk paraqitet efekti i Skinit.

2. Frekuenca është e lartë dhe përcjellësi është i gjerë. Në këtë rast $pr_o \gg 1$ dhe funksioni i Beselit mund të shprehet në mënyrë asimtotike me ndihmën e funksioneve trigonometrike:

$$J_o(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

ose

$$J_o(pr\sqrt{-2i}) = \sqrt{\frac{2}{\pi pr\sqrt{-2i}}} \cos\left(pr\sqrt{-2i} - \frac{\pi}{4}\right)$$

E dimë se vlen:

$$\sqrt{-2i} = \sqrt{1-2i-1} = \sqrt{(1-i)^2} = 1-i$$

pastaj e shprehim edhe funksionin trigonometrik në formë eksponenciale:

$$J_o(pr\sqrt{-2i}) = \sqrt{\frac{2}{\pi\, pr\sqrt{-2i}}}\; e^{i\left[pr(1-i)-\frac{\pi}{4}\right]}$$

ose

$$J_o(pr\sqrt{-2i}) = \sqrt{\frac{2}{\pi\, pr\sqrt{-2i}}}\; e^{pr}\, e^{i\left(pr-\frac{\pi}{4}\right)}$$

dhe nga (11) fitojmë:

$$\vec{j} = \vec{j}_o \sqrt{\frac{r_o}{r}}\; e^{-p(r_o-r)}\; e^{i[\omega t - p(r_o-r)]} \tag{12}$$

Do të shënojmë me a largësinë e vendit nga sipërfaqja e përcjellësit. Atëherë $a = r_o - r$ dhe pjesa reale e (12) shprehet në formën:

$$\vec{j} = \vec{j}_o \sqrt{\frac{r_o}{r_o - a}}\; e^{-pa} \cos(\omega t - pa) \tag{13}$$

Kjo shprehje tregon se dendësia e rrymës zvogëlohet sikurse faktori e^{-pa} në pikat e larguara nga sipërfaqja e përcjellësit. Dendësia e rrymës është më e madhe në sipërfaqe dhe zvogëlohet kah boshti i tij.

b) Rezistenca e përcjellësit

Kjo shpërndarje e dendësisë së rrymës në prerjen tërthore të telit tregon se rezistenca për rrymë alternative të frekuencës së lartë ndryshon nga rezistenca e rrymave të vazhduara dhe ato me frekuencë të vogël, sepse të parat shfrytëzojnë vetëm shtresën sipërfaqësore me rrethinën e saj më të afërt.

Do ta përcaktojmë rezistencën e telit, duke u bazuar në nxehtësinë e Xhulit:

$$Q = R\,\overline{I^2}$$

Meqë rryma gjatë kohës ndërron, duhet të marrim vlerën mesatare të saj gjatë një periode. Pra, për rezistencë kemi:

$$R = \frac{Q}{\overline{I^2}} \tag{14}$$

Që ta zbatojmë këtë shprehje, duhet të njehsojmë Q dhe $\overline{I^2}$. Nxehtësia të cilën e liron përcjellësi në njësi të kohës dhe në njësi të vëllimit është $\overline{j}^2/\sigma$, ndërsa nxehtësia në njësi të gjatësisë së telit gjatë kësaj kohe është:

$$Q = \int_0^{r_o} 2\pi r \frac{\overline{j^2}}{\sigma} dr$$

Shfrytëzojmë (13)

$$\overline{j^2} = \overline{j^2_o} \left(\frac{r_o}{r}\right) e^{-2p(r_o - r)} \overline{\cos^2 [\omega t - p(r_o - r)]}$$

Vlera mesatare e katrorit të kosinusit është 1/2, prandaj:

$$\overline{j^2} = j^2 \left(\frac{r_o}{2r}\right) e^{-2p(r_o - r)}$$

Për nxehtësi do të kemi:

$$Q = 2\pi \frac{j^2_o}{2\sigma} r_o \int_0^{r_o} e^{-2p(r_o - r)} dr = \frac{\pi j^2_o r_o}{2p\sigma} (1 - e^{-2pr_o})$$

Meqë prodhimi pr_o është i madh, në këtë shprehje mund të mos e përfillim eksponencialin. Fitojmë:

$$Q = \frac{\pi j^2_o r_o}{2p\sigma} \qquad (15)$$

Për njehsimin e vlerës mesatare të katrorit të intensitetit të rrymës fillojmë nga shprehja:

$$I = \int \vec{j}\, d\vec{S} = \int_0^{r_o} j\, 2\pi\, r\, dr$$

Shfrytëzojmë (12):

$$I = 2\pi\, j_o \sqrt{r_o} \int_0^{r_o} \sqrt{r}\, e^{-pa} e^{i(\omega t - pa)} dr$$

Në vend të ndryshores r e paraqesim ndryshoren e re:

$$a = r_o - r$$

dhe fitojmë:

$$I = 2\pi\, j_o \sqrt{r_o} \int_0^{r_o} \sqrt{r_o - a}\, e^{-pa} e^{i(\omega t - pa)} da$$

Pasi që me rritjen e a funksioni nën integral shumë shpejt zvogëlohet, pa ndonjë gabim të madh mund të mos e përfillim nën rrënjë anëtarin $- a$. Parashenjën nuk e shkruajmë, sepse kërkojmë I^2:

$$I = 2\pi\, j_o\, r_o\, e^{i\omega t} \int_0^{r_0} e^{-pa(1+i)}\, da$$

E integrojmë:

$$I = 2\pi\, j_o\, r_o\, e^{i\omega t}\, \frac{e^{-pr_o(1+i)} - 1}{-\,p(1+i)}$$

Prapë mund të mos e përfillim faktorin eksponencial, sepse është tepër i vogël. Mbetet:

$$I = \frac{2\pi\, j_o\, r_o}{p(1+i)}\, e^{i\omega t}$$

E shumëzojmë me $(1 - i)$:

$$I = \frac{2\pi\, j_o\, r_o}{2p}\, (1 - i)\, e^{i\omega t}$$

ose

$$I = \frac{\pi\, j_o\, r_o}{p}\, (\cos\omega t + i \sin\omega t - \cos\omega t + \sin\omega t)$$

Nga kjo shprehje duhet të marrim vetëm pjesën reale:

$$I = \frac{\pi\, j_o\, r_o}{p}\, (\cos\omega t + \sin\omega t) \qquad (16)$$

E ngrisim në katror:

$$I^2 = \frac{\pi^2\, j^2_o\, r^2_o}{p^2} (\cos^2\omega t + \sin 2\omega t + \sin^2\omega t)$$

Nga kjo shprehje kërkojmë vlerën mesatare kohore gjatë një periode. Meqë $\overline{\cos^2\omega t} = \overline{\sin^2\omega t} = 1/2$ dhe $\sin \overline{2\omega t} = 0$ fitojmë:

$$\overline{I^2} = \frac{\pi^2\, j^2_o\, r^2_o}{p^2} \qquad (17)$$

I zëvendësojmë shprehjet (15) dhe (17) në (14) dhe për rezistencë do të fitojmë:

$$R = \frac{p}{2\pi\, r_o \sigma} \qquad (18)$$

Sikur rryma e vazhduar të rrjedhte nëpër shtresën sipërfaqësore të telit me trashësi d, njësia e gjatësisë do të kishte rezistencën:

$$R = \frac{1}{\sigma S}$$

ku: S — është sipërfaqja e shtresës së telit nëpër të cilën rrjedh rryma. Kjo sipërfaqe është:

$$S = 2\pi\, r_o d$$

dhe për rezistencë fitohet shprehja:

$$R = \frac{1}{2r_o\, \pi\sigma d}$$

E krahasojmë me shprehjen (18) për rezistencë të rrymës alternative. Shohim se në te në vend të d qëndron $1/p$, prandaj teli kësaj rryme i paraqet rezistencë të cilën rrymës së vazhduar do t'ia paraqitte shtresa sipërfaqësore me trashësi:

$$d = \frac{1}{p} = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}} \qquad (19)$$

Ky rezultat tregon se trashësia e shtresës sipërfaqësore të telit është më e vogël, nëse rryma e ka frekuencën e madhe. Pastaj kjo trashësi varet edhe prej përçueshmërisë specifike të materialit të përcjellësit σ. Sa më e mirë të jetë kjo përçueshmëri, aq më e vogël është shtresa.

3. EKUACIONI I MAKSUELIT

a) Ekuacioni i kontinuitetit

Ekuacioni i kontinuitetit shpreh matematikisht ligjin e ruajtjes së asaj madhësie për të cilën vlen. Në teori të elektricitetit ekziston madhësia për të cilën vlen ekuacioni i kontinuitetit. Kjo është sasia e elektricitetit.

Që të përfitojmë ekuacionin e kontinuitetit për sasi të elektricitetit, të mendojmë një sipërfaqe të mbyllur, e cila në vetvete përmban sasinë e elektricitetit:

$$q = \int \rho d\tau$$

Nëse gjatë kohës kjo sasi ndërron, atëherë kjo është e mundur vetëm nëse nëpër sipërfaqe kalon elektriciteti. Sasia e elektricitetit e cila në njësi të kohës kalon nëpër sipërfaqe mund të njehsohet sipas shprehjes

$$\oint \vec{j}\, d\vec{S}$$

ku: j — është sasia e elektricitetit e cila kalon nëpër njësi të sipërfaqes.

Ligjin e ruajtjes mund ta shprehim kësisoji:

$$-\dot{q} = \oint \vec{j}\, d\vec{S}$$

Parashenja minus tregon se gjatë rrymimit të elektricitetit nëpër sipërfaqe sasia e mbetur brenda saj zvogëlohet. Nga shprehja e parë dhe e tretë fitojmë:

$$\int \dot{\rho} d\tau + \oint \vec{j} d\vec{S} = 0$$

E shndërrojmë integralin e anës së djathtë në vëllimore:

$$\int \dot{\rho} d\tau + \int div\,\vec{j}\, d\tau = 0$$

Këtë mund ta shkruajmë në një integral dhe që të jetë i kënaqur për çfarëdo vëllimi në të cilin gjendet elektriciteti duhet të vlejë:

$$\dot{\rho} + div\,\vec{j} = 0 \qquad (1)$$

Kjo shprehje paraqet ligjin për ruajtjen e sasisë së elektricitetit dhe njihet si ekuacion i kontinuitetit në elektrodinamikë.

b) Ekuacioni I i Maksuelit

Për fushë magnetike të rrymës elektrike vlen ekuacioni:

$$rot\,\vec{H} = \vec{j}$$

Kërkojmë divergjencën e kësaj shprehje:

$$div\,rot\,\vec{H} = div\,\vec{j}$$

Meqë divergjenca e rotorit indentikisht është e barabartë me zero, rrjedhë:

$$div\,\vec{j} = 0 \qquad (2)$$

Kjo shprehje tregon se rryma elektrike e ka fushën pa burime. Pra, vijat e vektorit të dendësisë së rrymës duhet në vetvete të jenë të mbyllura. Kjo është shprehja matematike e faktit të njohur se rryma elektrike mund të rrjedhë vetëm kur kemi qark të mbyllur të përcjellësit.

E dimë nga kursi i përgjithshëm se rryma alternative kalon edhe nëpër kondensator, kur në mes të pllakave të tij gjendet izolatori. Prandaj, përfundimi ynë është i saktë vetëm te rrymat e vazhduara. Për rryma të cilat ndryshojnë gjatë kohës shprehje (2) nuk mund të vlejë dhe me këtë nuk vlen as shprehja për fushë magnetike të rrymës prej së cilës e kemi përfituar (2). Për këtë arsye shprehjen për fushë magnetike të rrymës duhet disi ta plotësojmë.

E dimë se

$$div\,\vec{D} = \rho$$

E zëvendësojmë në ekuacionin e kontinuitetit dhe do të kemi:

$$div\,(\dot{\vec{D}} + \vec{j}) = 0$$

Pra, nuk qenka dendësia e rrymës ajo madhësi fusha e së cilës nuk ka burime, por madhësia:

$$\vec{J} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$$

Prandaj këtë do ta shkruajmë në anën e djathtë të shprehjes për fushë magnetike:

$$rot\,\vec{H} = \vec{j} + \vec{D} \quad (3)$$

Ky ekuacion diferencial shpreh lidhshmërinë në mes të fushës magnetike dhe burimeve të saj. Burime të fushës nuk janë vetëm rrymat elektrike në përcjellës $\vec{j}$, por edhe ndërrimet kohore të indukcionit elektrik. Pra, edhe kur gjatë kohës ndërron induksioni elektrik, ky ndërrim shkakton paraqitjen e një fushe magnetike shtjellore.

Ekuacioni (3) është gjithashtu njëra prej shprehjeve themelore për fushë elektromagnetike dhe njihet si ekuacion I i Maksuelit.

c) Sistemi i ekuacioneve të Maksuelit

Tani mund të shkruajmë sistemin e ekuacioneve diferenciale të cilat i paraqiti Maksueli dhe të cilat mbajnë emrin e tij. Këto janë: ekuacioni (3), ekuacioni (XIV.1.2) dhe ekuacionet të cilat përcaktojnë intensitetin e burimeve të fushës elektrike dhe magnetike. Ky sistem shprehet me këto ekuacione:

$$\begin{aligned} rot\,\vec{H} &= \vec{j} + \dot{\vec{D}} \\ rot\,\vec{E} &= -\dot{\vec{B}} \\ div\,\vec{D} &= \rho \\ div\,\vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Shohim se këto ekuacione shprehin lidhmërinë në mes të vektorëve $\vec{E}$ dhe $\vec{D}$, të cilët janë karakteristik për fushë elektrike me vektorët $\vec{H}$ dhe $\vec{B}$ të cilët janë karakteristik për fushë magnetike. Këta vektorë janë të lidhur me ekuacionet e Maksuelit dhe mund të përfundojmë se nuk ekziston fusha elektrike e ndarë nga fusha magnetike, por ekziston një

fushë e përbashkët elektromagnetike. Vetëm te fushat statike $\dot{\vec{D}} = 0$ dhe $\dot{\vec{B}} = 0$ dhe vektorët e fushës elektrike mund të ndahen prej vektorëve të fushës magnetike. Pra, këto fusha mund të ndahen vetëm kur nuk ndërrojnë gjatë kohës.

Ekuacionet (4) paraqesin ekuacionet themelore diferenciale të fushës elektromagnetike, sepse ato plotësisht e përcaktojnë këtë.

Në ekuacionet e Maksuelit paraqiten katër vektorë, por nuk janë plotësisht të pavarur në mes vete. Prandaj, do t'i shkruajmë shprehjet të cilat i lidhin këta vektorë të fushës:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \vec{j} &= \sigma \vec{E} \end{aligned} \tag{5}$$

Këto ekuacione të lidhjes përmbajnë madhësitë ε, μ dhe σ, të cilat janë karakteristike për mjedisin në të cilin formohet fusha. Në mjedise homogjene dhe izotrope këto paraqesin konstante skalare. Sikurse do të shohim më vonë, ky është vetëm përafrim dhe formulat të cilat i kemi shfrytëzuar nga fushat statike, mund të shfrytëzohen vetëm për fusha të cilat ndërrojnë ngadalë gjatë kohës. Për fusha të cilat ndryshojnë shumë shpejt gjatë kohës duhet të merret se këto madhësi varen prej frekuencës së ndërrimit të fushës. Tani për tani do t'i shfrytëzojmë shprehjet e formës (5).

Me ndihmën e sistemit (5) ekuacionet e Maksuelit mund t'i shkruajmë në formën që vijon:

$$\begin{aligned} rot\,\vec{H} &= \sigma \vec{E} + \varepsilon \dot{\vec{E}} \\ rot\,\vec{E} &= -\mu \dot{\vec{H}} \\ div\,\vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon} \\ div\,\vec{H} &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Në këto ekuacione paraqiten vetëm dy vektorë, vektorët E dhe H. Sikurse e dimë fusha vektoriale është e përcaktuar me shpërndarjen e rotorit dhe divergjencës së vet, prandaj sistemi (6) plotësisht e përcakton fushën elektromagnetike.

d) Kondidat kufitare për vektorët e fushës elektromagnetike

Të mendojmë se në fushë elektromagnetike gjendet një sipërfaqe e cila i ndan dy mjedise me veti të ndryshme materiale. Fusha elektromagnetike kalon nga njeri mjedis në tjetrin, prandaj edhe vektorët e saj në sipërfaqe kufitare duhet të kënaqin disa kondita.

Për vektorë të fushës vlen sistemi i ekuacioneve të Maksuelit (4). Së pari do të shqyrtojmë ekuacionin e fundit të këtij sistemi:

$$div\,\vec{B} = 0$$

të cilin do ta integrojmë nëpër vëllim të caktuar:

$$\int div\,\vec{B}\,d\tau = 0$$

Këtë integral e shndërrojmë në integral sipërfaqësor me ndihmën e teoremës së Gausit:

$$\oint \vec{B}\,d\vec{S} = 0$$

ose

$$\oint B_n\,dS = 0 \qquad (7)$$

Këtu me B_n e kemi shënuar komponenten e induksionit magnetik, e cila qëndron normal ndaj elementit dS të sipërfaqes kufitare.

Tani duhet të zgjedhim sipërfaqen e integrimit të atillë që të mund të kryejmë lehtë kalimin në sipërfaqe kufitare. Do të zgjedhim sipërfaqen e cilindrit njëra bazë e të cilit gjendet mbi sipërfaqe kufitare, ndërsa tjetra nën te sikurse tregon figura 72. Edhe në këtë rast supozojmë se bazat e cilindrit janë dS, ndërsa lartësia e tij është $2dn$, ashtu që njëra lartësi dn gjendet mbi sipërfaqe kufitare, ndërsa tjetra nën te. Me indeks 1 do t'i shënojmë komponentet e vektorëve të fushës mbi sipërfaqe kufitare, ndërsa me indeks 2 komponentet për vektorë nën te. Integrimi (7) nëpër sipërfaqe të mbyllur është i barabartë:

$$B_{1n}dS - B_{2n}dS + (B_{1t} + B_{2t})\,l\,dn = 0 \qquad (8)$$

Me indeks n i kemi shënuar komponentet normale ndaj sipërfaqes kufitare, ndërsa me indeks t komponentet tangjenciale në te. Parashenja minus duhet të shkruhet, sepse si kahje pozitive e normales merret normalja nga sipërfaqja kah pjesa e jashtme, kurse nga fig. 72 shihet se ka kahje të kundërt ndaj normales në hapësirën 1. Në anëtarin e tretë l është perimetri i bazës së cilindrit, ashtu që sipërfaqja e mbështjellësit do të jetë $l\,dn$.

Nëse dëshirojmë që cilindri të përmbajë vetëm sipërfaqen kufitare, atëherë duhet të kryejmë kalimin kufitar $dn \to 0$. Fitojmë:

$$B_{1n} = B_{2n} \qquad (9)$$

Kjo konditë tregon se komponentet normale të induksionit magnetik e kalojnë sipërfaqen kufitare në mënyrë të vazhduar.

Në vazhdim do të shqyrtojmë ekuacionin e tretë të sistemit (4),

$$div\,\vec{D} = \rho$$

të cilin gjithashtu do ta integrojmë nëpër vëllim të caktuar. Pasi ta shndërrojmë integrimin vëllimor në atë sipërfaqësor, fitojmë:

$$\oint D_n \, dS = \int \rho d\tau \tag{10}$$

Edhe në këtë rast e kryejmë integrimin nëpër sipërfaqe të cilindrit sikurse tregon fig. 72. Në anën e majtë fitohen shprehje të ngjashme sikurse në (8), ndërsa djathtas paraqitet shprehja $2 \cdot dS\, dn$, sepse vëllimi i cilindrit është $2\, dS\, dn$. Pra,

$$D_{1n} dS - D_{2n} dS + (D_{1t} + D_{2t})\, l\, dn = 2\, \rho dS\, dn \tag{11}$$

Edhe në këtë rast duhet të kryejmë kalimin kufitar për $dn \to 0$. Në anën e majtë anëtari i tretë është i barabartë me zero, ndërsa në anën e djathtë dendësia e elektricitetit kalon në dendësi sipërfaqësore, ashtu që mund të shkruajmë $2\, \rho dn \to \sigma$. Nga (11) fitojmë:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma \tag{12}$$

Sipas kësaj kondite komponentja normale e induksionit elektrik në sipërfaqen kufitare ka kërcim për madhësinë e dendësisë sipërfaqsore të elektricitetit. Kuptohet se, nëse në sipërfaqe nuk ka elektricitet, $\sigma = 0$ dhe ky kërcim nuk do të paraqitet.

Kalojmë në shqyrtimin e ekuacionit të dytë të sistemit (4):

$$rot\, \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

E integrojmë nëpër ndonjë sipërfaqe:

$$\int rot\, \vec{E}\, d\vec{S} = - \int \dot{\vec{B}}\, d\, \vec{S}$$

E shndërrojmë anën e majtë sipas teoremës së Stoksit në integral vijor, nëpër vijë të mbyllur, e cila e kufizon sipërfaqen e dhënur:

$$\oint \vec{E}\, d\, \vec{r} = - \int \dot{\vec{B}}\, d\, \vec{S} \tag{13}$$

Edhe në këtë rast duhet të zgjedhim vijën e integrimit të atillë, që në kalimin kufitar të kalojë në kufirin e dy mjediseve. Në fig. 73 është vizatuar prerja e këtij kufiri me rrafshin e vizatimit dhe vija e mbyllur, elementi dr i së cilës gjendet në të njëjtën largësi mbi dhe nën sipërfaqe kufitare. Të dy elementet e rrugës dr janë të lidhura me dy elemente në kahje normale të sipërfaqes kufitare ose më saktësisht të cilat shumë pak dallojnë nga kahja e normales në sipërfaqe kufitare. Le të jenë këto gjatësi dl që në vizatim janë paraqitur me $2dn$. Pasi të kryejmë integrimit nëpër rrugë të cekur të shprehjes (13), fitojmë:

$$E_{1t}\, dr - E_{2t} dr + dl.\ \text{kontributi në kahje normale} = - \dot{B}_t\, dr\, dl \tag{14}$$

Në anëtarin e dytë duhet të shkruajmë parashenjën minus që të tregojmë se elementet e rrugës dr kanë kahje të kundërt në mjediset e ndara me sipërfaqe kufitare. Në anën tjetër, djathtas është shkruar elementi i sipërfaqes. Sikurse edhe në rastet e mëparshme edhe tani duhet të kryejmë kalimin kufitar për $dl \to 0$. Fitojmë:

$$E_{1t} = E_{2t} \tag{15}$$

Kuptojmë se komponentet tangjenciale të vektorit të fushës elektrike kalojnë nëpër sipërfaqe kufitare në mënyrë të vazhduar.

Më në fund ka ngelur që të shqyrtojmë edhe ekuacionin e parë të sistemit (4). Pas integrimit nëpër sipërfaqe dhe zbatimit të teoremës së Stoksit mund ta shkruajmë në formën:

$$\oint \vec{H}\, d\vec{r} = \int \vec{j}\, d\vec{S} + \int \dot{\vec{D}}\, d\vec{S} \qquad (16)$$

Integrimi vijor nëpër rrugën e paraqitur në fig. 73 do të ketë formën:

$$H_{1t}\, dr - H_{2t} dr + dl \cdot \text{kontributi në kahje normale} =$$

$$= j_n dr\, dl + \dot{D}_n\, dr\, dl$$

Në kalimin kufitar $dl \rightarrow 0$, anëtarët e fundit në të dy anët janë të barabartë me zero, nëdrsa $j_n\, dl$ kalon në dendësi sipërfaqësore të rrymës j_S. Do të fitojmë:

$$H_{1t} - H_{2t} = j_S \qquad (17)$$

Shprehja e fundit tregon se komponentet tangjenciale të fushës magnetike në sipërfaqe kufitare fitojnë kërcim i cili i përgjigjet dendësisë sipërfaqësore të rrymës. Për kufi të dy izolatorëve, apo për mungesë të rrymës në sipërfaqe kufitare, do të vlejë:

$$H_{1t} = H_{2t} \qquad (18)$$

Në këtë rast komponentat e kalojnë këtë sipërfaqe në mënyrë të vazhduar.

4. ENERGJIA E FUSHËS ELEKTROMAGNETIKE

Në (XII.19.4) dhe (XIII.8.11) kemi fituar dendësitë e energjisë së fushës elektrike dhe magnetike. Shuma e këtyre dendësive është:

$$W = \frac{1}{2}\, \varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\, \mu H^2 \qquad (1)$$

Derivati sipas kohës i kësaj madhësie është:

$$\dot{W} = \varepsilon \vec{E} \dot{\vec{E}} + \mu \vec{H} \dot{\vec{H}}$$

Nga ekuacionet e Maksuelit (XIV.3.6) rrjedh:

$$\varepsilon \dot{\vec{E}} = rot\, \vec{H} - \sigma \vec{E}$$

$$\mu \dot{\vec{H}} = - rot\, \vec{E}$$

I zëvendësojmë këto vlera:

$$\dot{W} = \vec{E}\, rot\, \vec{H} - \vec{H}\, rot\, \vec{E} - \sigma E^2$$

Dy anëtarët e parë të anës së djathtë mund të shkruhen në formën $-\,div\,(\vec{E} \times \vec{H})$, prandaj:

$$-\dot{W} = div\,(\vec{E} \times \vec{H}) + \sigma E^2$$

E integrojmë nëpër vëllim dhe në anën e majtë fitojmë ndërrimin e energjisë së fushës në hapësirën të cilën e integrojmë:

$$-\dot{W} = \int div\,(\vec{E} \times \vec{H}) d\tau + \int \sigma E^2 d\tau$$

Integrali i dytë shpreh nxehtësinë e Xhulit Q, ndërsa integralin e parë e shndërrojmë në integral sipërfaqësor:

$$-\dot{W} = \oint (\vec{E} \times \vec{H})\, d\vec{S} + Q$$

Shënojmë shkurtimisht me $\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$ (2)

dhe vektorin e përkufizuar në këtë mënyrë e quajmë vektor të Pointingut. Me ndihmën e tij fitojmë përfundimisht:

$$-\dot{W} = \oint \vec{N}\, d\vec{S} + Q \qquad (3)$$

Ky ekuacion shpreh teoremën e Pointingut.

Integrali në anën e djathtë paraqet fluksin e vektorit të Pointingut. Në bazë të kësaj vektorin $\vec{N}$ mund ta mendojmë si dendësi të rrymimit të energjisë. Prandaj, duhet të përfundojmë se elektriciteti i cili gjendet në vëllimin e shqyrtuar emiton energji në rrethinën e vet. Vektori i Pointingut paraqet dendësinë e energjisë së rrezatuar. Kjo është energjia e cila në njësi të kohës kalon nëpër njësi të sipërfaqes kufitare. Fluksi total paraqet tërë energjinë e cila në njësi të kohës kalon nëpër sipërfaqen e vëllimit të fushës.

Formula (3) tregon se ndërrimi i energjisë brenda sipërfaqes në njësi të kohës është i barabartë me shumën e energjisë e cila në njësi të kohës e lëshon atë hapësirë dhe nxehtësisë së Xhulit e cila zhvillohet në te.

5. ENERGJIA ELEKTROMAGNETIKE E VEPRIMIT RECIPROK

Të shqyrtojmë dy fusha elektromagnetike me vektorët $\vec{E}_1$, $\vec{B}_1$ dhe $\vec{E}_2$, $\vec{B}_2$. Energjia e kësaj fushe elektromagnetike njehsohet sipas shprehjes:

$$W = \frac{1}{2} \int [\varepsilon(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 + \frac{1}{\mu} (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)^2] d\tau \qquad (1)$$

E zbërthejmë këtë shprehje:

$$W = \frac{1}{2} \int [\varepsilon(E^2_1 + 2\vec{E}_1\vec{E}_2 + E^2_2) + \frac{1}{\mu} (B^2_1 + 2\vec{B}_1\vec{B}_2 + B^2_2)]\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \int (\varepsilon E^2_1 + \frac{1}{\mu} B^2_1)\, d\tau + \frac{1}{2} \int (\varepsilon E^2_2 + \frac{1}{\mu} B^2_2) d\tau + \int (\vec{E}_1\vec{E}_2 +$$

$$+ \frac{1}{\mu} \vec{B}_1\vec{B}_2) d\tau$$

dhe mund ta shkruajmë në formën:

$$W = W_1 + W_2 + W_{12} \quad (2)$$

ku:

$$W_1 = \frac{1}{2} \int (\varepsilon E^2_1 + \frac{1}{\mu} B^2_1) d\tau, \qquad W_2 = \frac{1}{2} \int (\varepsilon E^2_2 + \frac{1}{\mu} B^2_2) d\tau$$

$$W_{12} = \int (\vec{E}_1\vec{E}_2 + \frac{1}{\mu} \vec{B}_1\vec{B}_2) d\tau \quad (3)$$

Këtu W_1 paraqet energjinë e fushës së parë, W_2 energjinë e fushës së dytë, nëdrsa W_{12} energjinë e veprimit reciprok të dy fushave. Për ndryshim të energjisë vetjake të fushës elektromagnetike, e cila gjithmonë është pozitive, energjia e veprimit reciprok të dy fushave mund të jetë si pozitive ashtu edhe negative.

Kuptojmë gjithashtu nga (3) se energjia e dy fushave elektromagnetike nuk është e barabartë me shumën e energjive të tyre që do të thotë se energjia e fushës elektromagnetike nuk gëzon vetinë e aditivitetit. Duke u bazuar në shprehjen:

$$\varepsilon(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)^2 + \frac{1}{\mu} (\vec{B}_1 - \vec{B}_2)^2 \geqslant 0$$

rrjedh;

$$\frac{1}{2} \left(\varepsilon E^2_1 + \frac{1}{\mu} B^2_1\right) + \frac{1}{2} \left(\varepsilon E^2_2 + \frac{1}{\mu} B^2_2\right) \geqslant \varepsilon\vec{E}_1\vec{E}_2 + \frac{1}{\mu} \vec{B}_1\vec{B}_2$$

Nëse i integrojmë të dy anët dhe shfrytëzojmë (3), do të kemi:

$$W_1 + W_2 \geqslant W_{12} \quad (4)$$

Kjo shprehje tregon se energjia e veprimit reciprok të dy fushave elektromagnetike nuk mund të jetë më e madhe se shuma e energjive të fushave të veçuara.

6. FORCA E FUSHËS ELEKTROMAGNETIKE

Do të shqyrtojmë forcën me të cilën fusha elektromagnetike vepron në grimca të elektrizuara. Puna e forcës kryhet në llogari të energjisë së fushës elektromagnetike.

Supozojmë se elektriciteti është i shpërndarë në mënyrë të vazhduar në vëllim të caktuar. E ndajmë si zakonisht këtë në elemente të vogla $d\tau$. Në këtë element gjendet sasia e elektricitetit dq për të cilën supozojmë se lëviz me shpejtësi $\vec{v}$. Fusha elektromagnetike vepron në këtë sasi elektriciteti me forcën e përcaktuar me (XIII.12.8):

$$d\vec{F} = dq\,\vec{E} + dq\,(\vec{v} \times \vec{B}) \qquad (1)$$

shfrytëzojmë shprehjet $dq = \rho d\tau$ dhe (XIII.1.4) $\vec{j} = \rho\,\vec{v}$ dhe pasi t'i zëvendësojmë në (1) fitojmë:

$$d\vec{F} = \rho d\tau \cdot \vec{E} + \rho d\tau\,(\vec{v} \times \vec{B}) = [\rho\,\vec{E} + (\vec{j} \times \vec{B})]d\tau \qquad (2)$$

E integrojmë nëpër vëllim në të cilin është elektriciteti i shpërndarë dhe fitojmë forcën me të cilën fusha elektromagnetike vepron në sistem të elektricitetit të shqyrtuar;

$$\vec{F} = \int [\rho\,\vec{E} + (\vec{j} \times \vec{B})]d\tau \qquad (3)$$

Shprehja nën integral paraqet forcën në njësi të vëllimit dhe, nëse e shënojmë me $\vec{f}$, do të kemi:

$$\vec{F} = \int \vec{f}\, d\tau$$

ku është:

$$\vec{f} = \rho\,\vec{E} + (\vec{j} \times \vec{B}) \qquad (4)$$

Supozojmë se mjedisi është homogjen në vëllimin e shqyrtuar. Do të shfrytëzojmë sistemin e ekuacioneve të Maksuelit për transformimin e (4). Nga ekuacioni I dhe III i sistemit (XIV.3.4) kemi:

$$\vec{f} = \varepsilon\,\vec{E}\,div\,\vec{E} + \frac{1}{\mu}(rot\,\vec{B} - \varepsilon\mu\,\dot{\vec{E}}) \times \vec{B} \qquad (5)$$

Anëtarin e fundit të kësaj shprehje mund ta transformojmë në formën:

$$-\varepsilon\,\dot{\vec{E}} \times \vec{B} = -\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \times \dot{\vec{B}}\right] = -\varepsilon\mu\,\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{H}) - \varepsilon\vec{E} \times rot\,\vec{E}$$

dhe (5) do të jetë:

$$\vec{f} = \varepsilon \vec{E}\, div\, \vec{E} - \frac{1}{\mu} \vec{B} \times rot\, \vec{B} - \varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{H}) - \varepsilon \vec{E} \times rot\, \vec{E}$$

ose:

$$f = \varepsilon (\vec{E}\, div\, \vec{E} - \vec{E} \times rot\, \vec{E}) - \frac{1}{\mu} \vec{B} \times rot\, \vec{B} - \varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{H}) \qquad (6)$$

Kjo shprehje e përcakton forcën në njësi të vëllimit si funksion të intensitetit të fushës elektrike dhe magnetike. Anëtari i parë tregon ndikimin e fushës elektrike, i dyti ndikimin e fushës magnetike, ndërsa i treti ndikimin e të dyjave njëkohësisht. Meqë nga ekuacioni IV i sistemit (XIV.3.4) vlen $div\, \vec{B} = 0$ shprehjes së mëparshme mund t'i shtojmë anëtarin $\frac{1}{\mu} \vec{B}\, div\, \vec{B}$ dhe fitojmë, pasi t'i shënojmë anëtarët me simbolet:

$$\vec{f}_1 = \varepsilon(\vec{E}\, div\, \vec{E} - \vec{E} \times rot\, \vec{E}) + \frac{1}{\mu} (\vec{B}\, div\, \vec{B} - \vec{B} \times rot\, \vec{B})$$

$$\vec{f}_2 = \varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{H}) = \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{N}}{\partial t}$$

kurse nga (3) fitojmë forcën me të cilën fusha elektromagnetike vepron në elektricitetin e shqyrtuar:

$$\vec{F} = \int \vec{f}\, d\tau = \int \vec{f}_1\, d\tau - \int \vec{f}_2\, d\tau \qquad (7)$$

7. TENZORI I TENSIONIT TË MAKSUELIT

Do të tregojmë në vazhdim se ndikimi i forcës së shqyrtuar në mësimin e mëparshëm në sipërfaqen kufitare S të vëllimit të caktuar manifestohet në formë të forcës sipërfaqësore. Për këtë do të shqyrtojmë anëtarin e parë të (XIV.6.7), të cilin do ta shënojmë me F_1. Pra,

$$\vec{F}_1 = \int \vec{f}_1\, d\tau \qquad (1)$$

Këtë integral vëllimor do ta shndërrojmë në sipërfaqësor. Komponenta e saj x është:

$$F_{1x} = \int f_{1x}\, d\tau = \int \{\varepsilon[E_x\, div\, \vec{E} - (\vec{E} \times rot\, \vec{E})_x] + \frac{1}{\mu} [B_x\, div\, \vec{B} - (\vec{B} \times rot\, \vec{B})_x]\} d\tau \qquad (2)$$

Meqë çdo njëra prej shprehjeve në kllapa të mesme është e formës $K_x \, div \, \vec{K} - (\vec{K} \times rot \, \vec{K})_x$ e transformojmë këtë shprehje:

$$K_x \, div \, \vec{K} - (\vec{K} \times rot \, \vec{K})_x = K_x \, div \, \vec{K} - (K_y \, rot_z \vec{K} - K_z \, rot_y \vec{K}) =$$

$$= K_x \left(\frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z} \right) - K_y \left(\frac{\partial K_y}{\partial y} - \frac{\partial K_x}{\partial y} \right) + K_z \left(\frac{\partial K_x}{\partial z} - \frac{\partial K_z}{\partial x} \right)$$

ose

$$K_x \, div \, \vec{K} - (\vec{K} \times rot \, \vec{K})_x = \frac{\partial}{\partial_x} \left(\frac{1}{2} \; K^2{}_x \right) + \frac{\partial}{\partial_y} (K_x K_y) - K_y \frac{\partial K_x}{\partial_y} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial_z} (K_x K_z) - K_z \frac{\partial K_x}{\partial_z} - \frac{\partial}{\partial_z} \left(\frac{1}{2} \; K^2{}_y \right) + K_z \frac{\partial K_x}{\partial_y} + K_z \frac{\partial K_x}{\partial z} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \; K^2{}_z \right)$$

të cilën mund ta shkruajmë edhe në formën:

$$K_x \, div \, \vec{K} - (\vec{K} \times rot \, \vec{K})_x = \frac{\partial}{\partial_x} \left(K^2{}_x - \frac{1}{2} K^2 \right) + \frac{\partial}{\partial_y} (K_x \, K_y) + \frac{\partial}{\partial_x} (K_x \, K_z) \tag{3}$$

Duke u bazuar në transformimin e fundit, shprehjen (2) e shkruajmë në formën:

$$f_{1x} = \varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial_x} \left(E^2{}_x - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{\partial}{\partial_y} (E_x \, E_y) + \frac{\partial}{\partial_z} (E_x \, E_z) \right] + \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial_x} \left(B^2{}_x - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2} \; B^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (B_x \, B_y) + \frac{\partial}{\partial_z} (B_x \, B_z) \right] = \frac{\partial}{\partial_x} \left[\varepsilon \left(E^2{}_x - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{1}{\mu} \left(B^2{}_x - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2} B^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial_y} \left(\varepsilon \, E_x \, E_y + \frac{1}{\mu} \; B_x \, B_y \right) + \frac{\partial}{\partial_z} \left(\varepsilon \, E_x \, E_z + \frac{1}{\mu} B_x \, B_z \right)$$

Do të shkruajmë shkurtimisht me:

$$T_{11} = \varepsilon \left(E^2{}_x - \frac{1}{2} \; E^2 \right) + \frac{1}{\mu} \left(B^2{}_x - \frac{1}{2} \; B^2 \right) \; ; \; T_{12} = \varepsilon \, E_x \, E_y +$$

$$+ \frac{1}{\mu} B_x \, B_y$$

$$T_{13} = \varepsilon \, E_x \, E_z + \frac{1}{\mu} B_x \, B_z \tag{4}$$

dhe vektorin R_1 (T_{11}, T_{12}, T_{13}). Do të kemi:

$$f_{1x} = \frac{\partial T_{11}}{\partial_x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial_y} + \frac{\partial T_{13}}{\partial_z} = div\,\vec{R}_1 \qquad (5)$$

Integralin vëllimor (2) mund ta shndërrojmë në sipërfaqësor, duke shfrytëzuar teoremë e Gausit për shprehjen (5):

$$F_{1x} = \int div\,\vec{R}_1\,d\tau = \int \vec{R}_1\,d\vec{S} \qquad (6)$$

Në mënyrë të ngjashme për komponentet tjera y dhe z fitojmë komnentët e vektorëve $\vec{R}_2$ dhe $\vec{R}_3$. Do të kemi:

$$T_{21} = \varepsilon\,E_y\,E_x + \frac{1}{\mu}\,B_y\,B_x;\; T_{23} = \varepsilon\,\left(E_{2y} - \frac{1}{2}\,E^2\right) + \frac{1}{\mu}\left(B^2_y - \frac{1}{2}\,B^2\right)$$

$$T_{23} = \varepsilon\,E_y\,E_z + \frac{1}{\mu}\,B_y\,B_z \qquad (7)$$

$$T_{31} = \varepsilon\,E_z\,E_x + \frac{1}{\mu}\,B_z\,B_x;\; T_{32} = \varepsilon\,E_z\,E_y + \frac{1}{\mu}\,B_z\,B_y$$

$$T_{33} = \varepsilon\,\left(E^2_z - \frac{1}{2}\,E^2\right) + \frac{1}{\mu}\left(B^2_z - \frac{1}{2}\,B^2\right) \qquad (8)$$

Për komponent të forcës kemi:

$$F_{1y} = \int \vec{R}_2\,d\vec{S} \quad \text{dhe} \quad F_{1z} = \int \vec{R}_3\,d\vec{S} \qquad (9)$$

I mbledhi të tri komponentët e forcës nga (6) dhe (9) dhe fitojmë:

$$\vec{F}_1 = \vec{i} \int \vec{R}_1\,d\vec{S} + \vec{j} \int \vec{R}_2\,d\vec{S} + \vec{k} \int \vec{R}_3\,d\vec{S}$$

Meqë vlen:

$$d\vec{S} = \vec{n}\,dS$$

ku: $\vec{n}$ — është vektori unitar i normales së jashtme, do të kemi për forcën:

$$\vec{F}_1 = \int [\vec{i}\,(\vec{R}_1 \cdot \vec{n}) + \vec{j}\,(\vec{R}_2 \cdot \vec{n}) + \vec{k}\,(\vec{R}_3 \cdot \vec{n})]\,dS$$

dhe nëse paraqesim vektorin:

$$\vec{P} = \vec{i}\,(\vec{R}_1 \cdot \vec{n}) + \vec{j}\,(\vec{R}_2 \cdot \vec{n}) + \vec{k}\,(\vec{R}_3 \cdot \vec{n}) \qquad (10)$$

fitojmë:

$$\vec{F}_1 = \int \vec{P}\,dS \qquad (11)$$

Shohim se anëtari i parë i (XIV.6.7) prej të cilit kemi filluar në sipërfaqen kufitare të hapësirës së shqyrtuar manifestohet në formë tensioni të formave sipërfaqësore.

Në përgjithësi vektori $\vec{P}$ nuk e ka kahjen e vektorit të normales $\vec{n}$, prandaj do të paraqesim komponentët e këtij vektori, përkatësisht kosinusët e drejtimit të normales së jashtme (α, β, γ). Atëherë nga (10 kemi:

$$\begin{aligned} P_x &= \vec{R}_1 \cdot \vec{n} = T_{11}\alpha + T_{12}\beta + T_{13}\gamma \\ P_y &= \vec{R}_2 \cdot \vec{n} = T_{21}\alpha + T_{22}\beta + T_{23}\gamma \\ P_z &= \vec{R}_3 \cdot \vec{n} = T_{31}\alpha + T_{32}\beta + T_{33}\gamma \end{aligned} \tag{12}$$

Këto ekuacione mund t'i shkruajmë në formë simbolike:

$$\vec{P} = \overline{\overline{T}} \cdot \vec{n} \tag{13}$$

ku: $\overline{\overline{T}}$ — paraqet tenzorin e përcaktuar me skemën e koeficientëve:

$$\overline{\overline{T}} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \tag{14}$$

dhe quhet tenzor i tensionit të fushës elektromagnetike ose tenzor i tensionit të Masuelit dhe e karakterizon gjendjen e tensionit të fushës elektromagnetike në rrethinë të pikës së shqyrtuar.

Duke shfrytëzuar (13) integrali (11) mund të shkruhet në formën:

$$\vec{F}_1 = \int \vec{P}\, dS = \int \overline{\overline{T}}\, \vec{n}\, dS$$

ose

$$\vec{F}_1 = \int \vec{f}_1\, d\tau = \overline{\overline{T}}\, d\vec{S} \tag{15}$$

ndërsa shema (14) në formë eksplicite shkruhet:

$$\overline{\overline{T}} = \begin{pmatrix} \varepsilon\left(E^2{}_x - \frac{1}{2}E^2\right) + \frac{1}{\mu}\left(B^2{}_x - \frac{1}{2}B^2\right) & \varepsilon E_x E_y + \frac{1}{\mu} B_x B_y & \varepsilon E_x E_z + \frac{1}{\mu} B_x z_z \\ \varepsilon E_{y\,x} + \frac{1}{\mu} B_y B_x & \varepsilon\left(E^2{}_y - \frac{1}{2}E^2\right) + \frac{1}{\mu}\left(B^2{}_x - \frac{1}{2}B^2\right) & \varepsilon E_y E_z + \frac{1}{\mu} B_y B_z \\ \varepsilon E_z E_x + \frac{1}{\mu} B_z B_x & \varepsilon E_z E_y + \frac{1}{\mu} B_z B_y & \varepsilon\left(E^2{}_z - \frac{1}{2}E^2\right) + \frac{1}{\mu}\left(B^2{}_z - \frac{1}{2}B^2\right) \end{pmatrix} \tag{16}$$

Lehtë mund të tregohet se cilido element i tenzorit (16) mund të shkruhet në formën:

$$\overline{T}_{ik} = (E_i D_k + B_i H_k) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} (E_j D_j + B_j H_j) \tag{17}$$

ku: δ_{ik} paraqet simbolin e Kronekerit i cili sipas definicionit është i barabartë me një për $i = k$ dhe zero për $i \neq k$.

8. PRESIONI I FUSHES ELEKTROSTATIKE

Do të shqyrtojmë në rastin e fushës elektrostatike kuptimin e tenzorit të Maksuelit. Të mendojmë në pikën O elementin e orientuar të sipërfaqes dS sikurse tregon fig. 101. Origjinën e sistemit të koordinatave kënddrejta e vendosim në pikën O me boshtin x në kahje të fushës elektrike. Vektorët E dhe n përcaktojnë rrafshin XOY. Nga fig. 101 shohim se vlen:

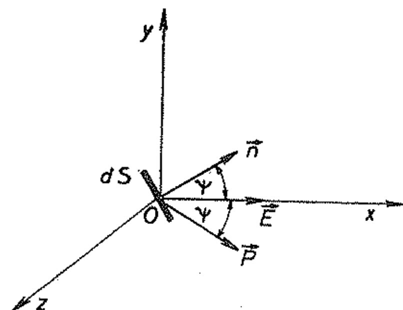


Fig. 101

$$E_x = O, E_y = E_z = O$$

Për këtë rast tenzori i tensionit (XIV.7.16) e ka formën:

$$\overline{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\varepsilon E^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon E^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon E^2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Nëse me ψ e shënojmë këndin në mes të vektorit të fushës dhe normales, atëherë kosinuset e drejtimit të normales janë:

$$\alpha = \cos\psi, \quad \beta = \sin\psi \quad \gamma = 0$$

Ndërsa (XIV.7.12) shprehet në formën:

$$P_x = T_{11}\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \cos\psi \tag{2}$$

$$P_y = T_{22} = -\frac{1}{2}\varepsilon E^2 \sin\psi$$

$$P_z = 0$$

Ndërsa intensiteti i tensionit është:

$$P = \sqrt{P^2_x + P^2_y + P^2_z} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$$

dhe shprehjet (2) mund t'i shkruajmë në formën:

$$P_x = P \cos\psi, \quad P_y = P \sin\psi, \quad P_z = 0 \tag{3}$$

Nga (3) kuptojmë se tensioni $\vec{P}$ qëndron në të njëjtin rrafsh në të cilin qëndrojnë vektorët $\vec{E}$ dhe $\vec{n}$ dhe drejtimi i tij është simetrik me normalen $\vec{n}$ ndaj vektorit të fushës $\vec{E}$ sikurse tregon fig. 101. Prandaj, mund të përfundojmë se në këtë rast tensioni në fushë elektrostatike e ngreh elementin e siërfaqes në kahje të intensitetit të fushës elektronike, por njëkohësisht edhe e tërheq në kahje të kundërt të normales së jashtme.

9. IMPULSI I FUSHËS ELEKTROMAGNETIKE

Do të shqyrtojmë në vazhdim anëtarin e dytë të (XIV.6.7) të cilin nga (XIV.6.6) dhe (XIV.4.2) mund ta shkruajmë në formën:

$$\vec{F}_2 = \int \vec{f}_2 d\tau = \int \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{N}}{\partial t} d\tau \tag{1}$$

Do të supozojmë se në hapësirën e shqyrtuar nuk ka elektricitet të lirë ashtu që në të gjitha pikat e saj vlen:

$$\rho = 0 \text{ dhe } j = 0$$

dhe nga (XIV.6.3) kemi:

$$\vec{F} = \int \vec{f} d\tau = 0 \tag{2}$$

Në këtë rast (XIV.6.7) do të jetë:

$$\int \vec{f}_1 d\tau = \int \vec{f}_2 d\tau$$

dhe nga (XIV.7.15) do të kemi:

$$\int \overset{=}{T} d\vec{S} = \int \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{N}}{\partial t} d\tau \tag{3}$$

Meqë veprimi i derivimit sipas kohës dhe integrimit sipas vëllimit janë të pavarur në shprehje të fundit mund të ndërrojmë vendet e tyre

ashtu që pas këtij ndërrimi duhet në vend të simbolit $\frac{\partial}{\partial t}$ të shkruajmë $\frac{d}{dt}$, i cili shpreh derivatin e plotë parcial:

$$\int \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{N}}{\partial t} d\tau = \frac{d}{dt} \int \varepsilon\mu \vec{N} d\tau$$

dhe nga (3) fitojmë:

$$\vec{F}_1 = \int \vec{T} d\vec{S} = \frac{d}{dt} \int \varepsilon\mu\vec{N} d\tau \qquad (3)$$

Shohim se forca sipërfaqësore me të cilën fusha elektromagnetike vepron në sipërfaqen kufitare të hapësirës në të cilën nuk ka elektricitet të lirë mund të shprehet si derivat kohor i një inegrali vëllimor.

E dimë nga mekanika se forca përkufizohet si derivat i impulsit sipas kohës, prandaj integralin vëllimor në (4) mund ta interpretojmë si impuls të fushës elektromagnetike. Kjo do të thotë se fushës elektromagnetike mund t'i përshkruajmë këtë impuls:

$$\vec{U} = \int \varepsilon\mu \vec{N} d\tau = \int \vec{u} d\tau \qquad (5)$$

ku:

$$\vec{u} = \varepsilon\mu \vec{N} = \varepsilon\mu(\vec{E} \times \vec{H}) \qquad (6)$$

paraqet dendësinë e impulsit të fushës elektromagnetike, pra impulsin e saj në njësi të vëllimit.

Duhet theksuar se impulsi i fushës elektromagnetike si dhe energjia nuk duhet të kuptohen në formën mekanike.

10. MARRËDHËNIA NË MES TË FORCËS, TENSIONIT DHE IMPULSIT TË FUSHËS ELEKTROMAGNETIKE

Fillojmë nga ekuacioni (XIV.6.7):

$$\vec{F} = \int \vec{f} d\tau = \int \vec{f}_1 d\tau - \int \vec{f}_2 d\tau$$

dhe shfrytëzojmë shprehjen (XIV.9.4). Do të fitojmë:

$$\int \vec{f} d\tau = \int \vec{f}_1 d\tau - \frac{d}{dt} \int \vec{u} d\tau \qquad (1)$$

Që të përfitojmë këtë lidhje në formë diferenciale do të kryejmë transformimin e formës:

$$\int \vec{f} d\tau = \int f_1 d\tau - \int \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} d\tau$$

Ekuacioni i parë skalar përkatës është:

$$\int f_x d\tau = \int f_{1x} d\tau - \int \frac{\partial u_x}{\partial t} d\tau \tag{2}$$

Nëse koordinatat hapësinore i shënojmë me x_1, x_2 dhe x_3, ndërsa komponentet përkatëse të vektorëve me indekset 1. 2 dhe 3 dhe shfrytëzojmë (XIV.7.5), do të kemi:

$$f_{1x} = \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T_{1k}}{\partial x_k}$$

Për (2) shkruajmë:

$$\int f_1 d\tau = \int \left(\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T_{1k}}{\partial x_k} - \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) d\tau \tag{3}$$

Fuksionet nën integrale duhet të jenë të barabarta, meqë ekuacioni duhet të vlejë për çfarëdo- vëllimi, prandaj kemi:

$$f_1 = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T_{1k}}{\partial x_k} - \frac{\partial u_1}{\partial t}$$

Në mënyrë të ngjashme fitojmë edhe ky komponentet tjera dhe të gjitha së bashku mund t'i shkruajmë në formën:

$$f_i = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial t} \tag{4}$$

Ky ekuacion shpreh lidhmërinë në mes të dendësisë së forcës, tenzorit të tensionit të Maksuelit dhe dendësisë së impulsit të fushës elektromagnetike.

Më në fund do të tregojmë se komponentet e tenzorit $\overline{\overline{T}}$ në sipërfaqen e vëllimit pambarim të madh i cili në vetvete mbyll tërë fushën e kanë vlerën sikurse $1/r^4$ dhe integrali sipërfaqësor (1) do të jetë:

$$\int \vec{f_1} d\tau = \int \overline{\overline{T}} d\vec{S} = 0$$

Në shprehjen (1) do të ngel:

$$\int \vec{f} d\tau = -\frac{d}{dt} \vec{u} d\tau \tag{5}$$

Integralin e anës së majtë e shkruajmë në formën:

$$\int \vec{f}\, d\tau = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

ndërsa (5)

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p} + \int \vec{u}\, d\tau\right) = 0 \qquad (6)$$

prej nga rrjedh pas inegrimit:

$$\vec{p} + V\vec{u}\, d\tau = 0 \qquad (7)$$

Nga ekuacioni i fundit kuptojmë se në fushë të plotë impulsi total i sistemit, pra shuma e impulsit mekanik dhe impulsit të fushës elektromagnetike mbetet i pandryshuar gjatë kohës.

11. POTENCIALET E FUSHËS ELEKTROMAGNETIKE

a) Përkufizimi i potencialeve dhe lidhja e tyre me burimet e fushës

Te fushat statike i kemi njohur potencialet e tyre dhe kemi vërejtur se paraqesin funksione ndihmëse të cilat na lehtësojnë përcaktimin e fushës nga burimet e njohura. Edhe për fushë elektromagnetike ekzistojnë këso madhësi dhe i quajmë potenciale të fushës elektromagnetike. Fillojmë nga ekuacionet e Maksuelit:

$$rot\,\vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$$

$$rot\,\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

$$div\,\vec{D} = \rho$$

$$div\,\vec{B} = 0$$

E dimë se divergjenca e rotorit të çfarëdo vektori identikisht është e barabartë me zero, prandaj vektorin $\vec{B}$ mund ta shprehim si rotor të ndonjë vektori ndihmës $\vec{A}$:

$$\vec{B} = rot\,\vec{A} \qquad (1)$$

Vektori $\vec{A}$ quhet potencial vektorial i fushës. Shprehja (1) tregon se si nga potenciali i njohur mund të përcaktohet induksioni i fushës.

E zëvendësojmë (1) në ekuaconin e dytë të Maksuelit:

$$rot\,\vec{E} = -\,rot\,\dot{\vec{A}}$$

ose:

$$rot\,(\vec{E} + \dot{\vec{A}}) = 0$$

Gjithashtu, e dimë se rotori i gradientit të çfarëdo funksioni skalar është i barabartë me zero, prandaj përfundojmë se:

$$\vec{E} = -\,\dot{\vec{A}} - grad\,V \qquad (2)$$

Kjo shprehje e lidh vektorin e fushës elektrike me potencialet. Nëse potencialet janë të njohura, atëherë me ndihmën e (1) dhe (2) mund të njehsojmë vektorët karakteristikë për fushën.

Funksioni V quhet potencial skalar i fushës elektromagnetike.

Ka ngelur të përcaktojmë shprehjet e lidhmërisë së potencialeve me burimet e fushës. Për këtë e shumëzojmë ekuacionin e parë të Maksuelit me μ. Fitojmë:

$$rot\,\mu\vec{H} = \mu\,\vec{j} + \mu\varepsilon\,\dot{\vec{E}}$$

I zëvendësojmë (1) dhe (2):

$$rot\,rot\,\vec{A} = \mu\,\vec{j} + \varepsilon\mu\,(-\,\ddot{\vec{A}} - grad\,\dot{V})$$

E zbërthejmë rotorin e dyfishtë:

$$grad\,div\,\vec{A} - \Delta\vec{A} = \mu\vec{j} - \varepsilon\mu\,\ddot{\vec{A}} - \varepsilon\mu\,grad\,\dot{V}$$

I mbledhim anëtarët nën gradient:

$$grad\,(div\,\vec{A} + \varepsilon\mu\dot{V}) - \Delta\vec{A} = \mu\vec{J} - \varepsilon\mu\ddot{\vec{A}}$$

Për funksionin vektorial $\vec{A}$ është i përcaktuar rotori me shprehjen (1). Por, funksioni vektorial nuk është plotësisht i përcaktuar vetëm me rotorin e vet. Duhet njohur edhe divergjencën e tij. Meqë divergjenca e vektorit $\vec{A}$ nuk është e përcaktuar me asgjë, mund ta marrim sipas dëshirës. Do ta përkufizojmë në formën:

$$div\,\vec{A} = \varepsilon\mu\dot{V} \qquad (3)$$

ashtu që anëtari i parë i anës së majtë anulohet. Do të kemi:

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{v^2}\,\ddot{\vec{A}} = -\,\mu\vec{j} \qquad (4)$$

ku është:

$$\varepsilon\mu = \frac{1}{v^2} \tag{5}$$

Ekuacioni diferencial (4) shpreh lidhmërinë e potencialit vektorial me dendësinë e rrymës elektrike. Shihet se ndryshon nga ekuacioni i Puasonit i cili paraqitet për fushë stacionare, nga anëtari me derivat të dytë sipas kohës.

Duhet theksuar se kondita (3) nuk është e vetmja e cila mund të shfrytëzohet. Këtë e ka paraqitur Lorenci dhe sipas tij quhet konditë e Lorencit. Ndonjëherë në vend të saj merret kondita:

$$div\,\vec{A} = 0$$

e cila quhet konditë e Kulonit, sepse shpie deri te ekuacioni i Puasonit, i cili vlen për fushë të Kulonit.

Ka ngelur të përcaktojmë ekuacionin diferencial për potencial skalar V. Për këtë fillojmë nga ekuacioni i tretë i Maksuelit:

$$div\,(-\dot{\vec{A}} - grad\,V) = \rho$$

ose:

$$-\,div\,\dot{\vec{A}} - div\,grad\,V = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

shfrytëzojmë konditën e Lorencit (3):

$$-\,div\,\dot{\vec{A}} = \varepsilon\mu\ddot{V} = \frac{1}{v^2}\,\ddot{V}$$

dhe fitojmë:

$$\triangle V - \frac{1}{v^2}\,\ddot{V} = -\,\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{6}$$

Ky ekuacion shpreh lidhmërinë e potencialit skalar me dendësinë e elektricitetit.

b) Funksioni i kalibrimit

E dimë se potencialet janë madhësi ndihmëse për përcaktimin e fushës. Për këtë arsy potencialet nuk është e thënë të jenë të përcaktuar në mënyrë rigoroze. Mjafton që saktësisht të përcaktojnë vektorët e fushës.

Nëse e zgjidhim ndonjë funksion skalar φ, atëherë me ndihmën e tij mund t'i plotësojmë potencialet elektromagnetike në formën:

$$\vec{A}_1 = \vec{A} - \text{grad}\varphi$$

$$V_1 = V + \dot{\varphi} \tag{7}$$

Do të tregojmë se potencialet e reja e përcaktojnë të njëjtën fushë sikurse edhe potencialet $\vec{A}$ dhe V. I njehsojmë vektorët e fushës me ndihmën e potencialeve të plotësuara:

$$rot\,\vec{A}_1 = rot\,\vec{A} - rot\,grad\varphi = rot\,\vec{A} = \vec{B}$$

$$-\dot{\vec{A}}_1 - grad\,V_1 = -\dot{\vec{A}} + grad\,\dot{\varphi} - grad\,V - grad\,\dot{\varphi} =$$

$$= -\dot{\vec{A}} - grad\,V = \vec{E}$$

Shohim pra se kemi fituar të njëjtët vektorë të fushës. Funksioni φ me të cilin i plotësojmë potencialet quhet funksion i kalibrimit apo invariantë gradienti.

Që të përfitojmë konditën të cilën duhet ta kënaqë ky funksion, i zëvendësojmë potencialet (7) në konditën e Lorencit (3):

$$div\,\dot{\vec{A}}_1 = -\varepsilon\mu\vec{V}_1$$

ose:

$$div\,\vec{A} - div\,grad\varphi = -\varepsilon\mu\dot{V} - \varepsilon\mu\ddot{\varphi}$$

Sipas (3), anëtarët e parë në të dy anët e barazimit janë të barabartë, prandaj ngel:

$$\Delta\varphi = \varepsilon\mu\ddot{\varphi}$$

ose:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v^2}\,\ddot{\varphi} = 0 \tag{8}$$

Kjo është kondita e kërkuar. Shohim se funksioni φ duhet të kënaqë ekuacionin diferencial të përhapjes së valëve.

c) Potencialet retarde

Ka ngelur të zgjidhim ekuacionet diferenciale (4) dhe (6). Këto ndryshojnë vetëm për nga simbolet, prandaj është e mjaftuar të gjejmë zgjidhjen e njërit prej tyre. Do ta zgjidhim ekuacionin diferencial për potencial skalar:

$$\left(\Delta - \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) V(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\varepsilon}\,\rho(\vec{r}, t) \tag{9}$$

Sikur burimi i fushës të përbëhej vetëm prej një sasie piksore të elektricitetit, e cila gjendet në vendin $\vec{r}'$ dhe e cila ekziston pak rreth kohës t', atëherë ky burim mund të shprehet me prodhimin e dy funksioneve δ të Dirakut kësisoji*:

$$\rho = \delta(\vec{r} - \vec{r}')\, \delta\,(t - t')$$

Potencialin e fushës së këtij burimi do ta shënojmë me $G(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$ dhe për këtë fushë ekuacioni (9) do të ketë formën:

$$\left(\Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = -\frac{1}{\varepsilon}\,\delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t') \qquad (10)$$

Së pari do të tregojmë se zgjidhja e (9) mund të paraqitet me integralin:

$$V(\vec{r}, t) = \int\int \rho\,(\vec{r}'\, t')\, G(\vec{r} - \vec{r}', t - t')\, d\tau'\, dt' \qquad (11)$$

Në të vërtetë, nëse këtë shprehje e zëvendësojmë në anën e majtë të (9), do të fitojmë:

$$\left(\Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) V(\vec{r}, t) =$$

$$= \int\int \rho\,(\vec{r}', t')\left(\Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\vec{r} - r', t - t')\, d\tau'\, dt'$$

Ndërsa në anën e djathtë e zëvendësojmë vlerën e (10):

$$\left(\Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) V(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\varepsilon}\int\int \rho(\vec{r}', t')\delta(\vec{r} - \vec{r}')\; \delta(t - t')\, d\tau'\, dt'$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon}\int \rho(\vec{r}, t')\delta(t = t')\, dt' = -\frac{1}{\varepsilon}\,\rho(\vec{r}, t)$$

Këtu integrimet i kemi kryer sipas shprehjes (a) të prodhimit të funksioneve me δ — funksionin

* Funksioni δ i Dirakut përkufizohet në këtë mënyrë:

$$\delta(x - x') = \begin{cases} 0 & \text{për } x \neq x' \\ \infty & \text{për } x = x' \end{cases}$$

me konditë që:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x')\, dx = 1$$

Ky është funksion i cili gjithkund e ka vlerën zero, përveç në vendin ku ndryshorja x e merr vlerën e madhësisë së dytë x'. Në këte pikë kjo bëhet pambarim ashtu që integrali i saj është i barabartë me 1.

Këtu do të shfrytëzojmë vetinë e njohur të δ funksionit të shprehur në formën:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x')\,dx = f(x') \tag{a}$$

Kuptojmë se (11) është me të vërtetë zgjidhje e (9). Tani duhet të përcaktojmë funksionin G. Ky paraqet potencialin e fushës së elektricitetit të koncentruar në vend të vogël dhe është potencial simetrikosferik. Në këtë rast laplasiani duhet të merret në koordinate sferike dhe për arsye simetrie do të ketë formën:

$$\triangle G = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rG)$$

Prandaj:

$$\left(\triangle - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rG) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}$$

Në të gjitha pikat, përveç $\vec{r} = \vec{r}'$ dhe në të gjitha kohët, përveç $t = t'$, ana e djathtë e ekuacionit (10) jep zero dhe për këtë rast vlen ekuacioni diferencial:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rG) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rG) = 0 \tag{12}$$

të cilin e zgjidh funksioni:

$$G = \frac{f(t - r/v)}{r} \tag{13}$$

për të cilin bindemi duke e zëvendësuar në (12). Në (13) duhet të përcaktohet funksioni f. Zgjidhja (13) tregon se:

$$t' = r/v$$

Për përcaktimin e këtij funksioni ekuacionin (10) e integrojmë në

vëllim të sferën së vogël të përshkruar rreth vendit $\vec{r} = \vec{r}'$ dhe kalojmë në vlerën kufitare kur rrezja e saj tenton në zero. Meqë largësia r e pikave brenda sferës së vogël është e vogël, gjatë kalimit kufitar mund të marrim $t' = r/v \to 0$ dhe për pikat brenda sferës duhet të merret zgjidhja:

$$G = \frac{f(t)}{r}$$

Fitojmë:

$$\lim_{R\to 0} \int \triangle \frac{f(t)}{r} d\tau - \frac{1}{v^2} \lim_{R\to} \int \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{f(t)}{r} d\tau = -\frac{1}{\varepsilon} \delta(t) \int \delta(\vec{r} - \vec{r}')\, d\tau' =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon} \delta(t)$$

Pasi ta integrojmë anëtarin e dytë fitojmë:

$$\lim_{R\to 0} \frac{f''(t)}{R} \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi f''(t) \lim_{R\to} R^2 = 0$$

Ndërsa në anëtarin e parë integralin vëllimor e shndërrojmë në sipërfaqësor:

$$\lim_{R\to 0} \int \triangle \frac{f(t)}{r} d\tau = \lim_{R\to 0} \int div\, grad \frac{f(t)}{r} d\tau = \lim_{R\to 0} \oint grad \frac{f(t)}{r} d\vec{S} =$$

$$= \lim_{R\to 0} \oint \left[-\frac{f(t)}{R^2} \right] d\vec{S} = -\frac{f(t)}{R^2} \oint d\vec{S} = -\frac{f(t)}{R^2} 4\pi R^2 = -4\pi f(t)$$

Fitojmë:

$$-4\pi f(t) = -\frac{1}{\varepsilon} \delta(t)$$

prej nga:

$$f(t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \delta(t) = k_{el} \delta(t)$$

ku:

$$k_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$$

Pra, që zgjidhja (13) të kënaqë ekuacionin (10), funksioni f duhet të jetë funksion δ i Dirakut. Nga kjo për (13) fitojmë:

$$G(\vec{r}, t) = k_{el} \frac{\delta(t - r/v)}{r} \qquad (14)$$

Që të fitojmë potencialin, këtë shprehje e zëvendësojmë në (11):

$$V(\vec{r}, t) = k_{el} \int \int (\vec{r}', t') \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{v} - t'\right) d\tau\, dt'$$

Integrimi sipas t' fitohet kur në vend të saj zëvendësojmë $t - r/v$. Pra:

$$V(\vec{r}, t) = k_{el} \int \frac{\rho(\vec{r}', t - r/v)}{r} d\tau' \qquad (15)$$

Në mënyrë të ngjashme për potencial vektorial fitohet shprehja:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = k_m \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - r/v)}{r} d\tau' \qquad (16)$$

Zgjidhjet (15) dhe (16) janë të ngjashme me zgjidhjet përkatëse për fusha stacionare, me ndryshim se për fusha të ndryshuara burimet ρ dhe $\vec{j}$ varen edhe prej kohës. Shohim faktin karakteristik se koha paraqitet në kombinimin:

$$t - r/v$$

që do të thotë se gjatë njehsimit të potencialit duhet të merren ato vlera të burimeve të fushës të cilat kanë ekzistuar në atë vend para kohës r/v. Nga homogjeniteti i shprehjeve herësi r/v duhet të ketë dimension kohe, duhet të shpreh ndonjë kohë. Meqë r është largësia nga burimi, atëherë v ka dimensione të shpejtësisë, ndërsa r/v paraqet atë kohë për të cilën ndërrimi i fushës me shpejtësi v e ka kaluar largësinë nga elementi i burimit të saj d deri te vendi ku e përcaktojmë potencialin. Për këtë veti, potencialet (15) dhe (16) quhen potenciale retarde.

12. POTENCIALET E LIENAR-VIHERTIT

Do të zbatojmë rezultatet e mëparshme për elektrizim në boshllëk, i cili lëviz me shpejtësi mjaft të madhe. Të mendojmë detektorin në pikën 0 dhe sferën me qendër në këtë pikë e cila mblidhet kah kjo me shpejtësi c. Supozojmë që në kohën t kjo sferë mblidhet në këtë pikë. Nëse në momentin para kohës t sfera kalon nëpër elementin e vëllimit $d\tau$ të larguar për r nga qendra e vet, atëherë ndërrimet e fushës elektromagnetike në këtë vëllim do të arrijnë në pikën 0 në kohën t, për sa i duhet sferës që me shpejtësi të caktuar të mblidhet deri në këtë pikë. Prandaj mund të themi se sfera e luan rolin e lajmëtarit të të dhënave për gjendjen e elektricitetit në rrethinën e vet.

Do të shënojmë me $[\vec{j}]$ dendësinë e rrymës, kurse me $[\rho]$ dendësinë vëllimore të elektricitetit në momentin para kohës t, pra në kohën

$$t' = t - \frac{r}{c}$$

ku c është shpejtësia e përhapjes së ndryshimit të fushës. Atëherë shprejet (XIV.11.15 e 16) për boshllëk e kanë formën:

$$V = k \int \frac{[\rho] d\tau}{r} \qquad (1)$$

$$A = k_m \int \frac{[\vec{j}] d\tau}{r} \qquad (2)$$

Por, meqë këto madhësi i marrim në kohën t', atëherë shprehja $[\rho]d\tau$ nuk do të paraqesë sasinë e vërtetë të elektricitetit në elementin e vëllimit $d\tau$ në momentin kur merren vlerat e potencialeve elektromagnetike.

Që të përcaktojmë vlerën e këtyre integraleve, të mendojmë elementin e vëllimit $d\tau$ të larguar për vektorin e pozitës $\vec{r}$ nga detektori në pikën 0. Në këtë element të vëllimit me bazë dS dhe lartësi cdt le të jetë shpejtësia e elektricitetit $\vec{v}$, sikurse tregon fig. 102. Do të shënojmë me v_r projeksionin e kësaj shpejtësie në drejtim të vektorit $\vec{r}$. Meqë elektriciteti në element të vëllimit lëviz, atëherë sasia e tij do të zvogëlohet për $[\rho]dS\, v_r\, dt$ nga sasia e cila do të gjendej në këtë element sikur të mos lëvizte. Pra:

$$dq = [\rho]d\tau - [\rho]\, dS\, v_r\, dt \tag{3}$$

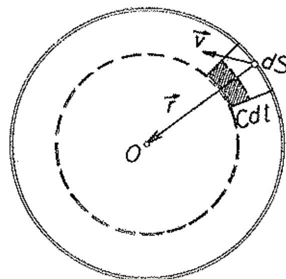


Fig. 102

Meqë vlen:

$$dS\, v_r\, dt = dS\, (\vec{v}\,\vec{r}_o)\, dt = dS\left(\vec{v}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{c}\,\frac{\vec{v}\,\vec{r}}{r}\, dS\, c\, dt = \frac{\vec{v}\,\vec{r}}{c\, r}\, d\tau \quad \text{sepse } d\tau = dS\, c\, dt$$

Duke shfrytëzuar këtë transformim, shprehjen (3) mund ta shkruajmë në formën:

$$dq = [\rho]d\tau - [\rho]\,\frac{\vec{v}\,\vec{r}}{c\, r}\, d\tau$$

ose

$$[\rho]d\tau = \frac{dq}{1 - \dfrac{\vec{v}\,\vec{r}}{c\, r}} \tag{4}$$

Vlerën e fituar e zëvendësojmë në (1) dhe (2), duke dijtur se $\vec{j} = \rho\vec{v}$. Fitojmë potencialet retarde elektromagnetike për sistem të elektricitetit lëvizës:

$$V = k \int \left(\frac{dq}{r - \dfrac{\vec{v}\,\vec{r}}{c}}\right)_{t' = t - \frac{r}{c}} \tag{5}$$

$$\vec{A} = k_m \int \left(\frac{v\,dq}{r - \frac{\vec{v}\,\vec{r}}{c}} \right)_{t'=t-\frac{r}{c}} \tag{6}$$

Nëse i zbatojmë këto shprehje për elektron $\vec{r}$ dhe $\vec{v}$, mund t'i nxjerrim para integralit dhe të shënojmë $\int dq = e$. Nga (5) dhe (6) do të kemi:

$$V = k \left(\frac{e}{r - \frac{\vec{v}\,\vec{r}}{c}} \right)_{t'=t-\frac{t}{t}} \qquad \text{dhe} \quad \vec{A} = k_m \left(\frac{e\vec{v}}{r - \frac{\vec{v}\,\vec{r}}{c}} \right)_{t'=t-\frac{r}{c}} \tag{7}$$

Shprehja (7) paraqet potencialet elektromagnetike të elektronit në lëvizje dhe njihen si potenciale të Lienart — Vihertit. Këta nuk varen prej dimensionit dhe as strukturës së brendshme të elektronit. Gjithashtu, vlejnë për shpejtësi sa do të madhe.

13. PËRFITIMI I EKUACIONEVE TË MAKSUELIT NGA PARIMI I HAMILTONIT.

Do të shqyrtojmë fushën për të cilën funksioni i Langranzhit e ka formën:

$$L = \int \left[\frac{1}{2} (\varepsilon E^2 - \frac{1}{\mu} B^2) - \vec{j}\,\vec{A} - \rho V \right] d\tau \tag{1}$$

dhe do të tregojmë se kjo fushë është identike me fushën elektromagnetike. Për këtë e shfrytëzojmë parimin e Hamiltonit (VII.5.5):

$$\delta \int_{t_2}^{t_1} L\,dt = 0 \tag{2}$$

duke i menduar komponentet e potencialit vektorial dhe potencialin skalar si koordinate të përgjithsuara të fushës. Shfrytëzojmë ekuacionet (XIV.11.1 dhe 2) për potenciale të fushës elektromagnetike:

$$\vec{E} = -\dot{\vec{A}} - grad\,V \tag{3}$$

dhe

$$\vec{B} = rot\,\vec{A} \tag{4}$$

ndërsa funksioni i Langranzhit do të ketë formën:

$$L = \int \left[\frac{\varepsilon}{2} (\dot{\vec{A}} + grad\,V)^2 - \frac{1}{2\mu} (rot\,\vec{A})^2 + \vec{j}\,\vec{A} - \rho V \right] d\tau \tag{5}$$

Ekuacionin II dhe IV të sistemit (XIV.3.6) mund ta fitojmë drejtpërdrejt nga ekuacionet (3) dhe (4). Për këtë qëllim e kërkojmë rotorin e (3):

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\,rot\,\vec{A} - rot\,grad\,V \tag{6}$$

dhe meqë gjithmonë rotori i gradientit të ndonjë funksioni skalar është identikisht i barabartë me zero, do të kemi:

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\,rot\,\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\,\vec{B} = -\dot{\vec{B}} \tag{7}$$

dhe paraqet ekuacionin II të Maksuelit.

Për përfitimin e ekuacionit të katërt të sistemit (XIV.3.6) mjafton të kërkojmë divergjencën e (4). Pra do të fitojmë:

$$div\,\vec{B} = div\,rot\,\vec{A} = 0 \tag{8}$$

sepse gjithashtu, gjithmonë, divergjenca e rotorit të ndonjë funksioni vektorial është identikisht e barabartë me zero. Shprehja (8) paraqet ekuacionin e kërkuar të Maksuelit.

Për përfitimin e ekuacionit III të sistemit (XIV.3.6) kërkojmë variacionin e potencialit skalar, duke marrë në konsiderim se variacioni i tij është i barabartë me zero jo vetëm në momentet t_1 dhe t_2, por edhe në kufirin e hapësirës së fushës. Variacioni i potencialit skalar V nga funksioni i Langranzhit (5) është:

$$\delta_V L = \int\,[\varepsilon\,(\dot{\vec{A}} + grad\,V)\,\delta\,grad\,V - \rho\delta V]\,d\tau \tag{9}$$

dhe meqë $\delta\,grad\,V = grad\,\delta V$, do të kemi:

$$\delta_V L \int\,[\,-\varepsilon\,\vec{E}\,grad\,\delta V - \rho\delta V]\,d\tau \tag{10}$$

Për përfitimin e (10 e kemi zëvendësuar (3) në (9). Këtë shprehje duhet ta transferojmë sipas:

$$\vec{E}\,grad\,\delta V = div\,(\delta V\cdot\vec{E}) - \delta V\,div\,\vec{E}$$

dhe (10) shndërrohet në:

$$\delta_V L = \int\,[\,-\varepsilon\,div\,(\delta V\cdot\vec{E}) + \delta V\,(\varepsilon\,div\,\vec{E} - \rho)]\,d\tau \tag{11}$$

Integralin e parë do ta shndërrojmë në sipërfaqësor, duke pasur parasysh se variacioni në kufirin e vëllimit është zero:

$$\int div\,(\delta V\cdot\vec{E})\,d\tau = \int \delta V\cdot\vec{E}\,d\,\vec{S} = 0 \text{ sepse } \delta V = 0$$

Nga shprehja (11) fitojmë:

$$\delta_V L = \int (\varepsilon \, div \, \vec{E} - \rho) \, \delta V \, d\tau \tag{12}$$

ndërsa nga parimi i Hamiltonit (2):

$$\delta V \int_{t_2}^{t_2} L \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta_V L \, dt = 0$$

ose

$$\int_{t_1}^{t_2}\!\!\int (\varepsilon \, div \, E - \rho) \, \delta V \, d\tau \, dt = 0 \tag{13}$$

Që ky integral të jetë i barabartë me zero për çfarëdo variacioni δV, shprehja në kllapë duhet të jetë e barabartë me zero. Prandaj, nga:

$$\varepsilon \, div \, \vec{E} - \rho = 0$$

fitojmë:

$$div \, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{14}$$

ekuacionin III të sistemit (XIV.3.6), gjë që ishte edhe qëllimi ynë. Për përfitimin e ekuacionit të parë të sistemit (XIV.3.6) kërkojmë variacionin e potencialit vektorial nga funksioni i Lagranzhit (5). Do të fitojmë:

$$\delta_{\vec{A}} L = \int \left[\varepsilon \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + grad \, V \right) \delta \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{\mu} \, rot \, \vec{A} \cdot \delta \, rot \, \vec{A} + \right.$$

$$\left. + \vec{j} \, \delta A \right] d\tau \tag{15}$$

I paraqesim vektorët $\vec{E}$ dhe $\vec{B}$ dhe pasi të ndërrojmë rendin e veprimeve të operatorëve do të kemi:

$$\delta_{\vec{A}} L = \int \left[-\varepsilon \vec{E} \frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{A} - \frac{\vec{B}}{\mu} \, rot \, \delta \vec{A} - \vec{j} \, \delta \vec{A} \right] d\tau$$

Sikurse më parë shfrytëzojmë:

$$\vec{E} \frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{A} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \delta \vec{A}) - \delta \vec{A} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{B} \, rot \, \delta \vec{A} = - \, div \, (\vec{B} \times \delta A) + \delta \vec{A} \cdot rot \, \vec{B}$$

dhe fitojmë:

$$\delta_{\vec{A}} L = \int \left[\frac{1}{\mu} \, div\,(\vec{B} \times \delta \vec{A}) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \delta \vec{A}) + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{1}{\mu} \, rot\,\vec{B} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \right) \delta \vec{A} \right] d\tau \qquad (15)$$

Edhe në këtë rast integralin e parë e transferojmë në integral sipërfaqësor, nëpër kufij të hapësirës së shqyrtuar, duke pasur parasysh se në këtë kufi $\delta \vec{A} = 0$. Pra:

$$\int div\,(\vec{B} \times \delta A)\, d\tau = \int (\vec{B} \times \delta \vec{A})\, d\vec{S} = 0$$

dhe në (16) ngel:

$$\delta_{\vec{A}} L = \int \left[-\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \delta \vec{A}) + \left(-\frac{1}{\mu} \, rot\,\vec{B} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \right) \delta \vec{A} \right] d\tau \quad (17)$$

Nga parimi i Hamiltonit (2) kemi:

$$\delta_{\vec{A}} \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta_{\vec{A}} L\, dt = 0$$

ose

$$\int_{t_1}^{t_2} \int \left[-\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \delta \vec{A}) + \left(-\frac{1}{\mu} \, rot\,\vec{B} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \right) \delta \vec{A} \right] d\tau\, dt = 0 \quad (18)$$

Në integralin e parë mund të ndërrojmë rendin e veprimeve, duke dijtur se në momentet t_1 dhe t_2; $\delta \vec{A} = 0$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \delta \vec{A})\, d\tau\, dt = \int (\vec{E} \cdot \delta \vec{A}) \Big|_{t_1}^{t_2} d\tau = 0$$

Sprehja (18) do të ketë formën:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int \left(-\frac{1}{\mu} \, rot\,\vec{B} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \right) \delta \vec{A} \cdot d\tau\, dt = 0 \qquad (19)$$

Që ky integral të jetë gjithmonë i barabartë me zero për çfarëdo variacioni $\delta \vec{A}$, shprehja nën integral duhet të jetë e barabartë me zero. Fitojmë:

$$-\frac{1}{\mu} \, rot\,\vec{B} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} = 0$$

ose

$$rot\,\vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}} = \sigma\,\vec{E} + \varepsilon\,\dot{\vec{E}}$$

që paraqet ekuacionin e parë të sistemit (XIV.3.6), çka është dashur ta vërtetojmë.

Shohim se ekuacionet e Maksuelit mund të përfitohen nga parimi i Hamiltonit, nëse funksioni i Langranzhit për fushë elektromagnetike është i përcaktuar me shprehjen (1).

XV. VALËT ELEKTROMAGNETIKE

1. VALËT ELEKTROMAGNETIKE NË IZOLATOR

a) Ekuacioni i valës

Në ndonjë izolator homogjen dhe izotrop përçueshmëria specifike $\sigma = 0$. Do të shqyrtojmë fushën elektromagnetike në pjesë të hapësirës, e cila është larg nga burimet e fushës. Në këtë pjesë të hapësirës nuk ka elektricitet të shpërndarë, prandaj vlen $\rho = 0$.

Duke i shfrytëzuar këto të dhëna për izolator, sistemi i ekuacioneve të Maksuelit shprehet në formën:

$$rot\,\vec{H} = \varepsilon\,\dot{\vec{E}} \qquad (1)$$

$$rot\,\vec{E} = -\,\mu\,\dot{\vec{H}} \qquad (2)$$

$$div\,\vec{E} = 0 \qquad (3)$$

$$div\,\vec{H} = 0$$

Ky është sistem i ekuacioneve diferenciale për dy vektorë të panjohur, vektorët $\vec{E}$ dhe $\vec{H}$. Nëse dëshirojmë të përcaktojmë njërin prej tyre, atëherë nga sistemi duhet të eliminohet tjetri. Do ta eliminojmë vektorin $\vec{H}$. Për këtë arsye, ekuacionin (1) e derivojmë sipas kohës:

$$rot\,\dot{\vec{H}} = \varepsilon\,\ddot{\vec{E}}$$

kurse nga (2) rrjedh:

$$\dot{\vec{H}} = -\,\frac{1}{\mu}\,rot\,\vec{E}$$

E zëvendësojmë në ekuacionin e mëparshëm:

$$-\,\frac{1}{\mu}\,rot\,rot\,\vec{E} = \varepsilon\,\ddot{\vec{E}}$$

E zbërthejmë rotorin e dyfishtë:

$$-\, grad\; div\, \vec{E} + \triangle \vec{E} = \varepsilon\, \ddot{\vec{E}}$$

Nga ekuacioni (3) anëtari i parë është zero, prandaj fitojmë:

$$\triangle \vec{E} = \frac{1}{v^2} \ddot{\vec{E}} \tag{4}$$

Ky është ekuacioni diferencial për fushë elektrike. Në mënyrë të ngjashme fitojmë ekuacionin diferencial për fushë magnetike:

$$\triangle \vec{H} = \frac{1}{v^2} \ddot{\vec{H}}$$

Për të dy fushat kemi fituar ekuacionin diferencial të valëve, prandaj mund të përfundojmë se fusha elektromagnetike ndërron sipas ligjeve të cilat vlejnë për ndërrimet valore. Themi se në hapësirë të shqyrtuar kemi valë elektromagnetike. Konstantja v ka kuptim të shpejtësisë së fazës së përhapjes së valëve.

Meqë:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{5}$$

kjo shpejtësi varet prej vetive elektrike dhe magnetike të mjedisit nëpër të cilin përhapen valët. Supozojmë në veçanti se valët përhapen në boshllëk. Atëherë shpejtësia e fazës së tyre është:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}} \tag{6}$$

Do ta njehsojmë vlerën e saj numerike nga konstantet e njohura themelore. E dimë se është:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}$$

dhe

$$k_{mo} = \frac{\mu_o}{4\pi}$$

prandaj:

$$\varepsilon_o\mu_o = \frac{k_{mo}}{k} = \frac{10^{-7}}{9 \cdot 10^9}$$

ose

$$\frac{1}{\varepsilon_o\mu_o} = 9 \cdot 10^{16}\, \frac{V\,m}{A\,s}\, \frac{A\,m}{V\,s}$$

dhe përfundimisht:

$$c = 3 \cdot 10^8 \ \frac{m}{s} \tag{7}$$

fitojmë shpejtësinë e përhapjes së dritës në boshllëk. Përfundojmë se valët elektromagnetike përhapen me shpejtësi të dritës.

Duke u bazuar në këtë të dhënë, Maksueli paraqiti teorinë e vet të dritës. Sipas tij drita është valë elektromagnetike, gjatësitë valore të së cilës gjenden në mes të 400 dhe 800 *nm*. Valët me gjatësi të tjera valore për syrin tonë janë të papashme.

b) Valët e rrafshta

Ekuacionin (4) të valës do ta zgjidhim për valë të rrafshta, për valë të cilat përhapen në një kahje. Këtë njëkohësisht e marrim për bosht të apshisës së sistemit të koordinatave kënddrejta. Për këtë rast vektori elektrik varet vetëm prej një ndryshoreje, ndërsa laplasiani redukohet në derivat të dyt. Pra, për këto valë ekuacioni (4) do të ketë formën:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{8}$$

Operatorin në anën e majtë mund ta zbërthejmë në formën:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \pm \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \mp \frac{1}{v} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

Prandaj, ekuacioni (8) do të kënaqet, nëse:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \mp \frac{1}{v} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \tag{9}$$

Ky është ekuacion diferencial parcial. Sipas rregullave matematike për zgjidhjen e tij, duhet paraqitur sistem ekuivalent të ekuacioneve të zakonshme diferenciale të cilin e fitojmë ashtu që diferencialin e ndryshores e pjesëtojmë me koeficientin e derivatit parcial të ekuacionit (9) sipas asaj ndryshoreje. Në rastin tonë do të jetë:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dt}{\mp \frac{1}{v}}$$

ose

$$dx = \mp v \, dt$$

E integrojmë:

$$x \pm v t = C$$

Zgjidhjet partikulare janë funksione arbitrare të kombinimeve të ndryshores, prandaj zgjidhja e përgjithshme do të jetë:

$$\vec{E} = \vec{a}\, f(x - vt) + \vec{b}\, g(x + vt) \tag{10}$$

Anëtari i parë shpreh valën e cila përhapet në kahje pozitive të boshtit x, ndërsa i dyti valën e cila përhapet në kahje negative të tij.

Në rast se nuk është e mundur të vendoset boshti x në kahje të përhapjes së valëve, shprehjes për valë të rrafshtë duhet dhënë formë të përgjithshme. Atëherë kahja e valës përcaktohet me vektorin unitar $\vec{n}_o$. Në kahje të tij e vendosim boshtin ζ të një sistemi ndihmës. Në këtë sistem fusha elektrike përcaktohet me (10) që në këte rast e ka formën:

$$\vec{E} = \vec{a}\, f(\zeta - vt) + \vec{b}\, g(\zeta + vt)$$

Ka ngelur të përcaktohet lidhja në mes të sistemeve të koordinateve. Meqë vlen sikurse në mekanikë:

$$\zeta = \vec{r} \cdot \vec{n}_o$$

dhe vektori i fushës së kësaj vale do të jetë:

$$\vec{E} = \vec{a}\, f(\vec{r} \cdot \vec{n}_o - vt) + \vec{b}\, g(\vec{r} \cdot \vec{n}_o + vt) \tag{11}$$

c) Transverzaliteti i valëve

Sipas ekuacionit të tretë:

$$div\, \vec{E} = 0$$

(11) do të jetë:

$$div\, (\vec{a}\, f + \vec{b}\, g) = 0$$

Meqë $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë konstante, do të kemi:

$$\vec{a}\, grad\, f + \vec{b}\, grad\, g = 0$$

Pasi vlen:

$$grad\, f(\vec{r}\,\vec{n}_o - vt) = f'\, grad\, (\vec{r}\,\vec{n}_o) = f'\, \vec{n}_o \tag{12}$$

fitojmë:

$$(\vec{a}\, f' + \vec{b}\, g')\, \vec{n}_o = 0 \tag{13}$$

Përfundojmë se rrafshi në të cilin qëndrojnë vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ është normal ndaj $\vec{n}_o$, ndaj kahjes së përhapjes së valëve. Me fjalë të tjera

vektori elektrik qëndron normal me kahjen e përhapjes së valëve. Në mënyrë të ngjashme mund të vërtetohet se edhe vektori magnetik qëndron në rrafsh normal ndaj kahjes së përhapjes së valëve. Kjo tregon se valët elektromagnetike janë valë transverzale.

d) Lidhja në mes të vektorit elektrik dhe magnetik në valë

Të mendojmë valën e rrafshët e cila përhapet në kahjen pozitive të vektorit unitar $\vec{n}_o$. Vektori elektrik i saj është:

$$\vec{E} = \vec{a}\, f(\vec{r}\,\vec{n}_o - vt) \qquad (14)$$

Që të përcaktojmë vektorin përkatës magnetik, shfrytëzojmë ekuacionin (2):

$$rot\,\vec{E} = -\mu\,\dot{\vec{H}}$$

Kërkojmë rotorin e (14):

$$rot\,\vec{E} = rot\,(\vec{a}\cdot f) = grad\,f \times \vec{a}$$

sepse $\vec{a} = const.$ Për gradient shfrytëzojmë shprehjen (12) dhe fitojmë:

$$rot\,\vec{E} = f'\,\vec{n}_o \times \vec{a} = \vec{n}_o \times \vec{a}\, f'$$

Gjithashtu, kërkojmë derivatin kohor të (14):

$$\dot{\vec{E}} = -v\,\vec{a}\, f'$$

ose

$$\vec{a}\, f' = -\frac{1}{v}\,\dot{\vec{E}}$$

prandaj vlen:

$$rot\,\vec{E} = -\frac{1}{v}\,\vec{n}_o \times \dot{\vec{E}}$$

Nga ekuacioni (2) rrjedh:

$$-\mu\,\dot{\vec{H}} = -\frac{1}{v}\,\vec{n}_o \times \dot{\vec{E}}$$

E integrojmë sipas kohës:

$$\vec{H} = \frac{1}{v\mu}\,\vec{n}_o \times \vec{E} \qquad (15)$$

Meqë vlen:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

përfundimisht fitojmë:

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, \vec{n}_o \times \vec{E} \tag{16}$$

Kjo është lidhja në mes të vektorit elektrik dhe magnetit në valë elektromagnetike. Shohim se fusha magnetike qëndron normal ndaj kahjes së përhapjes së valës dhe kahjes së vektorit elektrik. Pra, vektori elektrik, vektori magnetik dhe kahja e përhapjes së valëve qëndrojnë normal në mes vete. Këta vektorë në mes veti mbyllin kënde të drejta.

Intensiteti i vektorit magnetik ndryshon për $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$ nga intensiteti i vektorit elektrik. Prandaj, do të kemi:

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E \tag{17}$$

Duke i ngritur në katror:

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\,\mu H^2$$

kuptojmë se në valë elektromagnetike në izolatorë dendësitë e energjive elektrike dhe magnetike janë të barabarta.

e) Vektori i Pointingut

Do të përcaktojmë vektorin e Pointingut për valë elektromagnetike. E dimë se sipas përkufizimit të tij është:

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Zëvendësojmë vlerën e (16):

$$\vec{N} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, \vec{E} \times (\vec{n}_o \times \vec{E})$$

E zhvillojmë këtë prodhim të dyfishtë vektorial:

$$\vec{N} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, [\vec{n}_o E^2 - \vec{E}\,(\vec{n}_o \cdot \vec{E})]$$

Nga transverzaliteti i valëve $\vec{n}_o \cdot \vec{E} = 0$ dhe fitojmë:

$$\vec{N} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E^2 \cdot \vec{n}_o \tag{18}$$

Pra, energjia rrymon në kahje të përhapjes së valëve, ndërsa dendësia e këtij rrymimi është:

$$N = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E^2$$

proporcionale me katrorin e intensitetin e fushës elektrike. Është e qartë se nga (17) kjo është proporcionale edhe me katrorin e fushës magnetike.

f) Valët sferike elektromagnetike

Zgjidhja (11) e ekuacionit të valës shpreh valën e rrafshët, valën, burimi i së cilës gjendet shumë larg nga vendi i shqyrtimit. Ndonjëherë është e nevojshme të kemi zgjidhjen e (4) për valë, burimi i së cilave është i koncentruar në pjesë shumë të vogël të hapësirës, teorikisht në një pikë. Valët e këtilla nga burimi piksor përhapen në të gjitha kahjet dhe në mjedise homogjene për kohë të caktuar formojnë sferën e përshkruar rreth burimit. I quajmë valë sferike, sepse sipërfaqja e fazave të njëjta është sferike.

Për këto valë laplasiani i ekuacionit (4), duke supozuar se fusha varet vetëm prej largësisë r nga burimi, do të ketë formën:

$$\triangle \vec{E} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}\,(r\,\vec{E})$$

ndërsa ekuacioni i valës:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\,(r\,\vec{E}) = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,(r\,\vec{E})$$

Ky ekuacion ndryshon nga (10), nga se në vend të ndryshores x, këtu paraqitet ndryshorja r dhe në vend të panjohurës $\vec{E}$ qëndron prodhimi $r \cdot \vec{E}$. Prandaj, zgjidhja e (10 me këto ndryshime të simboleve do të ketë formën:

$$r\,\vec{E} = \vec{a}\,f(r - vt) + \vec{b}\,g(r + vt)$$

Nëse kemi të bëjmë vetëm me valë e cila del nga burimi për konstante $\vec{b}$, duhet marrë vlerën zero dhe mbetet:

$$\vec{E} = \frac{\vec{a}}{r}\,f(r - vt) \qquad (19)$$

Kjo është shprehja për valën elektrike sferike. Shohim se në këto valë amplituda është proporcionale e zhdrejtë me largësinë nga burimi. Kjo është e arsyeshme, sepse vala sferike me zmadhimin e largësisë nga burimi e bartë energjinë në pjesë më të mëdha të hapësirës. Meqë vek-

tori i Pointingut është proporcional me E^2, dendësia e rrymimit të energjisë në këtë valë është proporcionalë e zhdrejtë me katrorin e largësisë nga burimi.

Në fund të cekim se për burime të valëve në formë të vijës së drejtë siprfaqja e fazave të njëjta në kohë të caktuar paraqet mbështjellës të cilndrit. Amplituda e tyre është proporcionale e zhdrejtë me rrënjën katrore të largësisë. Si burime të këtilla mund të merren çarjet e holla dhe mjaft të gjata.

g) Valët harmonike elektromagnetike

Në shprehjen (11) për valë të rrafshta paraqiten dy funksione arbitrare f dhe g. Karakteri i këtyre funksioneve varet prej burimit të valëve. Supozojmë se burimi i valëve ndërron me kohën si funksion harmonik. Për këtë rast në shprehje për valë paraqiten funksionet harmonike.

Le të përhapet vala në kahje të vektorit unitar $\vec{n}_o$. Atëherë $\vec{b} = 0$ dhe fitojmë:

$$\vec{E} = \vec{a} f(\vec{r}\,\vec{n}_o - vt)$$

Për funksion f duhet të merret funksioni kosinus, argumenti i së cilit duhet të shumëzohet me ndonjë faktor konstant k. Pra,

$$f(\vec{r}\,\vec{n}_o - vt) = \cos k(\vec{r}\,\vec{n}_o - vt)$$

ose

$$\vec{E} = \vec{a} \cos k(\vec{r}\,\vec{n}_o - vt) = \vec{a} \cos (\vec{r}\, k\, \vec{n}_o - kvt)$$

dhe me zëvendësimet:

$$\vec{k} = k\,\vec{n}_o$$

$$\omega = kv \tag{20}$$

fitojmë:

$$\vec{E} = \vec{a} \cos (\vec{k}\,\vec{r} - \omega t) \tag{21}$$

E njëjta shprehje mund të zbatohet edhe për valë sferike, vetëm se për këto $\vec{n}_o$ e ka kahjen e $\vec{r}$ dhe $\vec{r}\,\vec{n}_o = r$. Fitojmë:

$$\vec{E} = \frac{\vec{a}}{r} \cos (kr = \omega t) \tag{22}$$

Vektorët përkatës magnetikë fitohen nga (16).

Në mënyrë të ngjashme sikurse në mekanikë shohim se këto valë tregojnë periodicitet kohor dhe hapësinor, prandaj teorinë e përshkruar atje nuk do ta përsërisim edhe një herë.

h) Polarizimi i valëve harmonike

Nëse në kahje të përhapjes së valëve e vendosim boshtin x të sistemit koordinat, atëherë vektori elektrik duhet të qëndrojë në rrafshin yz. Do ta zbërthejmë vektorin e fushës në dy komponente:

$$E_y = a \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$
$$E_z = b \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t - \delta) \qquad (23)$$

Këtu është marrë rasti i përgjithshëm, kur komponentet nuk kanë amplituda të njëjta dhe lëkunden me një ndryshim faze δ. E eliminojmë nga (23) kohën t. Nga ekuacioni i parë kemi:

$$\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) = \frac{E_y}{a}$$

dhe

$$\sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t) = \sqrt{1 - \frac{E^2{}_y}{a^7}}$$

Ekuacioni i dytë shprehet në formën:

$$\frac{E_z}{b} = \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\cos\delta + \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\sin\delta$$

ose

$$\frac{E_z}{b} - \frac{E_y}{a}\cos\delta = \sqrt{1 - \frac{E^2{}_y}{a^2}}\sin\delta$$

E ngrisim në katror:

$$\frac{E^2{}_z}{b^2} + \frac{E^2{}_y}{a^2}\cos^2\delta - 2\frac{E_y}{a}\frac{E_z}{b}\cos\delta = \sin^2\delta - \frac{E^2{}_y}{a^2}\sin^2\delta$$

dhe përfundimisht fitojmë:

$$\frac{E^2{}_y}{a^2} + \frac{E^2{}_z}{b^2} - 2\frac{E_y}{a}\frac{E_z}{b}\cos\delta = \sin^2\delta \qquad (24)$$

Shohim se vektori elektrik ndërron ashtu që mbarimi i tij përshkruan lakoren (24) e kjo është elipsa. Themi se vala është polarizuar në mënyrë eliptike.

Nëse në mes të komponenteve nuk ka ndryshim faze $\delta = 0$ ose ky ndryshim është i barabartë me π, atëherë (24) redukohet në:

$$\left(\frac{E_y}{a} \mp \frac{E_z}{b}\right)^2 = 0 \qquad (25)$$

Në mënyrë të ngjashme sikurse në (II.1.d) mund të fitohet jo vetëm polarizimi linear (25), por edhe eliptik me përputhje të boshteve të elipsës me boshte të sistemit koordinat:

$$\frac{E^2_y}{a^2} + \frac{E^2_z}{b^2} = 1 \tag{26}$$

apo rrethor për $a = b$:

$$E^2_y + E^2_z = a^2 \tag{27}$$

Shprehja (26) fitohet nga (24) për $\delta = \frac{2}{\pi}$, ndërsa (27) fitohet nga (26).

2. VALËT ELEKTROMAGNETIKE NË PËRCJELLËS

a) Ekuacioni diferencial

Ekuacionet e Maksuelit për mjedise të cilat e përcjellin rrymën e kanë formën:

$$rot\,\vec{H} = \sigma\,\vec{E} + \varepsilon\,\dot{\vec{E}} \tag{1}$$

$$rot\,\vec{E} = -\,\mu\,\dot{\vec{H}} \tag{2}$$

$$div\,\vec{E} = 0$$

$$div\,\vec{E} = 0 \tag{3}$$

Edhe në këtë rast e përcaktojmë fushën në pjesë të hapësirës ku nuk ka elektricitet të shpërndarë, prandaj e kemi marrë $\rho = 0$.

Që të eliminojmë vektorin $\vec{H}$, do të derivojmë ekuacionin (1) sipas kohës dhe e shumëzojmë me μ. Fitojmë:

$$rot\,\mu\,\dot{\vec{H}} = \sigma\mu\,\dot{\vec{E}} + \varepsilon\mu\,\ddot{\vec{E}}$$

E zëvendësojmë ekuacionin (2):

$$-\,rot\,rot\,\vec{E} = \sigma\mu\,\dot{\vec{E}} + \varepsilon\mu\,\ddot{\vec{E}}$$

ose

$$-\,grad\,div\,\vec{E} + \triangle\,\vec{E} = \sigma\mu\,\dot{\vec{E}} + \varepsilon\mu\,\ddot{\vec{E}}$$

Nga ekuacioni (3) anëtari i parë është i barabartë me zero dhe ngel ekuacioni diferencial:

$$\triangle \vec{E} = \sigma\mu \dot{\vec{E}} + \varepsilon\mu \ddot{\vec{E}} \tag{4}$$

Në mënyrë të ngjashme fitojmë për fushë magnetike:

$$\triangle \vec{H} = \sigma\mu \dot{\vec{H}} + \varepsilon\mu \ddot{\vec{H}}$$

Këto ekuacione diferenciale ndryshojnë nga ekuacioni i valës për anëtarin i cili përmban derivatin e parë sipas kohës. Quhen ekuacione telegrafike.

b) Fusha elektrike

Do të hulumtojmë a thua ekuacionin (4) e kënaq funksioni i valës së rrafshët. Do të supozojmë valën harmonike e cila përhapet në kahje të boshtit x dhe do ta shkruajmë ekuacionin (XV.1.21) në formë eksponeciale:

$$\vec{E} = \vec{a}\, e^{i(kx - \omega t)} \tag{5}$$

që të zëvendësojmë në (4), do të njehsojmë së pari:

$$\triangle \vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial x^2} = - k^2 \vec{E}$$

dhe

$$\dot{\vec{E}} = - i\omega \vec{E}$$

$$\ddot{\vec{E}} = - \omega^2 \vec{E}$$

Pasi të zëvendësojmë dhe të thjeshtojmë me faktor eksponencial fitojmë:

$$k^2 = i\omega\sigma\mu + \omega^2\varepsilon\mu$$

ose

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon\mu + i\,\frac{\sigma\mu}{\omega}} \tag{6}$$

Shohim se funksioni (5) e kënaq ekuacionin diferencial (4) vetëm nëse për numër të valës k merret shprehja komplekse (6).

Sikurse çdo numër kompleks, edhe rrënjën në shprehjen (6) mund ta paraqesim me ndihmën e pjesës reale dhe imagjinare. Shkruajmë:

$$\sqrt{\varepsilon\mu + i\,\frac{\sigma\mu}{\omega}} = \frac{1}{c}\,(n + i\varkappa) \tag{7}$$

Faktori $1/c$ duhet të shkruhet në anën e djathtë, sepse shprehja në anën e majtë ka dimension të vlerës reciproke të shpejtësisë dhe konstantet e reja n, $\varkappa$ të paraqitura në këtë mënyrë janë numra pa dimensione.

Prandaj, shprehjen (6) mund ta shkruajmë në këtë mënyrë:

$$k = \frac{\omega}{c}\,(n + i\varkappa) \tag{8}$$

E zëvendësojmë (8) në (5):

$$\vec{E} = \vec{a}\, e^{\,i\,\omega\,[(n + i\,\varkappa)\,x/c - t]}$$

ose

$$\vec{E} = \vec{a}\, e^{-\omega \varkappa\, x/c}\, e^{\,i\,(\omega n\, x/c - \omega t)} \tag{9}$$

Ndërsa pjesa reale e këtij **funksioni** është:

$$\vec{E} = \vec{a}\, e^{-\omega \varkappa\, x/c} \cos \omega (n\, x/c - t) \tag{10}$$

Ky është funksion i valës së rrafshët. Amplituda e saj nuk është konstante, por, eksponencialisht zvogëlohet me gjatësinë e rrugës x. Pra, vala shuhet me thellësin e depërtimit në përcjellës ashtu që në thellësi të mëdha vlera e amplitudës së saj bëhet mjaft e vogël. Themi se valët elektromagnetike thithen në përcjellës. Në këta, energjia e valës elektromagnetike shndërrohet në nxehtësi. Intensiteti i thithjes varet prej faktorit $\varkappa$, i cili paraqet konstante specifike të materialit të përcjellësit dhe quhet faktor i thithjes.

Madhësia n quhet indeks i thyerjes së mjedisit. Në të vërtetë $\omega n/c = k$ dhe, meqë $k/\omega = 1/v$, fitojmë $n = c/v$, që i përgjigjet përkufizimit të indeksit të thyerjes së mjedisit.

c) Lidhja në mes të konstanteve optike dhe elektromagnetike të mjedisit

Deri tani vetitë karakteristike të mjedisit i kemi shprehur me ndihmën e konstanteve elektromagnetike ε, μ dhe σ. Më parë në vend të tyre i paraqitëm konstantet materiale n dhe $\varkappa$, të cilat zbatohen më tepër në optikë dhe i quajmë konstante optike. Do t'i shprehim konstantet optike me ndihmën e konstanteve elektromagnetike.

Fillojmë nga shprehja (7), të cilën e ngrisim në katror:

$$n^2 + 2in\varkappa - \varkappa^2 = \left(\varepsilon\mu + i\,\frac{\sigma\mu}{\omega}\right) c^2$$

I barazojmë pjesët reale dhe imagjinare të këtyre numrave kompleks. Do të kemi:

$$n^2 - \varkappa^2 = \varepsilon\mu c^2$$

$$2n\varkappa = \frac{\sigma\mu}{\omega} c^2$$

Kemi fituar sistem të ekuacioneve algjebrike. Për zgjidhjen e tyre duhet t'i ngrisim në katrorë dhe t'i mbledhim:

$$(n^2 + \varkappa^2) = \left(\varepsilon^2\mu^2 + \frac{\sigma^2\mu^2}{\omega^2}\right) c^4$$

ose

$$n^2 + \varkappa^2 = c^2\mu \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}} \qquad (11)$$

Me këtë ekuacion e marrim edhe një herë ekuacionin:

$$n^2 - \varkappa^2 = \varepsilon\mu c^2$$

Këto ekuacione një herë i mbledhim dhe një herë i zbresim. Fitojmë:

$$n = c \sqrt{\frac{\mu}{2}\left(\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}} + \varepsilon\right)} \qquad (12)$$

$$\varkappa = c \sqrt{\frac{\mu}{2}\left(\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}} - \varepsilon\right)}$$

Këto janë shprehjet e kërkuara për lidhje të konstanteve optike dhe elektromagnetike.

Për përcjellës të mirë $\varepsilon \ll \sigma$, prandaj ε mund të mos përfillet. Do të fitojmë nga ekuacionet (12):

$$n = \varkappa = c \sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\omega}}$$

d) Vektori magnetik

Për përcaktimin e vektorit magnetik në valë elektromagnetike në përcjellës fillojmë nga ekuacioni II i Maksuelit:

$$rot\,\vec{E} = -\mu\,\dot{\vec{H}} \qquad (13)$$

dhe shfrytëzojmë (5) për fushë elektrike:

$$\vec{E} = \vec{a}\,e^{i(kx - \omega t)} \qquad (14)$$

Kërkojmë rotorin e kësaj shprehje:

$$rot\,\vec{E} = rot\,\vec{a}\,e^{i(kx - \omega t)} = grad\,e^{i(kx - \omega t)} \times \vec{a}$$

Meqë

$$grad\; e^{i(k x - \omega t)} = i\, k\, e^{i(k x - \omega t)}\; grad\; x =$$

$$= i\, k\, e^{i(k x - \omega t)}\, \vec{x}_o$$

Këto me $\vec{x}_o$ e kemi shënuar vektorin unitar në kahje të përhapjes së valës, pra në kahje të boshtit x. Do të kemi:

$$rot\, \vec{E} = e\, k\, \vec{x}_o \times \vec{a}\, e^{i(k x - \omega t)}$$

ose

$$rot\, \vec{E} = i\, k\, \vec{x}_o \times \vec{E} \qquad (14a)$$

E derivojmë (14) sipas kohës:

$$\dot{\vec{E}} = - i\omega\, \vec{E}$$

dhe do të kemi:

$$rot\, \vec{E} = - \frac{k}{\omega}\, \vec{x}_o \times \dot{\vec{E}}$$

Shfrytëzojmë (13):

$$- \mu\, \dot{\vec{H}} = - \frac{k}{\omega}\, \vec{x}_o \times \dot{\vec{E}}$$

E integrojmë sipas kohës:

$$\vec{H} = \frac{k}{\mu\omega}\, \vec{x}_o \times \vec{E} \qquad (15)$$

Meqë k është numër kompleks, duhet ta eliminojmë nga kjo shprehje. Sipas (8) kemi:

$$\frac{k}{\mu\omega} = \frac{n + i}{c\mu}$$

dhe e shprehim në formën eksponenciale:

$$n + i\varkappa = \rho e^{i\varphi} \qquad (16)$$

Pra,

$$\frac{k}{\mu\omega} = \frac{\rho}{c\mu}\, e^{i\varphi}$$

E zëvendësojmë në (15) dhe për $\vec{E}$ shkruajmë vlerën e tij (9):

$$\vec{H} = \frac{\rho}{c\mu} \vec{x}_o \times \vec{a}\, e^{-\omega \varkappa x/c} e^{i[\omega(n x/c - t) + \varphi]} \tag{17}$$

Vlera e ρ mund të përcaktohet nga (16). Fitojmë:

$$\rho = \sqrt{n^2 + \varkappa^2}$$

kurse nga (11):

$$\rho = c \sqrt{\mu \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}}}$$

Këtë vlerë e zëvendësojmë në (17) dhe marrim vetëm pjesën reale të saj. Fitojmë fushën magnetike në valë elektromagnetike në përcjellës.

$$\vec{H} = \vec{x}_o \times \vec{a} \sqrt{\frac{1}{\mu} \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}}}\, e^{-\omega \varkappa x/c} \cos[\omega(n\,x/c - t) + \varphi] \tag{18}$$

Shohim se edhe te valët elektromagnetike në përcjellës vektori magnetik qëndron normal ndaj kahjes së përhapjes së valëve dhe vektorit elektrik. Faktori i proporcionalitetit në mes të intensitetit të vektorit elektrik dhe magnetik në përcjellës është:

$$\sqrt{\frac{1}{\mu} \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}}}$$

Edhe vektori magnetik thithet në përcjellës me të njëjtin faktor sikurse vektori elektrik.

Në mes të vektorit magnetik dhe vektorit elektrik në valë elektromagnetike në përcjellës ekziston edhe një ndryshim faze φ. Vektori elektrik në këto valë nuk lëkundet me të njëjtën fazë me të cilën lëkundet vektori magnetik. Nuk është vështir ta përcaktojmë këtë ndryshim.

Nga shprehja (16) kemi:

$$tg\varphi = \frac{\varkappa}{n}$$

Nëse dëshirojmë që këtë ndryshim faze ta paraqesim me ndihmën e konstanteve elektromagnetike, atëherë duhet të kërkojmë këtë shprehje:

$$tg\,2\varphi = \frac{2tg\varphi}{1 - tg^2\varphi} = \frac{\dfrac{2\varkappa}{n}}{1 - \dfrac{\varkappa^2}{n^2}} = \frac{2\varkappa n}{n^2 - \varkappa^2}$$

Më parë kemi fituar:

$$2n\varkappa = \frac{\sigma\mu}{\omega}\,c^2$$

$$n^2 - \varkappa^2 = \varepsilon\mu c^2$$

dhe rrjedh:

$$tg\,2\varphi = \frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \tag{19}$$

Kësisoji vala elektromagnetike në përcjellës është plotësisht e përcaktuar.

3. RREZATIMI ELEKTROMAGNETIK I BURIMIT OSHILUES TË LOKALIZUAR

a) Potenciali vektorial

Deri tash i kemi shqyrtuar valët elektromagnetike pavarësisht prej burimit të tyre. Do të përqëndrojmë vëmendjen edhe për burime të valëve.

Ta mendojmë elektricitetin dhe rrymat të shpërndara në vëllim relativisht të vogël. Supozojmë se këto gjatë kohës ndërrojnë në mënyrë oshiluese dhe paraqesin burim të valëve. Pra, supozojmë se burimet e valëve janë oshiluese dhe të lokalizuara në vëllim të caktuar.

Nëse supozojmë se këto burime ndërrojnë si funksione harmonike të kohës, atëherë mund të shkruajmë:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(\vec{r}, t) = \rho(r)\, e^{-i\omega t} \\ \vec{j} &= \vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r})\, e^{-i\omega t} \end{aligned} \tag{1}$$

Brenda vëllimit në të cilën gjendet burimi i fushës e zgjedhim pikën 0 për origjinë të vektorit të pozitës. Këtë vëllim e ndajmë në elemente të vogla të tij $d\tau'$. Gjeometrinë e këtij problemi e tregon fig. 103. Do të shqyrtojmë elementin e vëllimit $d\tau'$ të përshkruar rreth pikës B. Vektorin e pozitës së kësaj pike nga origjina e shënojmë me $\vec{r}'$. Fushën e hulumtojmë në pikën M, e cila është e përcaktuar me vektorin e pozitës $\vec{r}$. Largësinë e pikës M nga pika B e shënojmë me u.

Burimet e fushës emitojnë valë elektromagnetike që në pikën M i përcaktojnë potencialet e tyre. Kuptohet se kemi të bëjmë me potenciale retarde. Shfrytëzojmë shprehjen (XIV.11.16):

$$\vec{A} = k_m \int \frac{1}{u} \vec{j} \left(\vec{r}', t - \frac{u}{v} \right) d\tau' \quad (2)$$

Ndërsa (1) e merr formën:

$$\vec{j} \left(\vec{r}', t - \frac{u}{v} \right) = j(r') e^{-i\omega \left(t - \frac{u}{v} \right)} =$$

$$= \vec{j}(\vec{r}') e^{i\omega u/v} e^{-i\omega t} =$$

$$= \vec{j}(\vec{r}' t) e^{iku}$$

$$k = \frac{\omega}{V}$$

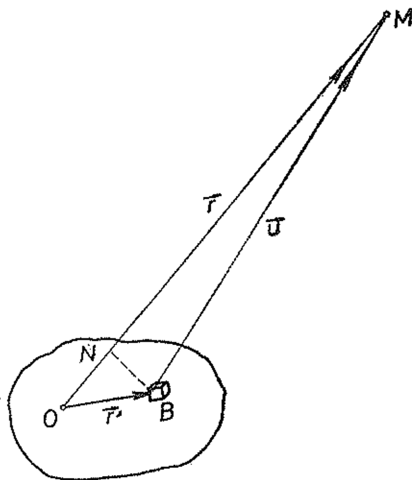


Fig. 103

E zëvendësojmë në shprehjen (2):

$$\vec{A} = k_m \int \frac{1}{u} \vec{j}(\vec{r}', t) e^{iku} d\tau' \quad (3)$$

Nga fig. 103 shohim se për pikën e larguar M vlen:

$$u = \overline{BM} \approx \overline{NM} = r - \overline{ON}$$

dhe, meqë $\overline{ON}$ paraqet projeksionin e vektorit $\vec{r}'$ në kahje të $\vec{r}$, do të kemi:

$$\overline{ON} = \vec{r}' \vec{r}_o$$

ku me $\vec{r}_o$ e kemi shënuar vektorin unitar në kahje të $\vec{r}$.

Pra:

$$u = r - \vec{r}' \vec{r}_o$$

kurse vlera reciproke e saj:

$$u^{-1} = r^{-1} \left(1 - \frac{\vec{r}' \vec{r}_o}{r} \right)^{-1}$$

Pasi $r \gg \vec{r}' \vec{r}_o$, anëtarin e dytë mund të mos e përfillim. Fitojmë:

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{r}$$

E zëvendësojmë në (3) vlerën për u dhe vlerën e saj reciproke:

$$\vec{A} = k_m \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{j}\, e^{-ik \vec{r}' \vec{r}_o} d\tau'$$

E zhvillojmë funksionin eksponencial nën integral në seri pambarim:

$$e^{-ik \vec{r}' \vec{r}_o} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (-ik)^l (\vec{r}' \vec{r}_o)^l$$

dhe fitojmë:

$$\vec{A} = k_m \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (-ik)^l \int \vec{j}(\vec{r}', t) \cdot (\vec{r}'.\vec{r}_o)^l d\tau' \qquad (4)$$

Shohim se për potencial kemi fituar seri të pambarim, çka do të thotë se fusha përbëhet prej një numri të madh komponentesh, ndikimi i të cilave zvogëlohet me rritjen e numrit të anëtarëve në seri. Prandaj gjatë njehsimit të fushës është e mjaftuar të kufizohemi vetëm në disa anëtarë të parë të serisë.

Anëtari i parë për $l = 0$ shpreh potencialin vektorial:

$$\vec{A}_o = k_m \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{j}(\vec{r}', t)\, d\tau' \qquad (5)$$

Fusha të cilën e përshkruan ky anëtar quhet fushë e rrezatimit të dipolit elektrik.

Anëtari tjetër i zhvillimit fitohet për $l = 0$ dhe e ka formën:

$$\vec{A}_1 = k_m \frac{e^{ikr}}{r} (-ik) \int \vec{j}(\vec{r}', t) \cdot (\vec{r}' \vec{r}_o)\, d\tau'$$

Shprehjen nën integral mund ta zbërthejmë në pjesën simetrike dhe antisimetrike në këtë mënyrë:

$$\vec{j} \cdot (\vec{r}' \vec{r}_o) = \frac{1}{2} [\vec{j} \cdot (\vec{r}' \vec{r}_o) - \vec{r}' (\vec{j} \vec{r}_o)] + \frac{1}{2} [\vec{j} \cdot (\vec{r}' \vec{r}_o) - \vec{r}' (\vec{j} \vec{r}_o)] =$$

$$= \frac{1}{2} [\vec{j} \cdot (\vec{r}' \vec{r}_o) + \vec{r}' (\vec{j} \vec{r}_o)] + \frac{1}{2} [\vec{r}_o \times (\vec{j} \times \vec{r}')]$$

Këtu anëtarin e dytë e kemi shprehur në formë të prodhimit vektorial. Fitojmë:

$$\vec{A}_1 = -i k_m \frac{k}{2} \frac{e^{ikr}}{r} \int [\vec{r}_o \times (\vec{j} \times \vec{r}')]\, d\tau' -$$

$$- i k_m \frac{k}{2} \frac{e^{ikr}}{r} \int [\vec{j} \cdot (\vec{r}' \vec{r}_o) + \vec{r}' (\vec{j} \vec{r}_o)]\, d\tau' \qquad (6)$$

Shohim se potenciali vektorial i kësaj fushe përbëhet nga dy pjesë. Anëtari i parë paraqet rrezatimin e dipolit magnetik, ndërsa i dyti rrezatimin e kuadrupolit elektrik.

Në mënyrë të ngjashme mund të fitohen anëtarët e rrezatimit të multipoleve të larta. Zakonisht, gjatë përcaktimit të fushës së valëve elektromagnetike mjafton të merren vetëm anëtarët e parë. Nëse momenti i dipolit elektrik i burimit të rrezatimit është i barabartë me zero, atëherë merret në konsiderim anëtari i dytë, rrezatimi i dipolit magnetik dhe kuadrupolit elektrik.

b) Vektorët e fushës

Nëse potenciali vektorial i komponenteve të rrezatimit është i njohur, atëherë me ndihmën e tij mund të gjejmë vektorët e fushës. Shprehjet (5) dhe (6) për dy komponentet e para tregojnë se pozita e pikës M varet vetëm prej faktorit:

$$\frac{e^{ikr}}{r}$$

Faktorët tjerë i shënojmë me $\vec{F}$ dhe për potencial vektorial fitojmë:

$$\vec{A} = \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \vec{F}$$

Vektorin e induksionit magnetik e gjejmë nga shprehja:

$$\vec{B} = rot\,\vec{A} = grad\,\frac{e^{ikr}}{r} \times \vec{F} = \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2}\right) e^{ikr}\,\vec{r}_o \times \vec{F} =$$

$$= ik\left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \vec{r}_o \times \vec{F}\,\frac{1}{r}\,e^{ikr}$$

dhe përfundimisht fitojmë:

$$\vec{B} = ik\left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \vec{r}_o \times \vec{A} \qquad (7)$$

Kjo shprehje përbëhet prej dy anëtarëve. Për pikat të cilat janë afër burimit të fushës r është i vogël dhe njëshin mund të mos e përfillim në krahasim me $1/r$. Për këto pika shprehja do të ketë formën:

$$\vec{B} = -\frac{1}{r}\,\vec{r}_o \times \vec{A} \qquad (8)$$

Kjo hapësirë për rreth burimit të fushës quhet zonë e afërsisë. Mundësia tjetër e specializimit të shprehjes (7) paraqitet për r mjaft të madh. Atëherë mund të mos përfillet $1/r$ dhe do të kemi:

$$\vec{B} = ik\,\vec{r}_o \times \vec{A} \qquad (9)$$

Hapësira e shfrytëzimit të kësaj shprehje quhet zonë valore. Meqë zakonisht kërkojmë fushën në largësi të mëdha, kjo shprehje është mjaft e rëndësishme.

Për përcaktimin e fushës elektrike në zonë valore fillojmë nga ekuacioni i Maksuelit për izolator:

$$rot\,\vec{H} = \varepsilon\,\dot{\vec{E}}$$

e shumëzojmë me μ:

$$rot\,\vec{B} = \varepsilon\mu\,\dot{\vec{E}} = \frac{1}{v^2}\,\dot{\vec{E}}$$

Supozojmë se vektori elektrik varet nga koha si funksion harmonik oshilues:

$$\vec{E} = \vec{E}_o\,e^{-i\omega t}$$

prej nga:

$$\dot{\vec{E}} = -\,i\omega\,\vec{E}$$

dhe fitojmë:

$$rot\,\vec{B} = -\,i\,\frac{\omega}{v^2}\,\vec{E} = -\,i\,\frac{k}{v}\,\vec{E}$$

ose

$$\vec{E} = i\,\frac{v}{k}\,rot\,\vec{B} \qquad (10)$$

E zëvendësojmë në (9):

$$\vec{E} = -\,v\,rot\,(\vec{r}_o \times \vec{A}) = -\,v\,\vec{r}_o \times rot\,\vec{A}$$

Shfrytëzojmë shprehjen (XV.2.14 a):

$$rot\,\vec{A} = ik\,\vec{r}_o \times \vec{A}$$

dhe për vektor elektrik fitojmë:

$$\vec{E} = -\,ikv\,\vec{r}_o \times (\vec{r}_o \times \vec{A}) \qquad (11)$$

c) Energjia e rrezatimit në zonën valore

Energjinë e rrezatimit e përcaktojmë nga vektori i Pointingut:

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu}\,\vec{E} \times \vec{B}$$

Në zonën valore vektorët e fushës janë të përcaktuar me shprehjet (9) dhe (11). I zëvendësojmë vlerat e tyre në shprehje për vektor të Pointingut:

$$\vec{N} = \frac{k^2 v}{\mu} [\vec{r}_o \times (\vec{r}_o \times \vec{A})] \times [\vec{r}_o \times \vec{A}]$$

Vektorët në kllapa të mesme janë ortogonalë, prandaj intensiteti i prodhimit vektorial është i barabartë me prodhimin e intensiteteve të tyre. Për intensitet të vektorit të Pointingut fitojmë:

$$N = \frac{k^2 v}{\mu} |\vec{r}_o \times (\vec{r}_o \times \vec{A})| \, |\vec{r}_o \times \vec{A}|$$

Në faktorin e parë gjendet prodhimi i dy vektorëve ortogonalë, prandaj vlen:

$$|\vec{r}_o \times (\vec{r}_o \times \vec{A})| = |\vec{r}_o \times \vec{A}|$$

Duke u bazuar në këtë rezultat, për intensitet të vektorit të Pointingut fitojmë:

$$N = \frac{k^2 v}{\mu} |\vec{r}_o \times \vec{A}|^2 \qquad (12)$$

dhe paraqet dendësinë e rrezatimit në zonën valore.

4. RREZATIMI I DIPOLIT ELEKTRIK

a) Potenciali vektorial

Për potencial të rrezatimit të dipolit elektrik shfrytëzojmë shprehjen (XV.3.5):

$$\vec{A} = k_m \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{j} \, d\tau' \qquad (1)$$

E transformojmë këtë integral në formë më të përshtatshme. E dimë nga analiza vektoriale se vlen formula:

$$(\vec{j} \nabla) \vec{r}' = \vec{j}$$

prandaj:

$$\int \vec{j} \, d\tau' = \int (\vec{j} \nabla) \vec{r}' \, d\tau'$$

E kryejmë integrimin parcial në anën e djathtë:

$$\int \vec{j} \, d\tau' = - \int \vec{r}' (\nabla \vec{j}) \, d\tau'$$

Nga ekuacioni i kontinuitetit dhe (XV.3.1) do të kemi:

$$div \vec{j} = - \dot{\rho} = i\omega\rho \quad ; \quad \nabla \vec{j} = div \vec{j}$$

Prandaj:

$$\int \vec{j}\, d\tau' = -i\omega \int \vec{r'}\, \rho\, d\tau'$$

Prodhim $\vec{r'}\rho\, d\tau'$ paraqet momentin dipolar të elektricitetit, i cili gjendet në elementin e vëllimit $d\tau'$. Pasi ta integrojmë nëpër tërë vëllimin e lokalizuar të burimit të fushës fitojmë momentin e tërë elektricitetit të tij.

Prandaj shkruajmë:

$$\int \vec{r'}\rho\, d\tau' = \vec{p} \tag{2}$$

kurse integrali do të jetë:

$$\int \vec{j}\, d\tau' = -i\omega \vec{p}$$

Shprehjen e fundit e zëvendësojmë në (1):

$$\vec{A} = -ik_m kv\, \vec{p}\, \frac{e^{ikr}}{r} \tag{3}$$

ku: $\omega = kv$

Duhet theksuar se edhe momenti dipolar është funksion harmonik i kohës si rezultat i ndërrimit harmonik të dendësisë së elektricitetit ρ. Mund të shkruajmë:

$$\vec{p} = \vec{p}_o\, e^{-i\omega t} \tag{4}$$

ku me $\vec{p}_o$ e kemi shënuar amplitudën e momentit dipolar.

b) Zona e afërt e rrezatimit

Në hapësirë afër burimit të rrezatimit për induksion magnetik vlen shprehja (XV.3.8):

$$\vec{B} = -\frac{1}{r}\, \vec{r}_o \times \vec{A}$$

Për potencial vektorial shfrytëzojmë shprehjen (3):

$$\vec{B} = i\, k_m \frac{kv}{r^2}\, e^{ikr}\, \vec{r}_o \times \vec{p}$$

Meqë në këtë hapësirë r është i vogël, për funksion eksponencial mund të marrim përafërsisht vlerën një. Nëse vektorin unitar e shkruajmë në formën $\vec{r}_o = \vec{r}/r$, do të fitojmë:

$$\vec{B} = i\, k_m kv\, \frac{1}{r^3}\, \vec{r} \times \vec{p} \tag{5}$$

Faktin se për vektor të induksionit magnetik kemi fituar vlerë imagjinare, mund ta shpjegojmë kësisoji: Shprehja (5) është rezultat i njehsimit me funksione komplekse, sepse sipas (4) në te figuron faktori $e^{-i\omega t}$, prandaj B përmban faktorin kompleks $i\,e^{-i\omega t}$. Nga ky funksion kompleks duhet të marrim vetëm pjesën e tij reale që është $\sin\omega t$.

Vektorin elektrik e njehsojmë sipas (XV.3.10):

$$\vec{E} = -k_m v^2\, rot\left[\frac{1}{r^3}(\vec{r}\times\vec{p})\right] = -k_m v^2\left[\frac{1}{r^3}\, rot\,(\vec{r}\times\vec{p}) + grad\,\frac{1}{r^3}\times\right.$$

$$\left.\times(\vec{r}\times\vec{p})\right]$$

E dimë se vlen:

$$v^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{4\pi}{\mu} = \frac{k_{el}}{k_m}$$

prej nga fitojmë vlerën e prodhimit:

$$k_m v^2 = k_{el} \tag{6}$$

Kemi treguar në (XIII.5) për potencial vektorial të fushës konstante $\varkappa$:

$$rot\,(\vec{r}\times\vec{p}) = -2\vec{p}$$

dhe

$$grad\,\frac{1}{r^3} = -\frac{3\vec{r}}{r^5}$$

Për vektor elektrik fitojmë:

$$\vec{E} = k_{el}\left[\frac{2\vec{p}}{r^3} + \frac{3\vec{r}}{r^5}\times(\vec{r}\times\vec{p})\right]$$

E zbërthejmë këtë prodhim të dyfishtë vektorial:

$$\vec{E} = k_{el}\,\frac{1}{r^3}\left[\frac{3\vec{r}\,(\vec{r}\,\vec{p})}{r^2} - \frac{3\vec{p}\,r^2}{r^2} + 2\vec{p}\right]$$

ose

$$\vec{E} = k_{el}\,\frac{1}{r^3}\left[\frac{3\vec{r}\,(\vec{r}\,\vec{p})}{r^2} - \vec{p}\right] \tag{7}$$

Kështu e kemi fituar shprehjen për fushë të dipolit elektrik. Prandaj mund të përfundojmë se fusha në zonë të afërt të burimit të lokalizuar në vëllim relativisht të vogël është identike me fushën e dipolit elektrik. Prandaj, është e qartë pse ky rrezatim quhet rrezatim i dipolit elektrik.

c) Zona e valës

Vektorët e fushës për zonë të valës i gjejmë duke zëvendësuar potencialin (3) në shprehjet (XV.3.9 dhe 11). Fitojmë për indukcionin magnetik:

$$\vec{B} = k_m \frac{k^2 v}{r} e^{ikr} \vec{r}_o \times \vec{p} \tag{8}$$

Meqë në shprehjen (4) për moment dipolar gjendet faktori $e^{-i\omega t}$ shohim se në (8) përmbahet faktori:

$$\frac{1}{r} e^{i(kr-\omega t)}$$

i cili është karakteristik për valë sferike. Pra, në zonën e valës fusha ndërron sipas rregullave të ndërrimit të valëve sferike dhe për këtë arsye kjo pjesë e hapësirës quhet zonë e valës.

Shprehja (8) tregon se vektori i induksionit magnetik qëndron normal ndaj rrafshit të cilin e përcaktojnë kahja e përhapjes së valëve $\vec{r}_o$ dhe kahja e lëkundjes së dipolit elektrik $\vec{p}$.

Për fushë elektrike fitojmë:

$$\vec{E} = - k_{el} k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \vec{r}_o \times (\vec{r}_o \times \vec{p}) \tag{9}$$

për $k_m v^2 = k_{el}$

Kjo shprehje tregon se vektori elektrik qëndron në rrafshin të cilin e përcaktojnë $\vec{r}_o$ dhe $\vec{p}$ dhe në këtë rrafsh është normal ndaj $\vec{r}_o$, ndaj kahjes së përhapjes së valëve. Në figurën 104 është paraqitur pika M në të cilën e përcaktojmë fushën në sipërfaqe të sferës. Boshtin polar e vendosim në kahje të lëkundjes së momentit të dipolit $\vec{p}$. Meqë vektori $\vec{B}$ është i përcaktuar me prodhimin vektorial $\vec{r}_o \times \vec{p}$, rrjedh se ky duhet të jetë tangjencial në paralelen e sferës nëpër pikëM. Vektori i fushës elektrike sipas (9) ka kahje të tangjentes në meridian të sferës. Parashenja minus tregon orientimn kah poli i saj.

Fig. 104

Prandaj, vala të cilën e emiton dipoli elektrik është e polarizuar në mënyrë lineare ashtu që vektori elektrik i saj lëkundet në rrafshin të cilin e përcaktojnë kahja e përhapjes dhe kahja e dipolit.

d) Energjia e rrezatimit

Për intensitet të vektorit të Pointingut kemi gjetur shprehjen (XV.3.12):

$$N = \frac{k^2 v}{\mu} |\vec{r}_o \times \vec{A}|^2$$

E zëvendësojmë vlerën e A nga shprehja (3):

$$N = k^2{}_m \frac{k^4 v^3}{\mu r^2} |\vec{r}_o \times p|^2$$

Intensiteti i prodhimit vektorial është:

$$|\vec{r}_o \times \vec{p}| = p \sin\vartheta$$

Prandaj kemi:

$$N = k^2{}_m \frac{k^4 v^3}{\mu r^2} p^2 \sin^2\vartheta \qquad (10)$$

Shohim se dendësia e rrymimit të energjisë së rrezatimit varet prej këndit ϑ. Kjo është më e madhe në kahje normale të lëkundjes së dipolit. Për kënde më të vogla kjo zvogëlohet me katrorin e sinusit të këtij këndi. Në kahje të lëkundjes së dipolit nuk ka fare rrezatim.

Lehtë mund të njehsohet energjia totale e rrezatimit. Këtë e fitojmë duke integruar nëpër sipërfaqe të sferës me rreze arbitrare r. Pra,

$$W = \int N \, dS$$

Elementi i sipërfaqes është:

$$dS = r^2 d\Omega = 2\pi r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta$$

Do të kemi:

$$W = k^2{}_m \frac{h^4 v^3}{\mu} 2\pi p^2 \int_0^\pi \sin^3\vartheta \, d\vartheta$$

Vlera e këtij integrali është 4/3.

E dimë se

$$\frac{2\pi}{\mu} = \frac{1}{2} \frac{1}{k_m}$$

dhe fitojmë:

$$W = \frac{2}{3} k_m k^4 v^3 p^2 \qquad (11)$$

Kjo është vlera momentale e energjisë totale të rrezatimit, sepse momenti dipolar p ndërron gjatë kohës në mënyrë harmonike. Do të përcaktojmë vlerën e kësaj energjie për kohën e një periode. Pasi vlen:

$$\overline{p^2} = p^2_o \overline{\cos^2\vartheta\, t} = \frac{1}{2} p^2_o$$

do të kemi:

$$\overline{W} = \frac{1}{3} k_m k^4 v^3 p^2_o \tag{12}$$

Kjo është vlera mesatare e rrezatimit të energjisë së dipolit elektrik.

5. RREZATIMI I DIPOLIT MAGNETIK DHE KUADRUPOLIT ELEKTRIK

a) Rrezatimi i dipolit magnetik

Do të përqëndrojmë vëmendjen në anëtarin tjetër të (XV.3.4). Ky fitohet për $l = 1$. Kemi treguar se ky anëtar mund të zbërthehet në dy pjesë dhe fitohet shprehja (XV.3.6), e cila e ka formën:

$$\vec{A}_l = \vec{A}_k + \vec{A}_d = - i\, k_m \frac{k}{2} \frac{e^{ikr}}{r} \int [\, \vec{j} \cdot (\vec{r}\,' \vec{r}_o) + \vec{r}\,' (\vec{r}_o \vec{j})]\, d\tau' -$$

$$- i\, k_m \frac{k}{2} \frac{e^{ikr}}{r} \int [\vec{r}_o \times (\vec{j} \times \vec{r}\,')]\, d\tau' \tag{1}$$

Së pari do të shqyrtojmë anëtarin e dytë. Në te gjendet vektori unitar $\vec{r}_o$ i orientuar kah pika në të cilën e kërkojmë fushën. Ky nuk varet prej elementit të vëllimit të integrimit, prandaj mund ta shkruajmë përpara integralit:

$$A_d = i\, k_m k \frac{e^{ikr}}{r} \vec{r}_o \times \left(\frac{1}{2} \int \vec{r}\,' \times \vec{j}\, d\tau' \right)$$

Pasi të kryejmë integrimin, si rezultat fitojmë një vektor. Do ta shënojmë me $\vec{m}$:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r}\,' \times \vec{j}\, d\tau' \tag{2}$$

dhe për potencial vektorial fitojmë shprehjen:

$$\vec{A}_d = i\, k_m k \frac{e^{ikr}}{r} \vec{r}_o \times \vec{m} \tag{3}$$

Nga kjo shprehje do t'i përcaktojmë vektorët e fushës. Nga (XV.3.9) e përcaktojmë induksionin magnetik:

$$\vec{B} = - k_m k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \vec{r}_o \times (\vec{r}_o \times \vec{m}) \tag{4}$$

Ndërsa nga (XV.3.11) e përcaktojmë vektorin e fushës elektrike:

$$\vec{E} = k_m k^2 v \frac{e^{ikr}}{r} \vec{r_o} \times [\vec{r_o} \times (\vec{r_o} \times \vec{m})]$$

E paraqesim konstanten elektrike me ndihmën e formulës $k_m = k_{el}/v^2$ dhe i zhvillojmë prodhimet vektoriale. Shënojmë shkurtimisht:

$$\vec{r_o} \times \vec{m} = \vec{M}$$

dhe do të kemi:

$$\vec{r_o} \times (\vec{r_o} \times \vec{M}) = \vec{r_o}(\vec{r_o} \cdot \vec{M}) - \vec{M} = -\vec{M}$$

sepse $\vec{r_o}$ qëndron normal ndaj M. Me ndihmën e kësaj shprehje do të gjejmë:

$$\vec{E} = -k_{el} \frac{k^2}{v} \frac{e^{ikr}}{r} (\vec{r_o} \times \vec{m}) \tag{5}$$

I krahasojmë shprehjet e fituara (4) dhe (5) me shprehjet përkatëse (XV.4.8) dhe (XV.4.9) të fituara për rrezatim të dipolit elektrik. Shohim se shprehja (4) ndryshon nga shprehja (XV.4.9) vetëm për madhësitë përkatëse elektrike dhe magnetike, ashtu që në (XV.4.9) qëndrojnë madhësitë elektrike në vend ku në (4) qëndrojnë madhësitë magnetike. Prandaj është e arsyeshme që shprehjen (4) ta mendojmë si fushë të dipolit magnetik. Kjo është edhe arsyeja pse ky rrezatim quhet rrezatim i dipolit magnetik. Nëse e krahasojmë shprehjen (XV.4.8) me shprehjen (5), e diktojmë të njëjtën ngjashmëri. Madhësitë elektrike në (5) zëvendësohen në (XV.4.8) me madhësitë përkatëse magnetike. Por, megjithatë, diktohet një ndryshim thelbësor në mes të shprehjeve (XV.4.8) dhe (5). Në vend të faktorit v në shprehjen (XV.4.8), në shprehjen (5) qëndron faktori — $1/v$. Pra, vektori i fushës (5) është më i vogël se vektori përkatës i fushës (XV.4.8) për faktorin $1/v^2$. Për këtë arsye këto dy rrezatime nuk gjenden në të njëjtin përafrim. Pra, rrezatimi i dipolit magnetik gjindet në përafrim më të lartë se rrezatimi i dipolit elektrik.

Nga ngjashmëria e cekur është e qartë se madhësia $\vec{m}$, të cilën e kemi përkufizuar me shprehjen (2), ka kuptim të momentit të dipolit magnetik të burimit të lokalizuar të rrezatimit elektromagnetik.

Lehtë mund të përcaktojmë energjinë e rrezatimit të dipolit magnetik. Fillojmë nga shprehja (XV.3.12) në të cilën e zëvendësojmë shprehjen (3) për potencial vektorial të rrezatimit të dipolit magnetik. Fitojmë:

$$N = k_m^2 \frac{k^4 v}{\mu r^2} |\vec{r_o} \times (\vec{r_o} \times \vec{m})|^2$$

Meqë $\vec{r}_o$ qëndron normal ndaj vektorit $(\vec{r}_o \times \vec{m})$, atëherë intensiteti i prodhimit vektorial do të jetë i barabartë me prodhimin e intensitetit të vektorëve dhe, që $\vec{r}_o$ është vektor unitar, do të kemi:

$$|\vec{r}_o \times (\vec{r}_o \times \vec{m}| = |\vec{r}_o \times \vec{m}| = m \sin\vartheta$$

ku ϑ është këndi në mes të vektorëve $\vec{r}_o$ dhe $\vec{m}$. Fitojmë:

$$N = k^2{}_m \frac{k^2 v\, m^2}{\mu r^2} \sin^2\vartheta \tag{6}$$

Kjo shprehje ndryshon nga shprehja përkatëse (XV.4.10) të cilën e kemi fituar për rrezatim të dipolit elektrik, për faktorin $1/v^2$, prandaj me të njëjtën ngjashmëri mund të fitojmë energjinë e rrezatimit të dipolit magnetik. Fitohet e njëjta shprehje sikurse (XV.4.12) me ndryshim për faktorin e cekur. Pra,

$$\overline{W} = \frac{1}{3} k_m k^4 v\, m^2{}_o \tag{7}$$

Kësisoji i kemi përcaktuar shprehjet themelore për rrezatim të dipolit magnetik.

b) Rrezatimi i kuadrupolit elektrik

Anëtari simetrik i shprehjes (1) paraqet potencialin vektorial:

$$\vec{A}_k = - i\, k_m \frac{k}{2} \frac{e^{ikr}}{r} \int [(\vec{r}' \vec{r}_o)\, \vec{j} + \vec{r}'(\vec{r}_o \vec{j})] d\tau' \tag{8}$$

Edhe këtu shfrytëzojmë formulën:

$$\vec{j} = (\vec{j}\, \nabla) \vec{r}'$$

ndërsa integralin e shkruajmë në formën:

$$\int \{ (\vec{r}' \vec{r}_o)(\vec{j}\, \nabla) \vec{r}' + \vec{r}'' [\vec{r}_o(\vec{j}\, \nabla) \vec{r}'] \} d\tau'$$

Këtë mund ta shkruajmë si veprim të operatorit $(\vec{j}\, \nabla)$ në prodhim të dy vektorëve:

$$\int (\vec{j}\, \nabla) [\vec{r}' (\vec{r}' \vec{r}_o)] d\tau'$$

Pasi të kryejmë integrimin parcial, do të fitojmë:

$$- \int \vec{r}' (\vec{r}' \vec{r}_o)\, \nabla\, \vec{j}\, d\tau'$$

Sipas ekuacionit të kontinuitetit:

$$div\,\vec{j} = \nabla\,\vec{j} = -\dot{\rho} = i\omega\rho$$

ky integral do të ketë formën:

$$-\,i\omega \int \vec{r}'\,(\vec{r}'\,\vec{r}_o)\rho d\tau'$$

E zëvendësojmë në shprehjen (8) për potencial vektorial:

$$\vec{A}_k = -\,k_m\,k^2\,v\,\frac{e^{ikr}}{r}\int \vec{r}'\,(\vec{r}'\,\vec{r}_o)\rho d\tau' \qquad (9)$$

Do të shqyrtojmë atë se çfarë paraqet ky integral. Për këtë arsye do t'i zbërthejmë vektorët e tij në komponente. Do t'i shënojmë komponentet e vektorit të pozitës së elementit të vëllimit $d\tau'$ me ξ, η, ζ. Pra,

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

Ndërsa komponentet e vektorit unitar $\vec{r}_o$ të pikës $M(x, y, z)$ janë:

$$\vec{r}_o = \begin{pmatrix} r_{ox} \\ r_{oy} \\ r_{oz} \end{pmatrix}$$

Do të kemi:

$$\int \vec{r}'(\vec{r}'\,\vec{r}_o)\rho d' = \int (\vec{i}\,\xi + \vec{j}\,\eta + \vec{k}\zeta)(r_{ox}\xi + r_{oy}\eta + r_{oz})\rho d\tau' =$$

$$= \vec{i}[r_{ox} \int \xi^2\rho\, d\tau' + r_{dy} \int \xi\eta\rho\, d\tau' + r_{oz} \int \xi\zeta\rho\, d\tau'] +$$

$$+ \vec{j}\,[r_{ox} \int \xi\eta\rho d\tau' + r_{oy} \int \eta^2\rho\, d\tau' + r_{oz} \int \eta\zeta\rho\, d\tau'] +$$

$$+ \vec{k}\,[r_{ox} \int \xi\zeta\rho d\tau' + r_{oy} \int \zeta\eta\rho d\tau' + r_{oz} \int \zeta^2\rho\, d\tau']$$

Këto integrale paraqesin elementet e momentit kuadripolar (XII.13.11. dhe 12), prandaj mund të shkruajmë shkurtimisht:

$$\int \vec{r}'\,(\vec{r}'\,\vec{r}_o)\,\rho\,d\tau' = \vec{i}\,(r_{ox}\,Q_{xx} + r_{oy}\,Q_{xy} + r_{oz}\,Q_{xz}) +$$

$$+ \vec{j}\,(r_{ox}\,Q_{xy} + r_{oy}\,Q_{yy}\,r_{oz}\,Q_{yz}) +$$

$$+ \vec{k}\,(r_{ox}\,Q_{xz} + r_{oy}\,Q_{yz} + r_{oz}\,Q_{zz})$$

Për potencial vektorial përfundimisht fitojmë:

$$\vec{A}_k = -k_m k^2 v \frac{e^{ikr}}{r} [\vec{i}(r_{ox} Q_{xx} + r_{oy} Q_{xy} + r_{oz} Q_{xz}) + \vec{j}(r_{ox} Q_{yx} + r_{oy} Q_{yy} + r_{oz} Q_{yz}) + \vec{k}(r_{ox} Q_{xz} + r_{oy} Q_{yz} + r_{oz} Q_{zz})] \quad (10)$$

Shohim se në shprehje për potencial vektorial paraqiten elementet e momentit të kuadrupolit elektrik të elektricitetit të burimit të fushës. Kjo është edhe arsyeja pse kjo komponente e rrezatimit quhet rrezatim i kuadrupolit elektrik.

Kuadrupoli elektrik është madhësi e përbërë nga gjashtë elemente. Këto elemente mund t'i shpërndajmë në mënyrë simbolike në këte skemë:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{xz} & Q_{yz} & Q_{zz} \end{pmatrix} \quad (11)$$

në të cilën janë të barabarta ato elemente të cilat qëndrojnë simetrikisht ndaj diagonales së matricës. Madhësia fizike, sikurse e kemi cekur edhe më parë, elementet e së cilës mund të shpërndahen në matricë simetrike, quhet tenzor simetrik.

Pra, momenti i kuadrupolit elektrik është madhësi fizike, e cila ka karakter të tenzorit simetrik.

E dimë nga matematika se çdo matricë simetrike mund të shndërrohet në formë diagonale. Për këtë duhet të kryhet një transformim i caktuar i sistemit të koordinateve. Supozojmë se e kemi kryer këtë transformim dhe i kemi paraqitur koordinatet e reja x_1, x_2 dhe x_3 të përcaktuara me kahjet e vektorëve unitarë $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ dhe $\vec{a}_3$. Në këtë sistem të koordinatave matrica (11) redukohet në matricë diagonale:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 \\ 0 & 0 & Q_3 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Në këtë sistem potenciali vektorial do të ketë formën:

$$\vec{A}_k = -k_m k^2 v \frac{e^{ikr}}{r} (\vec{a}_1 r_{o1} Q_1 + \vec{a}_2 r_{o2} Q_2 + \vec{a}_3 r_{o3} Q_3) = -k_m k^2 v \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{i=1}^{3} \vec{a}_i r_{oi} Q_i \quad (13)$$

Do të përcaktojmë vektorët e fushës në zonën e valës. Nga shprehja (XV.3.9) kemi:

$$\vec{B} = -i k_m k^3 v \frac{e^{ikr}}{r} (\vec{a}_1 r_{o1} + \vec{a}_2 r_{o2} + \vec{a}_3 r_{o3}) \times (\vec{a}_1 r_{o1} Q_1 + \vec{a}_2 r_{o2} Q_2 + \vec{a}_3 r_{o3} Q_3)$$

Pasi t'i njehsojmë prodhimet vektoriale, do të kemi:

$$\vec{B} = -i k_m k^3 v \frac{e^{ikr}}{r} [\vec{a}_1 r_{o2} r_{o3} (Q_3 - Q_2) + \vec{a}_2 r_{o3} r_{o1} (Q_1 - Q_3) + \vec{a}_3 r_{o1} r_{o2} (Q_2 - Q_1) \tag{14}$$

Në mënyrë të ngjashme sipas (XV.3.11) për vektor elektrik fitojmë:

$$\vec{E} = -k_{el} k^4 \frac{e^{ikr}}{r} \{\vec{a}_1 r_{o1} [r^2_{o2} Q_2 + r^2_{o3} Q_3 - Q_1 (r^2_{o2} + r^2_{o3})] + \vec{a}_2 r_{o2} [r^2_{o3} Q_3 + r^2_{o1} Q_1 - Q_2 (r^2_{o3} + r^2_{o1})] + \vec{a}_3 r_{o3} [r^2_{o1} Q_1 + r^2_{o2} Q_2 - Q_3 (r^2_{o1} + r^2_{o2})]\}$$

E dimë se vlen:

$$r^2_{o1} + r^2_{o2} + r^2_{o3} = 1$$

prandaj shprehjen në kllapë të parë mund ta shkruajmë në formën:

$$r^2_{o2} Q_2 + r^2_{o3} Q_3 - Q_1 (1 - r^2_{o1}) = \sum_{i=1}^{3} r^2_{oi} Q_i - Q_1$$

Për vektor elektrik do të kemi shprehjen:

$$\vec{E} = -k_{el} k^4 \frac{e^{ikr}}{r} \left[\vec{a}_1 r_{o1} \left(\sum_{i=1}^{3} r^2_{oi} Q_i - Q_1\right) + \vec{a}_2 r_{o2} \left(\sum_{i=1}^{3} r^2_{oi} Q_i - Q_2\right) + \vec{a}_3 r_{o3} \left(\sum_{i=1}^{3} r^2_{oi} Q_i - Q_3\right)\right]$$

Në këtë mënyrë janë përcaktuar vektorët e fushës për rrezatim të kuadrupolit elektrik.

XVI. FUSHA ELEKTROMAGNETIKE NË MJEDISE IZOTROPE

1. LIGJI I REFLEKIMIT DHE I THYERJES SË DRITËS

Dukurinë e reflektimit dhe të thyerjes së dritës e diktojmë gjatë kalimit të saj nga një mjedis në tjetrin. Në këtë rast vala rënëse e dritës copëtohet në dy pjesë, njëra pjesë kthehet prapë mbrapa në mjedisin e parë dhe e quajmë valë e reflektuar, kurse pjesa tjetër kalon në mjedisin e dytë dhe e quajmë valë depërtuese apo të thyer.

Në rrafshin e takimit të dy mjediseve do të vendosim boshtet e sistemit koordinat x dhe y. Atëherë boshti z qëndron normal ndaj kësaj sipërfaqeje. Mjediset le të jenë nga materiali jopërcjellës me indekse përkatëse të thyerjes n_1 dhe n_2. Në figurën 105 janë paraqitur vektorët përkatës të valëve në tri rrafshe të ndryshme.

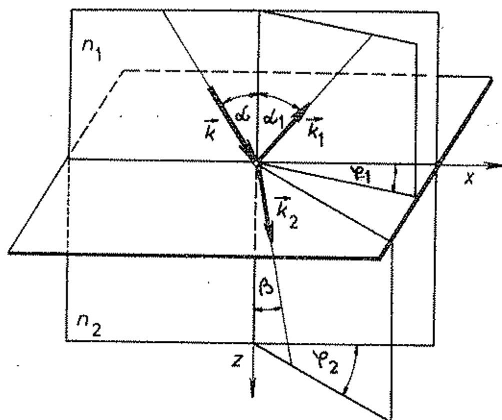


Fig. 105

Supozojmë se nga mjedisi me indeks të thyerjes n_1 përhapet vala elektromagnetike, vektori valor i së cilës me normalen në sipërfaqen kufitare mbyll këndin α. Këndi α quhet këndi i rënies. Vektorin elektrik të saj në formë eksponenciale e shkruajmë:

$$\vec{E} = \vec{A}\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \tag{1}$$

Meqë boshti x qëndron në rrafshin $x\,z$, vektori valor i valës rënëse i ka komponentet:

$$k_x = k \sin\alpha$$

$$k_z = k \cos\alpha$$

Ndërsa intensiteti i këtij vektori është:

$$k = \frac{\omega}{v_1} = \frac{\omega n_1}{c} \tag{2}$$

sepse $n_1 = c/v_1$. Prandaj ky vektor i ka komponentet:

$$k = \begin{pmatrix} \frac{\omega n_1}{c} \sin\alpha \\ 0 \\ \frac{\omega n_1}{c} \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{3}$$

Nga sipërfaqja kufitare reflektohet njëra pjesë e valës rënëse. Madhësitë që kanë të bëjnë me valën e reflektuar do t'i shënojmë me indeks 1. Vektori elektrik i saj është:

$$\vec{E}_1 = \vec{A}_1 \, e^{i(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega t)} \tag{4}$$

Meqë gjatë reflektimit të valës nuk ndërron frekuenca, edhe kësaj vale i kemi shkruar të njëjtën ω. Do të marrim në përgjithësi se vektori $\vec{k}_1$ nuk qëndron në rrafshin e vektorit $\vec{k}$, por këto dy rrafshe në mes vete mbyllin këndin φ_1. Ky vektor i ka këto komponente:

$$\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\omega n_1}{c} \sin\alpha_1 \cos\varphi_1 \\ \frac{\omega n_1}{c} \sin\alpha_1 \sin\varphi_1 \\ \frac{\omega n_1}{c} \cos\alpha_1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Në mjedisn e dytë përhapet vala e thyer. Të gjitha madhësitë që kanë të bëjnë me te i shënojmë me indeks 2. Vektori i saj elektrik është:

$$\vec{E}_2 = \vec{A}_2 \, e^{i(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega t)} \tag{6}$$

Këndin që mbyll ky vektor me normalen e shënojmë me β dhe e quajmë kënd të thyerjes. Edhe për te supozojmë se nuk qëndron në rrafshin e valës rënëse e as të valës së reflektuar. Do ta shënojmë me φ_2 këndin që mbyll rrafshi i valës rënëse me rrafshin e valës së thyer. Komponentet e këtij vektori janë:

$$\vec{k}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\omega n_2}{c} \sin\beta \cos\varphi_2 \\ \frac{\omega n_2}{c} \sin\beta \sin\varphi_2 \\ \frac{\omega n_2}{c} \cos\beta \end{pmatrix} \tag{7}$$

Në sipërfaqen kufitare të këtyre mjediseve duhet të kënaqen konditat kufitare. Sipas njërës prej tyre komponentet tangjenciale të fushës elektrike në njërën anë duhet të jenë të barabarta me ato të anës tjetër. Në mjedisin e parë fusha përbëhet prej valës rënëse dhe të reflektuar, prandaj vlen:

$$E_t + E_{1t} = E_{2t} \tag{8}$$

I zëvendësojm në (8) shprehjet (1), (4) dhe (6):

$$A_t\, e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} + A_{1t}\, e^{(\vec{k}_1\vec{r}-\omega t)} = A_{2t}\, e^{i(\vec{k}_2\vec{r}-\omega t)} \tag{9}$$

Kjo konditë në sipërfaqen kufitare duhet të kënaqet për çfarëdo $\vec{r}$ dhe për çfarëdo kohe t. Kjo është e mundur vetëm nëse eksponentet e të tre anëtarëve janë të barabartë:

$$\vec{k}\,\vec{r} - \omega t = \vec{k}_1\,\vec{r} - \omega t = \vec{k}_2\,\vec{r} - \omega t$$

ose

$$\vec{k}\,\vec{r} = \vec{k}_1\,\vec{r} = \vec{k}_2\,\vec{r} \tag{10}$$

Vektori i pozitës së pikave të rrafshit kufitar i ka komponentet:

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Konditën $\vec{k}\,\vec{r} = \vec{k}_1\,\vec{r}$

e zhvillojmë sipas komponenteve të vektorëve (3), (5) dhe (11):

$$x\,\frac{\omega n_1}{c}\,\sin\alpha = x\,\frac{\omega n_1}{c}\,\sin\alpha_1 \cos\varphi_1 + y\,\frac{\omega n_1}{c}\,\sin\alpha_1 \sin\varphi_1$$

ose

$$x(\sin\alpha - \sin\alpha_1 \cos\varphi_1) - y\,\sin\alpha_1 \sin\varphi_1 = 0$$

Që kjo të kënaqet për çfarëdo x dhe y, koeficientët e tyre duhet të jenë të barabartë me zero. Pra,

$$\sin\alpha - \sin\alpha_1 \cos\varphi_1 = 0$$

$$\sin\alpha_1 \sin\varphi_1 = 0 \tag{12}$$

Nga kondita e dytë duhet të përfundojmë se:

$$\sin\varphi_1 = 0$$

sepse e dimë që në përgjithësi faktor i parë nuk mund të jetë i barabartë me zero. Pra,

$$\varphi_1 = 0 \tag{13}$$

Ky përfundim tregon se vektori i valës së reflektuar qëndron në rrafshin e përcaktuar me vektorin e valës rënëse dhe normalen në sipërfaqe kufitare.

E zëvendësojmë (13) në konditën e parë të (12). Fitojmë:

$$\sin\alpha = \sin\alpha_1$$

dhe, meqë këndet për nga kuptimi fizik janë të ngushtë, rrjedh:

$$\alpha = \alpha_1 \tag{14}$$

Ky është ligji i reflektimit të dritës që thotë se këndi i rënies gjithmonë është i barabartë me këndin e reflektimit.

E marrim në shqyrtim kombinimin e dytë të (10):

$$\vec{k}\,\vec{r} = \vec{k}_2\,\vec{r}$$

Me ndihmën e (3), (7) dhe (11) këtë konditë e zbërthejmë në komponente:

$$x\,\frac{\omega n_1}{c}\,\sin\alpha = x\,\frac{\omega n_2}{c}\,\sin\beta\cos\varphi_2 + y\,\frac{\omega n_2}{c}\,\sin\beta\sin\varphi_2$$

ose

$$x(n_1\sin\alpha - n_2\sin\beta\cos\varphi_2) - y\,n_2\sin\beta\sin\varphi_2 = 0$$

Që ky të kënaqet për çdo x dhe y, duhet të jetë:

$$n_1\sin\alpha - n_2\sin\beta\cos\varphi_2 = 0 \tag{15}$$

$$\sin\beta\sin\varphi_2 = 0$$

Nga kondita e dytë fitojmë:

$$\varphi_2 = 0 \tag{16}$$

Prandaj, edhe kahja e përhapjes së valës së thyer qëndron në rrafsh të cilin e përcaktojnë kahja e përhapjes së valës rënëse dhe e normales në sipërfaqen kufitare.

Nëse zëvendësojmë (16) në konditën e parë të (15), fitojmë:

$$n_1\sin\alpha = n_2\sin\beta$$

ose

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_1}{n_2} = n \tag{17}$$

Kjo shprehje paraqet ligjin e thyerjes së dritës. Marrëdhënia e sinuseve të këndeve të rënies dhe të thyerjes është konstante. Konstanta është e barabartë me marrëdhënien e indekseve të thyerjes n_2/n_1, ose marrërrëdhënien e shpejtësisë së dritës në ato mjedise v_1/v_2. Shpeshherë kjo shprehet me një simbol n, që paraqet indeksin relativ të thyerjes.

Deri më tash ligjin e thyerjes dhe të reflektimit e kemi përfituar për kalimin e dritës nga një mjedis dielektrik në tjetrin. Por, është mjaft me rëndësi të kuptojmë çdo të ndodhë kur njëri prej mjediseve është përcjellës.

Madhësitë karakteristike të cilat i përcaktojnë vetitë e mjedisit janë indekset e thyerjes. Për mjedisin e parë dielektrik kemi:

$$n_1 = \frac{kc}{\omega}$$

ndërsa për përcjellës sipas (XV.2.8) vlen:

$$n_2 = \frac{kc}{\omega} = n + i\varkappa \tag{18}$$

Sikur të përsërisnim tërë njehsimin, për ligj të reflektimit do të fitonim të njëjtën shprehje (14). Pra, drita dëbohet nga metalet sipas ligjit të reflektimit, këndi i reflektimit edhe në metale është i barabartë me këndin e rënies.

Në vend të (17), do të fitonim shprehjen:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n + i\varkappa}{n_1} \tag{19}$$

Pasi ana e djathtë është komplekse, edhe $\sin\beta$ do të jetë kompleks, përkatësisht këndi i thyerjes β, prandaj ligji i thyerjes vetëm formalisht vlen në formën e cekur dhe së rrjedhimet duhet të shqyrtohen me detajisht.

2. FORMULAT E FRENELIT

Gjatë kalimit të dritës nga një mjedis në mjedisin tjetër i përcaktuam vetëm kahjet e dritës së reflektuar dhe të thyer. Nevojitet të përcaktojmë edhe amplitudat e tyre. Formulat për përcaktimin e këtyre amplitudave quhen formulat e Frenelit. Për përfitimin e këtyre formulave do të zgjedhim dy pozita të veçanta të vektorit elektrik në dritën rënëse. Njëra pozitë paraqitet për vektorin elektrik normal në rrafshin e rënies, kurse tjetra kur ky vektor është paralel me këtë rrafsh.

Në kufirin e dy mjediseve duhet të kënaqen konditat kufitare sipas të cilave komponentet tangjenciale të fushës elektrike dhe magnetike në të dy anët duhet të janë të barabarta. Për fushë elektrike këtë konditë e kemi paraqitur në (XVI.1.8):

$$E_t + E_{1t} = E_{2t} \tag{1}$$

Në mënyrë të ngjashme edhe për fushë magnetike fitojmë:

$$H_t + H_{1t} = H_{2t} \tag{2}$$

Së pari do të shqyrtojmë rastin:

a) Vektori elektrik është normal në rrafshin rënës

Simbolet për këtë rast i shënojmë me indeks $\perp$. Komponentet e vektorit elektrik janë njëkohësisht edhe tangjenciale në kufirin e dy mjediseve, $E_\perp = E_t$, prandaj konditën (1) mund ta shkruajmë:

$$E_\perp + E_{1\perp} = E_{2\perp} \tag{3}$$

Për paraqitjen e konditës për fushë magnetike duhet të shërbehemi nga fig. 106. Në te është paraqitur vala rënëse me kahje të përcaktuar me vektorin $\vec{k}$. Ky vektor me normalen në sipërfaqen kufitare mbyll këndin α. Valët janë transverzale, prandaj edhe vektori elektrik edhe vektori magnetik qëndrojnë në rrafshin normal ndaj vektorit $\vec{k}$. Ky rrafsh në fig. 106 është vizatuar në pikën P. Sipas hipotezës punuese vektori elektrik është normal ndaj rrafshit rënës, pra normal ndaj rrafshit të vizatimit. Ky shihet i vizatuar në projeksion të pjerrët. Vektori magnetik është normal ndaj vektorit elektrik, prandaj qëndron në rrafshin e vizatimit. Do ta shënojmë me $H_{\parallel}$. Ky vektor nuk është tangjencial në sipërfaqen kufitare. Komponentja e tij tangjenciale fitohet duke e projektuar në rrafshin i cili është paralel me sipërfaqen kufitare. Nga figura 106 shohim se vlen:

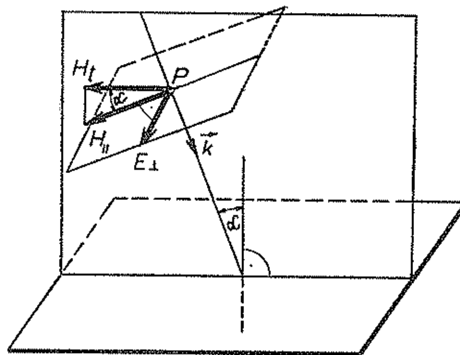


Fig. 106

$$H_t = H_{\parallel} \cos\alpha$$

Në mënyrë të ngjashme vlen edhe për valën e reflektuar dhe të thyer. Duke u bazuar në këtë që u tha më lartë kondita (2) do të ketë formën:

$$H_{\parallel} \cos\alpha + H_{1\parallel} \cos\alpha = H_{2\parallel} \cos\beta \tag{4}$$

Ka ngelur të kryejmë zëvendësimin e vektorit magnetik me vektorin elektrik. Sipas shprehjes (XV.1.15), e cila për $v = c/n$, e ka formën:

$$\vec{H} = \frac{n}{c\mu} \vec{n}_o \times \vec{E}$$

kurse nga figura vlen:

$$H_{\parallel} = \frac{n_1}{c\mu_1} E_\perp$$

Në valën e reflektuar vala lëviz prej kufirit, prandaj $\vec{n}_o$ e ka kahjen e kundërt:

$$H_{1\parallel} = -\frac{n_1}{c\mu_1} E_{1\perp}$$

ndërsa në valën depërtuese:

$$H_{2\parallel} = \frac{n_2}{c\mu_2} E_{2\perp}$$

Vlerat e fituara i zëvendësojmë në (4). Supozojmë se mjediset nuk janë ferromagnetike, prandaj $\mu_1 \approx \mu_2$. Pas thjeshtësimit, fitojmë:

$$n_1 E_{\perp} \cos\alpha - n_1 E_{1\perp} \cos\alpha = n_2 E_{2\perp} \cos\beta$$

E paraqesim indeksin relativ të thyerjes:

$$n = \frac{n_2}{n_1}$$

dhe do të kemi:

$$E_{\perp} \cos\alpha - E_{1\perp} \cos\alpha = n E_{2\perp} \cos\beta \tag{5}$$

Për vektor elektrik shfrytëzojmë shprehjen (XVI.1.1):

$$E_{\perp} = A_{\perp} e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$$

$$E_{1\perp} = A_{1\perp} e^{i(\vec{k}_1\vec{r}-\omega t)}$$

$$E_{2\perp} = A_{2\perp} e^{i(\vec{k}_2\vec{r}-\omega t)}$$

Meqë ligjet e thyerjes dhe të reflektimit janë të kënaqura, atëherë faktorët eksponencialë janë të barabartë ashtu që pas zëvendësimit në (3) dhe (5) mund t'i thjeshtësojmë. Fitojmë:

$$A_{\perp} + A_{1\perp} = A_{2\perp}$$

$$A_{\perp} \cos\alpha - A_{1\perp} \cos\alpha = n A_{2\perp} \cos\beta \tag{6}$$

Ky është sistem i ekuacioneve për përcaktimin e amplitudave të panjohura $A_{1\perp}$ dhe $A_{2\perp}$. E shumëzojmë ekuacionin e parë me $-n\cos\beta$ dhe i mbledhim. Do të gjejmë:

$$A_{1\perp} = A_{\perp} \frac{\cos\alpha - n\cos\beta}{\cos\alpha + n\cos\beta} \tag{7}$$

dhe, kur të parin e shumëzojmë me $\cos\alpha$ dhe përsëri i mbledhim, fitojmë:

$$A_{2\perp} = A_{\perp} \frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha + n\cos\beta} \tag{8}$$

Këto janë dy prej formulave të Frenelit. Dy të tjerat i fitojmë për pozitë tjetër të vektorit elektrik. Këtyre mund t'u japim formë tjetër, duke shfrytëzuar ligjin e thyerjes:

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Pas transformimeve elementare fitohet shprehja:

$$A_{1\perp} = A_{\perp} \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \tag{9}$$

$$A_{2\perp} = A_{\perp} \frac{2\cos\alpha \sin\beta}{\sin(\beta+\alpha)} \tag{10}$$

Këto shprehje përcaktojnë amplitudat e valës së reflektuar dhe depërtuese, nëse amplituda e dritës rënëse është e njohur. Shohim se varen prej këndit të rënies α dhe indeksit të thyerjes n të mjedisit.

b) Vektori elektrik qëndron paralel me rrafshin e rënies

Në këtë rast vektori magnetik është normal në rrafshin e rënies. Këta dy vektor i kanë ndërruar rolet në krahasim me rastin e mëparshëm. Edhe tash mund të shkruajmë konditat kufitare (3) dhe (4), por duke i zëvendësuar ndërmjet vete vektorët $\vec{E}$ dhe $\vec{H}$. Pra,

$$H_{\perp} + H_{1\perp} = H_{2\perp} \tag{11}$$

$$E_{\parallel} \cos\alpha + E_{1\parallel} \cos\alpha = E_{2\parallel} \cos\beta$$

Në ekuacionin e parë paraqesim vektorët elektrikë:

$$H_{\perp} = \frac{n_1}{c\mu_1} E_{\parallel} \quad H_{1\perp} = -\frac{n_1}{c\mu_1} E_{1\parallel} \quad H_{2\perp} = \frac{n_2}{c\mu_2} E_{2\parallel}$$

Pas thjeshtësimit dhe paraqitjes së indeksit relativ të thyerjes fitojmë:

$$E_{\parallel} - E_{1\parallel} = n E_{2\parallel}$$

I paraqesim amplitudat:

$$A_{\parallel} \cos\alpha + A_{1\parallel} \cos\alpha = A_{2\parallel} \cos\beta$$

$$A_{\parallel} - A_{1\parallel} = n A_{2\parallel}$$

Pasi ta zgjidhim këtë sistem, fitojmë edhe dy formulat tjera të Frenelit:

$$A_{1\parallel} = A_{\parallel} \frac{\cos\beta - n\cos\alpha}{\cos\beta + n\cos\alpha}$$

$$A_{2\parallel} = A_{\parallel} \frac{2\cos\alpha}{\cos\beta + n\cos\alpha} \tag{12}$$

apo në formën tjetër sikurse për formulat e mëparshme:

$$A_{1\parallel} = A_{\parallel} \frac{\mathrm{tg}(\beta-\alpha)}{\mathrm{tg}(\beta+\alpha)}$$

$$A_{2\parallel} = A_{\parallel} \frac{2\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\beta+\alpha)\cos(\beta-\alpha)} \qquad (13)$$

Këto janë formulat e Frenelit për rastin e vektorit elektrik paralel me rrafshin rënës.

Në përgjithësi, vektori elektrik në dritën rënëse mund të qëndrojë pjerrtas ndaj rrafshit të rënies. Atëherë duhet të zbërthehet në dy komponente, njëra normale, kurse tjetra paralele me këtë rrafsh. Për njohjen e amplitudave të dritës së reflektuar dhe depërtues nevojiten që të katër formulat.

Sikur të kërkonim amplitudat përkatëse për kalimin e dritës nga izolatori në përcjellës njehsimi do të ishte plotësisht i ngjashëm me të vetmin ndryshim në indeksin e thyerjes të formës (XVI.1.18).

Te reflektimi në mjedis të dendur:

$$\beta < \alpha$$

prandaj amplitudat e shprehjeve (9) dhe (13) për dritë të reflektuar fitohen negative. Kjo do të thotë se gjatë reflektimit në mjedis të dendur paraqitet kërcim i fazës për gjysmën e gjatësisë valore.

c) Drita bie normal në sipërfaqen kufitare

Nëse drita bie normal në sipërfaqen kufitare, atëherë këndi i rënies $\alpha = 0$, ndërsa nga ligji i reflektimit dhe i thyerjes kemi:

$$\alpha_1 = 0 \quad \text{dhe} \quad \beta = 0$$

Pra, drita e reflektuar kthehet në kahje të kundërt të dritës rënëse, ndërsa ajo depërtuese vazhdon në kahjen e asaj rënëse. Do t'i specializojmë formulat e Frenelit për këtë rast. Nga (7), (8) dhe shprehjet (12) fitojmë:

$$A_{1\perp} = A_{\perp} \frac{1-n}{1+n} \qquad A_{1\parallel} = A_{\parallel} \frac{1-n}{1+n}$$

$$A_{2\perp} = A_{\perp} \frac{2}{1+n} \qquad A_{2\parallel} = A_{\parallel} \frac{2}{1+n} \qquad (14)$$

Kemi fituar të njëjtat shprehje për komponente normale dhe paralele, çka është e kuptuar sepse në rënien normale të dritës, rrafshi rënës është plotësisht i papërcaktuar dhe nuk paraqitet ndryshim në mes të komponenteve normale dhe paralele.

Mund të përkufizojmë aftësinë e reflektimit për kalimin nga një mjedis në tjetrin. E përkufikojmë sipas shprehjes:

$$R = \left(\frac{A_1}{A}\right)^2 \tag{15}$$

E dimë se energjia të cilën e bartë vala është proporcionale me katrorin e vektorit elektrik, përkatësisht amplitudës së tij. Kur këto energji i pjesëtojmë, nuk figurojnë faktorët e proporcionalitetit. Për rënie normale:

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \tag{16}$$

Si shembull mund të marrim reflektimin normal nga sipërfaqja e qelqit. Për indeks të thyerjes $n = 1{,}5$ fitojmë:

$$R = \left(\frac{0{,}5}{2{,}5}\right)^2 = (0{,}2)^2 = 0{,}04$$

Pra, do të reflektohet 4% e dritës rënëse.

Në rastin e reflektimit në metal në shprehjet (14) në vend të indeksit të thyerjes n duhet të shkruhet shprehja komplekse $n + i\varkappa$. Që të fitojmë aftësinë reale të reflektimit, duhet ta përkufizojmë në formën:

$$R = \left|\frac{A_1}{A}\right|^2$$

dhe për rënie normale kemi:

$$R = \left|\frac{n+i\varkappa-1}{n+i\varkappa+1}\right|^2 = \frac{(n-1)^2+\varkappa^2}{(n+1)^2+\varkappa^2} \tag{17}$$

Për përcjellës shumë të mirë n dhe $\varkappa$ janë shumë të mëdhenj dhe R vetëm pak ndryshon nga l, që shpreh të dhënën se metalet e reflektojnë dritën shumë.

3. POARIZIMI GJATË REFLEKTIMIT

Le të jetë drita rënëse e polarizuar në mënyrë të rrafshit. Vektori i saj elektrik lëkundet në kahje të caktuar e ne do të supozojmë se kahja e kësaj lëkundjeje me rrafshin rënës mbyll këndin ψ. Ky kënd quhet azimut i lëkundjes së vektorit elektrik.

Kur amplituda e vektorit elektrik të dritës rënëse zbërthehet në komponenten normale dhe paralele, këto mund t'i lidhim me azimutin e lëkundjes me shprehjen:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{A_\perp}{A_\parallel} \tag{1}$$

Sipas të njëjtës shprehje, azimuti i lëkundjes në dritën e reflektuar do të jetë:

$$\operatorname{tg}\psi_1 = \frac{A_{1\perp}}{A_{1\parallel}}$$

Për komponente i zëvendësojmë formulat e Frenelit (XVI.2.9 dhe 13):

$$\operatorname{tg}\psi_1 = \frac{A_\perp}{A_\parallel} \frac{\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}}{\dfrac{\operatorname{tg}(\beta-\alpha)}{\operatorname{tg}(\beta+\alpha)}}$$

ose:

$$\operatorname{tg}\psi_1 = \frac{\cos(\beta-\alpha)}{\cos(\beta+\alpha)} \operatorname{tg}\psi \tag{2}$$

Kjo shprehje tregon lidhmërinë e azimutit të lëkundjes së dritës së reflektuar dhe azimutit të dritës rënëse. Shohim se nuk janë të barabartë.

Meqë $\beta - \alpha < \beta + \alpha$, rrjedh:

$$\cos(\beta-\alpha) > \cos(\beta+\alpha)$$

prandaj,

$$\operatorname{tg}\psi_1 > \operatorname{tg}\psi$$

ose:

$$\psi_1 > \psi$$

Pra, në dritën e reflektuar kahja e lëkundjes me rrafshin rënës mbyll kënd më të madh se kahja e lëkundjes së dritës rënëse. Kuptohet se edhe drita e reflektuar prapë është e polarizuar në mënyrë lineare.

Të shqyrtojmë gjendjen në dritën depërtuese. Për te vlen:

$$\operatorname{tg}\psi_2 = \frac{A_{2\perp}}{A_{2\parallel}} = \frac{A_\perp}{A_\parallel} \frac{\dfrac{2\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\beta+\alpha)}}{\dfrac{2\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\beta+\alpha)\cos(\beta-\alpha)}}$$

ose:

$$\operatorname{tg}\psi_2 = \cos(\beta-\alpha)\cdot\operatorname{tg}\psi \tag{3}$$

Edhe këto azimute nuk janë të barabarta. Ngase $\cos(\beta-\alpha) < 1$, rrjedh se gjithmonë:

$$\psi_2 < \psi$$

Pra, drita e polarizuar në mënyrë lineare gjatë kalimit nga njëri izolator në tjetrin mbetet prapë e polarizuar në mënyrë lineare, por këndi të cilin e mbyll kahja e lëkundjes së vektorit elektrik me rrafshin rënës është më i vogël se sa në dritën rënëse.

Të shqyrtojmë rastin e dritës rënëse të papolarizuar. Kjo do të thotë se në te gjejmë të gjitha kahjet e lëkundjes normale në kahje të përhapjes dhe ashtu që këto kahje janë njësoj të paraqitura. Në dritën

e reflektuar të gjithë azimutet zmadhohen, prandaj në te do të zotërojnë kahjet me azimute me të mëdhenj të lëkundjes. Pra, drita e reflektuar është polarizuar pjesërisht.

E njëjta gjë vlen edhe për dritën depërtuese, me ndryshim se në te zotërojnë këndet me të vogla të lëkundjes.

Të kthehemi edhe një herë në shprehjen (2) për dritën e reflektuar. Nëse zgjedhet aso këndi i rënies për të cilin

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

fitojmë:

$$\mathrm{tg}\psi_1 \to \infty$$

ose:

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2}$$

pa marrë parasysh sa është këndi i rënies. Prandaj, edhe kur drita rënëse është e papolarizuar, ajo gjatë reflektimit polarizohet në mënyrë lineare ashtu që vektori i saj elektrik lëkundet normal ndaj rrafshit të rënies. Këndi α për të cilin drita e reflektuar polarizohet quhet kënd i polarizimit apo kënd i Brusterit. Këtë kënd mund ta përcaktojmë nga ligji i thyerjes:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$$

dhe për

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ fitojmë:}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = n \tag{5}$$

Për kalimin e dritën nga ajri në qelq këndi i polarizimit është 57°.

4. REFLEKTIMI TOTAL

a) Amplituda

Ligjin e thyerjes (XVI.1.17) mund ta shkruajmë në formën:

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} \tag{1}$$

Nga kjo shohim se këndi i thyerjes është gjithmonë real, nëse $\sin\alpha < n$. Ky rast paraqitet gjithmonë kur $n > 1$ ose kur $v_1 > v_2$. Zakonisht mjediset në të cilat drita përhapet më shpejt quhen mjedise të rralla, për

ndryshim prej mjediseve të dendura në të cilat kjo përhapet më ngadalë. Prandaj, gjatë kalimit të dritës nga mjedisi i rrallë në mjedis të dendur gjithmonë ekziston këndi real i thyerjes, pa marrë parasysh këndin e rënies.

Mirëpo, kur drita kalon nga mjedisi i dendur në mjedis të rrallë $v_1 < v_2$ dhe $n < 1$. Këndi real i thyerjes ekziston derisa:

$$\sin\alpha < n$$

ndërsa këndi i rënies është më i vogël se këndi kufitar:

$$\alpha_k = \arcsin n$$

Nëse këndi i rënies është më i madh se ky kënd kufitar, pra për

$$\sin\alpha > n$$

fitojmë:

$$\sin\beta > 1$$

dhe nuk ekziston këndi real i thyerjes. Eksperimentet tregojnë se atëherë nuk ekziston drita depërtuese, por tërësisht kthehet në mjedisin e dendur. Kjo dukuri quhet reflektim total të cilën do ta shqyrtojmë më hollësisht.

Së pari do të tregojmë se amplituda e dritës së reflektuar është e barabartë me amplitudën e dritës rënëse.

E zbërthejmë vektorin elektrik të dritës rënëse në komponenten normale dhe paralele:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{\perp} = A_{\perp} e^{i\Phi} \\ E_{\parallel} = A_{\parallel} e^{i\Phi} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Këtu me Φ e kemi shënuar shkurtimisht fazën e lëkundjes:

$$\Phi = \vec{k}\vec{r} - \omega t$$

Edhe dritën e reflektuar e zbërthejmë në komponente:

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} E_{1\perp} = A_{1\perp} e^{i\Phi_1} \\ E_{1\parallel} = A_{1\parallel} e^{i\Phi_1} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Nga ligji i thyerjes kemi:

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}$$

prandaj vlen:

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{n^2}} = \frac{i}{n}\sqrt{\sin^2\alpha - n^2} \tag{4}$$

Amplitudën e dritën së reflektuar e njehsojmë me ndihmën e formulave të Frenelit (XVI.2.7; 8 dhe shprehjet 12):

$$A_{1\perp} = A_{\perp} \frac{\cos\alpha - n\cos\beta}{\cos\alpha + n\cos\beta}$$

Shprehja $\cos\alpha - n\cos\beta$ është numër kompleks në të cilin anëtari i dytë është pjesa imagjinare. Këtë numër mund ta paraqesim në formën eksponenciale:

$$\cos\alpha - n\cos\beta = \rho_1 e^{-i\varphi_1}$$

ndërsa:

$$\cos\alpha + n\cos\beta = \rho_1 e^{i\varphi_1} \qquad (5)$$

Prandaj,

$$A_{1\perp} = A_{\perp} \frac{\rho_1 e^{-i\varphi_1}}{\rho_1 e^{i\varphi_1}} = A_{\perp}\, e^{-2i\varphi_1}$$

Për komponenten paralele mund të shkruajmë:

$$A_{1\parallel} = A_{\parallel} \frac{\cos\beta - n\cos\alpha}{\cos\beta + n\cos\alpha} = - A_{\parallel} \frac{n\cos\alpha - \cos\beta}{n\cos\alpha + \cos\beta}$$

Në numërues dhe në emërues prapë gjenden dy numra kompleks të konjuguar për të cilët vlen:

$$n\cos\alpha + \cos\beta = \rho_2 e^{i\varphi_2} \qquad (6)$$

dhe do të kemi:

$$A_{1\parallel} = - A_{\parallel} \frac{\rho_2 e^{-i\varphi_2}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = - A_{\parallel}\, e^{-2i\varphi_2}$$

Vlerat e fituara i zëvendësojmë në (3):

$$E_1 = \begin{pmatrix} A_{\perp}\; e^{i(\Phi_1 - 2\varphi_1)} \\ -A_{\parallel}\; e^{i(\Phi - 2\varphi_2)} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Shohim se komponentet e dritës së reflektuar i kanë të njëjtat amplituda sikurse komponentet e dritës rënëse. Kjo do të thotë se tërë energjia e dritës kthehet kah ka ardhur.

b) Ndryshimi i fazës

Nga (7) dhe (2) kuptojmë se komponentet e dritës së reflektuar nuk lëkunden me të njëjtën fazë. Në mes të lëkundjeve ekziston ndryshimi i fazës:

$$\delta = 2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Pra, nëse drita rënëse ka qenë e polarizuar në mënyrë lineare, atëherë drita e reflektuar do të jetë e polarizuar në mënyrë eliptike. Do të njehsojmë këtë ndryshim faze:

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_1}$$

Nga shprehja (5) rrjedh:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{1}{i}\frac{n\cos\beta}{\cos\alpha}$$

sepse që të përcaktohet $\operatorname{tg}\varphi_1$, duhet pjesëtuar pjesën imagjinare me atë reale të numrit kompleks (5). Meqë njësia imagjinare është në vetë $n\cos\beta$, atëherë që të fitohet pjesa imagjinare duhet ky anëtar të pjesëtohet me njësinë imagjinare.

Në mënyrë të ngjashme kemi edhe për:

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{1}{i}\frac{\cos\beta}{n\cos\alpha}$$

E zëvendësojmë dhe fitojmë për ndryshim faze:

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{(1-n^2)\dfrac{1}{i\,n}\cos\beta\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}$$

Shprehjen në emërues mund ta transformojmë në formën:

$$\cos^2\alpha - \cos^2\beta = 1 - \sin^2\alpha + \frac{1}{n^2}(\sin^2\alpha - n^2) =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha}{n^2}(1-n^2)$$

Nga kjo dhe shprehja (4), do të kemi:

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha - n^2}}{\sin^2\alpha} \tag{8}$$

Kjo është shprehja për ndryshim të fazës së lëkundjeve të komponenteve në dritën e reflektuar totalisht. Shohim se ndryshimi i fazës varet prej këndit të rënies dhe indeksit relativ të thyerjes.

Mund të bëjmë pyetjen: për cilin kënd të rënies ndryshimi i fazës është maksimal? Për këtë shprehjen (8) e shkruajmë në formën:

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1 - \frac{n^2}{\sin^4\alpha} + \frac{n^2}{\sin^2\alpha}}$$

E paraqesim zëvendësimin:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = x$$

dhe funksioni vlerën ekstremale të të cilit e kërkojmë është:

$$f(x) = x - 1 - n^2 x^2 + n^2 x$$

$$f'(x) = 1 - 2n^2 x + n^2 = 0$$

$$x = \frac{1+n^2}{2n^2}$$

Prandaj, ndryshimin maksimal të fazës e fitojmë për këndin e rënies:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{2n^2}{1+n^2}} \qquad (9)$$

E zëvendësojmë vlerën e fituar të x në $f(x)$. — Fitojmë:

$$f(x) = \frac{(1-n^2)^2}{4n^2}$$

Prandaj vlen:

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{1-n^2}{2n} \qquad (10)$$

Nëse dëshirojmë që me reflektim total të fitojmë dritën e polarizuar në mënyrë rrethore, atëherë ndryshimi i fazës duhet të jetë $\frac{\pi}{2}$. Meqë $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, për indeks të thyerjes fitojmë zgjidhjen e ekuacionit:

$$1 = \frac{1-n^2}{2n}$$

ose:

$$n^2 + 2n - 1 = 0$$

prej nga:

$$n = -1 + \sqrt{2} = 0{,}414$$

Të marrim se mjedisi i daljes është boshllëk ose ajër. Për indeks të thyerjes kemi:

$$n_2 = 1$$

prandaj:

$$n_1 = \frac{n^2}{n} = \frac{1}{0{,}414} = 2{,}4$$

Meqë nuk disponojmë me mjedise optike të cilat e kanë indeksin e thyerjes kaq të madh, është e qartë se me një reflektim total nuk mund të fitojmë dritë të polarizuar në mënyrë rrethore.

Freneli e ka ndërtuar paralelopipedin nga qelqi me këndin e ngushtë prej 54°37′. Ky kënd është njehsuar ashtu që drita nga një reflektim total fiton ndryshim të fazës për $\frac{\pi}{4}$. Pas këtij reflektimi drita kthehet edhe një herë në anën e kundërt të paralelopipedit dhe prapë reflektohet plotësisht, duke fituar ndryshimin tjetër të fazës prej $\frac{\pi}{4}$. Në këtë mënyrë drita në dalje nga paralelopipedi i cekur do të ketë ndryshimin e fazës $\frac{\pi}{2}$. Nëse drita hyrëse lëkundet me azimutin 45° në mënyrë që amplitudat e të komponenteve të jenë të barabarta, atëherë drita dalëse polarizohet në mënyrë rrethore.

c) Valët sipërfaqësore

Duhet pritur që në mjedisin e rrallë gjatë reflektimit total nuk paraqitet kurrfarë vale. Por nuk ndodh kështu. Edhe nëpër sipërfaqen kufitare të mjediseve lëviz një valë elektromagnetike. Do të tregojmë se kjo valë ekziston vetëm në afërsi të kësaj sipërfaqe. Vektori elektrik i dritës depërtues është:

$$\vec{E}_2 = \vec{A}_2\, e^{i(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega t)}$$

ndërsa komponentet e vektorit valor janë:

$$k = \begin{pmatrix} k \sin\beta \\ 0 \\ k \cos\beta \end{pmatrix}$$

prandaj vlen:

$$\vec{k}_2 \vec{r} = x\, k \sin\beta + z\, k \cos\beta = x\, k\, \frac{\sin\alpha}{n} + i\, z\, \frac{k}{n} \sqrt{\sin^2\alpha - n^2}$$

E zëvendësojmë në shprehje për vektor elektrik:

$$\vec{E}_2 = \vec{A}_2\, e^{-z \frac{k}{n} \sqrt{\sin^2\alpha - n^2}}\, e^{i(x \frac{k}{n} \sin\alpha - \omega t)} \tag{11}$$

Kjo është shprehja për përhapjen e valës së rrafshët përgjatë boshtit x, pra nëpër sipërfaqen kufitare. Prandaj e quajmë valë sipërfaqësore. Amplituda e tij eksponencialisht zvogëlohet me largësinë z nga sipërfaqja kufitare, prandaj në largësi të konsiderueshme kjo amplitudë është e papërfillshme.

5. REFLEKTIMI I DRITËS NË METALE

a) Ndryshimi i fazës

Për kalimin e dritës nga boshllëku në metal formalisht mund të shkruajmë ligjin e thyerjes:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = n + i\varkappa \tag{1}$$

por këndi β nuk është real. Gjithashtu, mund të shkruajmë edhe shprehjen (XVI.3.2):

$$\operatorname{tg}\psi_1 = \frac{\cos(\beta-\alpha)}{\cos(\beta+\alpha)} \operatorname{tg}\psi \tag{2}$$

por edhe kjo thyesë është komplekse. Do ta shkruajmë në formën eksponenciale:

$$\frac{\cos(\beta-\alpha)}{\cos(\beta+\alpha)} = \rho\, e^{i\delta}$$

Prandaj,

$$\operatorname{tg}\psi_1 = \rho \operatorname{tg}\psi\, e^{i\delta} \tag{3}$$

Meqë vlen:

$$\operatorname{tg}\psi_1 = \frac{A_{1\perp}}{A_{1\parallel}}$$

do të kemi:

$$A_{1\perp} = A_{1\parallel}\, \rho \operatorname{tg}\psi\, e^{i\delta} \tag{4}$$

E zbërthejmë vektorin elektrik të dritës së reflektuar në komponenten normale dhe paralele:

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} E_{1\perp} = A_{1\perp}\; e^{i\Phi} \\ E_{1\parallel} = A_{1\parallel}\; e^{i\Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1\parallel}\, \rho \operatorname{tg}\psi\, e^{i(\Phi+\delta)} \\ A_1\, e^{i\Phi} \end{pmatrix}$$

Nga kjo shprehje kuptojmë se në mes të lëkundjeve të këtyre komponenteve ekziston një ndryshim faze δ. Pra, te reflektimi i dritës në metale paraqitet një ndryshim faze, ashtu që nëse drita rënëse është e polarizuar në mënyrë lineare, e reflektuara do të polarizohet eliptikisht.

b) Përcaktimi i konstanteve optike me ndihmën e dritës së reflektuar

Drita thithet në përçjellës, prandaj ata zakonisht janë të patejdukshëm. Në këto raste paraqitet vetëm drita e reflektuar, prandaj me hulumtimin e saj mund të përcaktojmë konstantet karakteristike të metaleve, për çka do të përqëndrojmë vëmendjen në vazhdim.

Drita e polarizuar rënëse le të ketë azimutin e lëkundjes $\psi = 45°$, pra është e polarizuar në mënyrë lineare. E zëvendësojmë në (2):

$$\operatorname{tg}\psi_1 = \frac{\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha}{\cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha} = \frac{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha}; \quad \operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}45° = 1$$

Duke u bazuar në këtë supozim (3), shndërrohet në:

$$\operatorname{tg}\psi_1 = \rho\, e^{i\delta}$$

ose:

$$\rho\, e^{i\delta} = \frac{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha}$$

E zgjedhim këndin e rënies të atillë α_0 për të cilin paraqitet ndryshimi i fazës $\delta = \frac{\pi}{2}$. E quajmë këndi kryesor i rënies. Meqë vlen:

$$e^{i\delta} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

shprehja e fundit do të ketë formën:

$$i\rho = \frac{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha_0}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha_0}$$

prej nga fitojmë:

$$\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{i\rho-1}{i\rho+1} \tag{5}$$

Në drejtim të dritës së reflektuar e vendosim kompenzatorin i cili e eviton ndryshimin ekzistues të fazës. Prandaj, nga kompenzatori del drita e polarizuar në mënyrë lineare me azimut të lëkundjes ψ_0, të cilin e quajmë azimut kryesor. Prandaj, do të marrim në konsiderim se azimuti kryesor është madhësi e cila matet. Nga:

$$\operatorname{tg}\psi_1 = \rho\, e^{i\delta}$$

pas kompensimit të fazës kemi:

$$\operatorname{tg}\psi_0 = \rho$$

E zëvendësojmë vlerën e fituar në (5):

$$\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{i\operatorname{tg}\psi_0-1}{i\operatorname{tg}\psi_0+1} = \frac{i\sin\psi_0-\cos\psi_0}{i\sin\psi_0+\cos\psi_0} = -\frac{e^{-i\psi_0}}{e^{i\psi_0}}$$

$$\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha_0 = -e^{-2i\psi_0} \tag{6}$$

Ligjin e thyerjes mund ta paraqesim në formën:

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha_0}{n+i\varkappa}$$

Te përcjellësit emëruesi është i madh, prandaj $\sin\beta$ është i vogël dhe mund ta zëvendësojmë me tangjens:

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin\alpha_\circ}{n + i\varkappa}$$

E zëvendësojmë në (6):

$$\frac{\sin\alpha_\circ\,\mathrm{tg}\,\alpha_\circ}{n + i\varkappa} = -\,e^{-i2\psi_\circ} \tag{7}$$

E shumëzojmë me vlerën komplekse të konjuguar:

$$\frac{\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\,\alpha_\circ}{n^2 + \varkappa^2} = 1$$

Numrin kompleks (7) mund ta shkruajmë në formën:

$$(n - i\varkappa)\,\frac{\sin\alpha_\circ\,\mathrm{tg}\,\alpha_\circ}{n^2 + \varkappa^2} = -\,e^{-2i\psi_\circ} \tag{8}$$

Kur e pjesëtojmë pjesën imagjinare me pjesën reale, fitojmë:

$$\mathrm{tg}\,2\psi_\circ = \frac{\varkappa}{n}$$

prej nga:

$$\varkappa = n\,\mathrm{tg}\,2\psi_\circ$$

Këtë e zëvendësojmë në shprehjen (8) të cilën e shkruajmë në formën:

$$n^2 + \varkappa^2 = \sin^2\alpha_\circ\,\mathrm{tg}^2\alpha_\circ$$

Do të kemi:

$$n^2\,(1 + \mathrm{tg}^2\,2\psi_\circ) = \sin^2\alpha_\circ\,\mathrm{tg}^2\,\alpha_\circ$$

$$\frac{n^2}{\cos^2 2\psi_\circ} = \sin^2\alpha_\circ\,\mathrm{tg}^2\,\alpha_\circ$$

dhe përfundimisht fitojmë vlerat e konstanteve optike:

$$n = \mathrm{tg}\,\alpha_\circ \sin\alpha_\circ \cos 2\psi_\circ \tag{9}$$

$$\varkappa = \mathrm{tg}\,\alpha_\circ \sin\alpha_\circ \sin 2\psi_\circ \tag{10}$$

të shprehura me ndihmën e madhësive të caktuara eksperimentalisht, me ndihmën e këndit kryesor të rënies dhe azimutit kryesor, $\alpha_\circ$ dhe $\psi_\circ$.

6. VALËT E DRITËS NË METALE

a) Ligji i thyerjes

Do të shqyrtojmë valën e cila kalon nëpër metal. Kjo valë thithet në te dhe zakonisht depërton vetëm në shtresë të hollë në afërsi të sipërfaqes kufitare. Do të kryejmë analizën teorike të vetive të kësaj vale.

Fillojmë nga ligji i thyerjes në formë komplekse:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n + i\varkappa$$

Supozojmë se drita vjen nga boshllëku deri në metal. Nga shprehja e mëparshme kemi:

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n+i\varkappa} = \frac{(n-i\varkappa)\sin\alpha}{n^2+\varkappa^2} \qquad (1)$$

Pastaj është:

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{(n^2+\varkappa^2)^2}\,(n^2-\varkappa^2-2i\,n\varkappa)} \qquad (2)$$

E shprehim $\cos\beta$ në formë eksponenciale:

$$\cos\beta = \rho\, e^{i\delta} \qquad (3)$$

dhe

$$\cos^2\beta = \rho^2 e^{2i\delta} = \rho^2(\cos 2\delta + i\sin 2\delta)$$

E zëvendësojmë në (2):

$$1 - \frac{\sin^2\alpha}{(n^2+\varkappa^2)^2}\,(n^2-\varkappa^2-2in\varkappa) = \rho^2\cos 2\delta + i\,\rho^2\sin 2\delta$$

Duke i barazuar pjesët reale dhe imagjinare, fitojmë:

$$1 - \frac{\sin^2\alpha}{(n^2+\varkappa^2)^2}\,(n^2-\varkappa^2) = \rho^2\cos 2\delta \qquad (4)$$

$$\frac{2n\varkappa\sin^2\alpha}{(n^2+\varkappa^2)^2} = \rho^2\sin 2\delta \qquad (5)$$

Në këtë mënyrë konstantet e reja ρ dhe δ i kemi lidhur me n, dhe $\varkappa$ dhe këndin e rënies α.

E shkruajmë shprehjen për vektor elektrik të valës:

$$\vec{E} = \vec{A}\, e^{i\omega\left(t - \frac{x\sin\beta + z\cos\beta}{v}\right)} \qquad (6)$$

I njehsojmë shprehjet të cilat paraqiten në eksponent:

$$\frac{x\sin\beta}{v} = x\,\frac{\sin\alpha}{n+i\varkappa}\,\frac{1}{v}$$

Sipas përkufizimit të indeksit të thyerjes është:

$$n + i\varkappa = \frac{c}{v}$$

prandaj kemi:

$$\frac{x \sin\beta}{v} = \frac{x \sin\alpha}{c} \tag{7}$$

Duhet të gjejmë edhe $\frac{z \cos\beta}{v}$, prandaj e shfrytëzojmë shprehjen (3):

(3)

$$\frac{z \cos\beta}{v} = \frac{z\rho}{v} e^{i\delta} = \frac{z\rho}{c} (n + i\varkappa) (\cos\delta + i \sin\delta) =$$

$$= \frac{z\rho}{c} (n \cos\delta - \varkappa \sin\delta) + i \frac{z\rho}{c} (n \sin\delta + \varkappa \cos\delta) \tag{8}$$

E zëvendësojmë (7) dhe (8) në (6):

$$\vec{E} = \vec{A} e^{-\frac{\omega z \rho}{c} (n \sin + \varkappa \cos\delta)} \quad e^{i\omega \left[t - \frac{x \sin\alpha}{c} - \frac{z\rho}{c} (n \cos\delta - \varkappa \sin\delta)\right]} \tag{9}$$

Për vektor elektrik e kemi fituar shprehjen e cila tregon se materiali përcjellës e thith valën. Faktori i thithjes së valëve është:

$$\varkappa_{\varkappa} = \delta(n \sin\delta + \varkappa \cos\delta) \tag{10}$$

Këtu $\varkappa$ e kemi shënuar me indeks α që të theksojmë se ky varet prej këndit të rënies α, sepse nga ky kënd varet madhësia ρ. Shohim se vala i ka amplitudat e njëjta për vlera të njëjta të z. Pra,

$$z = const.$$

janë rrafshet e amplitudave të njëjta. Natyrisht se këto janë paralele me sipërfaqen kufitare $z = 0$.

Fazat e njëjta të lëkundjeve gjenden në vendet për të cilat është:

$$\frac{\omega}{c} [x \sin\alpha + z \rho(n \cos\delta - \varkappa \sin\delta)] = const. \tag{11}$$

Këto rrafshe qëndrojnë pjerrtas ndaj sipërfaqes kufitare. Prandaj, mund të nxjerrim përfundimin se në valën elektromagnetike në përcjellës rrafshet e amplitudave të njëjta nuk përputhen me rrafshet e fazave të njëjta. Këto valë quhen johomogjene. Pra, nëpër përcjellës përhapen valët johomogjene elektromagnetike.

Te valët homogjene, të atilla sikurse përhapen nëpër izolatorë, rrafshet e amplitudave të njëjta përputhen me rrafshet e fazave të njëjta.

Në përcjellës valët nuk janë homogjene, prandaj rrafshet e fazave të njëjta e mbyllin një kënd ψ me rrafshet e amplitudave të njëjta. Ekuacioni i rrafshit, i cili me rrafshin $z = const.$ e mbyll këndin ψ, është:

$$x \sin\psi + z \cos\psi = const.$$

Që të fitojmë fazat e njëjta, këtë duhet ta shumëzojmë me $\frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} n_\alpha$, ku n_α është indeksi real i thyerjes. E shkruajmë indeksin α pranë n që të theksojmë se edhe ky varet prej këndit të rënies α. Pra:

$$\frac{\omega}{c} n_\alpha \ (x \sin\psi + z \cos\psi) = const. \tag{12}$$

Duke i barazuar koeficientët pranë ndryshoreve x dhe z në ekuacionet (11) dhe (12) fitojmë:

$$\sin\alpha = n_\alpha \sin\psi \tag{13}$$

$$\rho(n \cos\delta - \varkappa \sin\delta) = n_\alpha \cos\psi$$

Shprehjen e parë mund ta shkruajmë në formën:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\psi} = n_\alpha \tag{14}$$

Shohim se ky është ligji i thyerjes së dritës, ndërsa ψ është kënd real i thyerjes në përcjellës.

b) **Përcaktimi i konstanteve reale n_α dhe $\varkappa_\alpha$**

Indeksi real i thyerjes në përcjellës n_α fitohet duke i ngritur shprehjet (13) në katrorë dhe mbledhur. Do të kemi

$$n^2_\alpha = \sin^2\alpha + n^2 (\rho \cos\delta)^2 + \varkappa^2 (\rho \sin\delta)^2 - 2n \varkappa (\rho \cos\delta) \ (\rho \sin\delta) \tag{15}$$

Do t'i shënojmë përkohësisht anët e majta të shprehjeve (4) dhe (5) me A dhe B. Pra:

$$A = 1 - \frac{\sin^2\alpha}{(n^2+\varkappa^2)^2} \ (n^2 - \varkappa^2) \tag{16}$$

$$B = \frac{2n \varkappa \sin^2\alpha}{(n^2+\varkappa^2)^2}$$

Kësisoj shprehjet (4) dhe (5) do të kenë formën:

$$\rho^2 \cos 2\delta = A$$

$$\rho^2 \sin 2\delta = B$$

Nga ekuacioni i fundit kemi:

$$\rho \sin\delta = \frac{2\rho \cos\delta}{B}$$

ndërsa i pari shkruhet siç vijon:

$$(\rho \cos\delta)^2 - (\rho \sin\delta)^2 = A \qquad (17)$$

E zëvendëojmë $\rho \sin\delta$:

$$(\rho \cos\delta)^2 - \frac{B^2}{4(\rho \cos\delta)^2} = A$$

ose

$$(\rho \cos\delta)^2 - A(\rho \cos\delta)^2 - \frac{1}{4} B^2 = 0$$

E zgjedhim këte ekuacion

$$(\rho \cos\delta)^2 = \frac{1}{2} (A + \sqrt{A^2 + B^2}) \qquad (18)$$

Pastaj nga (17) rrjedh

$$(\rho \sin\delta)^2 = (\rho \cos\delta)^2 - A$$

prej nga

$$(\rho \sin\delta)^2 = \frac{1}{2} (- A + \sqrt{A^2 + B^2}) \qquad (19)$$

Vlerat e fituara i zëvendësojmë në (15)

$$n^2{}_\alpha = \sin^2\alpha + \frac{n^2}{2} (A + \sqrt{A^2 + B^2}) + \frac{\varkappa^2}{2}.$$

$$(- A + \sqrt{A^2 + B^2}) - n\varkappa \sqrt{- A^2 + A^2 + B^2}$$

$$n^2{}_\alpha = \frac{n^2}{2} \sin^2\alpha + \frac{n^2-\varkappa^2}{2} A + \frac{n^2+\varkappa^2}{2} \sqrt{A^2 + B^2} - \frac{2n\varkappa}{2} B \qquad (20)$$

Duhet t'i njehsojmë shprehjet

$$(n^2 + \varkappa^2)\sqrt{A^2 + B^2} = \left\{ (n^2 + \varkappa^2)^2 \left[1 - \frac{2(n^2 - \varkappa^2) \sin^2\alpha}{(n^2 + \varkappa^2)^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(n^2 - \varkappa^2) \sin^4\alpha}{(n^2 + \varkappa^2)^4} + \frac{4 n^2\varkappa^2 \sin^4\alpha}{(n^2 + \varkappa^2)^4} \right]\right\}^{1/2} =$$

$$= \sqrt{(n^2 + \varkappa^2)^2 - 2(n^2 - \varkappa^2) \sin^2\alpha + \sin^4\alpha} =$$

$$= \sqrt{4 n^2\varkappa^2 + (n^2 - \varkappa^2)^2 - 2(n^2 - \varkappa^2) \sin^2\alpha + \sin^4\alpha} =$$

$$= \sqrt{4 n^2\varkappa^2 + (n^2 - \varkappa^2 - \sin^2\alpha)^2}$$

dhe

$$(n^2 - \varkappa^2) A - 2 n\varkappa B = n^2 - \varkappa^2 - \frac{(n^2 - \varkappa^2)^2}{(n + \varkappa^2)^2} \sin^2\alpha -$$

$$- \frac{4 n^2\varkappa^2 \sin^2\alpha}{(n^2 + \varkappa^2)^2} = n^2 - \varkappa^2 - \sin^2\alpha$$

Këto vlera i zëvendësojmë në (20)

$$n^2{}_\alpha = \frac{1}{2} [n^2 - \varkappa^2 + \sin^2\alpha + \sqrt{4n^2\varkappa^2 + (n^2 - \varkappa^2 - \sin^2\alpha)^2}] \tag{21}$$

Kjo është shprehja për indeksin real të thyerjes dhe shprehet me ndihmën e konstanteve n, $\varkappa$ dhe këndit të rënies α. Shohim se në përcjellës indeksi i thyerjes varet prej këndit të rënies.

Faktorin real të thithjes e gjejmë duke e ngritur në katrorë shprehjen (10).

$$\varkappa^2{}_\alpha = n^2(\rho \sin\delta)^2 + \varkappa^2 (\rho \cos\delta)^2 + 2n\varkappa(\rho \cos\delta)(\rho \sin\delta)$$

I zëvendësojmë shprehjet (18) dhe (19)

$$\varkappa^2{}_\alpha = \frac{n^2}{2} (- A + \sqrt{A^2 + B^2}) + \frac{\varkappa^2}{2} (A + \sqrt{A^2 + B^2}) + 2n\varkappa \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{- A^2 + A^2 + B^2} = \frac{1}{2} [- (n^2 - \varkappa^2) A + (n^2 + \varkappa^2) \sqrt{A^2 + B^2} + 2n \varkappa B$$

dhe pasi t'i zëvendësojmë vlerat e njehsuara më parë fitojmë

$$\varkappa^2{}_\alpha = \frac{1}{2} [- n^2 + \varkappa^2 + \sin^2\alpha + \sqrt{4n^2\varkappa^2 + (n^2 - \varkappa^2 - \sin^2\alpha)^2} \tag{22}$$

Kësisoj i kemi përcaktuar konstantet optike të përcjellsit.

c) Këndi i rënies për të cilin nuk ka thyerje

Meqë indeksi i thyerjes n_α varet nga këndi i rënies, në përcjellës duhet të ekzistojë përveç këndi $\alpha = 0$ edhe një kënd tjetër për të cilin nuk ka thyerje të dritës. Ky do të jetë këndi për të cilin vlenë

$$\phi = \alpha$$

ose

$$n_\alpha = 1$$

Shfrytëzojmë shprehjen (21)

$$1 = \frac{1}{2} [n^2 - \varkappa^2 + \sin^2\alpha + \sqrt{4n^2\varkappa^2 + (n^2 - \varkappa^2 - \sin^2\alpha)^2}$$

$$2 - n^2 + \varkappa^2 - \sin^2\alpha = \sqrt{4n^2\varkappa^2 + (n^2 - \varkappa^2 - \sin^2\alpha)^2}$$

E ngrisim në katrorë

$$4 + (n^2 - \varkappa^2)^2 + \sin^4\alpha - 4(n^2 - \varkappa^2) - 4\sin^2\alpha + 2(n^2 - \varkappa^2)\sin^2\alpha =$$
$$= 4n^2\varkappa^2 + (n^2 - \varkappa^2)^2 - 2(n^2 - \varkappa^2)\sin^2\alpha + \sin^4\alpha$$

ose

$$(n^2 - \varkappa^2 - 1)\sin^2\alpha = n^2\varkappa^2 + n^2 - \varkappa^2 - 1$$

prej nga

$$\sin^3\alpha = 1 + \frac{n^2\varkappa^2}{n^2 - \varkappa^2 - 1}$$

dhe këndi i kërkuar është

$$\sin\alpha = \sqrt{1 + \frac{n^2\varkappa^2}{n^2 - \varkappa^2 - 1}} \qquad (23)$$

Pasi t'i zëvendësojmë vlerat konkrete për këtë këndë fitojmë: për bakër 62,9°, për argjend 71,9°, ndërsa për ari 76,2°.

7. KALIMI NË OPTIKË GJEOMETRIKE

Shqyrtimi i përhapjes së dritës në mjedise homogjene është shumë më i thjeshtë se sa në mjediset johomogjene. Për mjediset johomogjene jemi të detyruar të shfrytëzojmë metoda të përafërta, ndër të cilat më të rëndësishme janë ato të zhvilluara si optikë gjeometrike. Nëse gjatësia valore e dritës është e vogël në krahasim me gjatësitë në të cilat paraqiten ndërrimet e vetive makroskopike të mjedisit të shqyrtuar, atëherë në pjesë shumë të vogla të tij mjedisit mund t'i përshkruajmë indeks të caktuar të thyerjes, ndërsa përhapjen e dritës ta shprehim me valë të rrafshta. Ky shqyrtim do të jetë më i saktë sa më e vogël të jetë gjatësia valore e dritës. Optika gjeometrike i përfshin ato ligje të përhapjes valore të cilat rrjedhin gjatë kalimit kufitarë kur gjatësia valore tenton në zero.

Le të jetë ψ njëra komponentë e fushës së dritës. Nga ekuacionet e Maksuelit për mjedis izotrop dhe homogjen fitohet ky ekuacion diferencial (shiko ekuacionin (XV.1.4) për vektorin $\vec{E}$ apo $\vec{H}$)

$$\Delta\psi = \frac{1}{v^2}\ddot{\psi} \qquad (1)$$

Meqë $n = \dfrac{c}{v}$ do të kemi:

$$\Delta\psi = \frac{n^2}{c^2}\ddot{\psi}$$

E dijmë se zgjidhja e këtij ekuacioni diferencial për mjedis ku indeksi i thyerjes është konstant është

$$\psi = a\, e^{i(\vec{k}\,\vec{r}-\omega t)} \qquad (2)$$

Kemi vërejtur se gjatë reflektimit dhe thyerjes nuk ndërron frekuenca e dritës, prandaj edhe pse ndërron indeksi i thyerjes në mjedise johomogjene, frekuenca në to mbetet konstante. Do të ndërrojë vetëm shpejtësia apo gjatësia valore. Zgjidhjen e ekuacionit të valës për frekuencë konstante mund ta shkruajmë në formën

$$\psi = u(x, y, z)\, e^{-i\omega t} \qquad (3)$$

Për indeks konstant të thyerjes funksioni i amplitudës fitohet në mënyrë të drejtpërdrejtë duke e ndarë funksionin në pjesën kohore dhe hapësirore. Pra, ky funksion do të kishte formën

$$u = a\, e^{i\,\vec{k}\,\vec{r}} \qquad (4)$$

Derivati i parë dhe i dytë sipas kohës i funksionit të valës (3) është

$$\dot{\psi} = -\, i\omega u\, e^{-i\omega t}$$

$$\ddot{\psi} = -\, \omega^2 u\, e^{-i\omega t}$$

E zëvendësojmë në ekuacionin (1) derivatin e dytë kohorë dhe pasi të thjeshtësojmë me funksionin eksponencial fitojmë

$$\triangle u + \frac{\omega^2}{c^2}\, n^2 u = 0 \qquad (5)$$

Në këte ekuacion indeksi i thyerjes duhet të kuptohet si funksion i cili ndërron ngadalë.

Për mjedise homogjene funksioni valorë paraqet valë të rrafshtë, por sipas asaj që cekëm në fillim edhe për mjedise johomogjene në pjesë të vogla të mjedisit përhapjen e dritës mund ta shprehim me valën e rrafshtë

$$u = a(x, y, z)\, e^{i\,F(x,\, y,\, z)} \qquad (6)$$

Amplituda a është funksion i cili ndërron ngadalë, ndërsa faza hapësirore është përafërsisht funksion linearë i koordinateve. Në këte mënyrë mund të mos i përfillim derivatet e funksioneve që ndërrojnë ngadalë. Do të kemi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial x} e^{iF} + ia \frac{\partial F}{\partial x} e^{iF} \approx ia \frac{\partial F}{\partial x}\; e^{iF}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = ia \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} e^{iF} + ia \frac{\partial F}{\partial x}\; i\; \frac{\partial F}{\partial x} e^{iF} \approx -\, a \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) e^{iF}$$

Këtu derivatin e dytë të F nuk e përfillim si madhësi të vogël të rendit të lartë. Në mënyrë të ngjajshme do të fitojmë edhe për derivatet tjera sipas y dhe z. Pasi t'i mbledhim derivatet e fituara të funksionit valorë fitojmë

$$\Delta u = -\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right] u$$

sepse $u = a\, e^{iF}$

Ndërsa ekuacioni i valës redukohet në formën

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \qquad (7)$$

Ky ekuacion e përcakton fazën F si funksion të koordinateve. Nëse e dijmë zgjidhjen e tij, atëherë sipërfaqet e fazëve të njëjta përcaktohen me ekuacionin

$$F(x, y, z) = const.$$

Normalisht ndaj sipërfaqeve të fazëve qëndron kahja e përhapjes së dritës, prandaj problemi i përhapjes së dritës në mjediset johomogjene, për gjatësi mjaft të vogla valore shndërrohet në problemin e kërkimit të familjes së sipërfaqeve ekuifazore, fig. 107.

Nga ekuacioni (7) mund të përfitojmë një parim mjaft të rëndësishëm të optikës gjeometrike. Ekuacionin e shkruajmë në formën

$$|grad\, F| = \frac{\omega}{c} n \qquad (8)$$

Nëse indeksin e thyerjes e shkruajmë në kahje të gradientit në sipërfaqen fazore, atëherë (8) mund ta shkruajmë në formë vektoriale

$$grad\, F = \frac{\omega}{c} \vec{n} \quad \text{sepse} \quad \vec{n} = \vec{n}_o\, n \qquad (9)$$

E paraqesim në fushë të dritës një lakore të mbyllur të asaj forme e cila në rrugën MNP përputhet me rrezen e dritës, ndërsa pjesa tjetër PCM është e çfarëdoshme, fig. 108.

Integrali vijorë i shprehjes (9) është

$$\oint grad\, F\, d\vec{l} = \frac{\omega}{c} \oint \vec{n}\, d\vec{l} = 0$$

sepse funksioni F është i njëvlefshëm. Pra,

$$\oint \vec{n}\, d\vec{l} = 0 \qquad (10)$$

Pasi që integrimi kryhet nëpër vijë të mbyllur këte mund ta ndajmë në dy pjesët e lakores

$$\int_{MNP} n\, dl + \int_{PCM} \vec{n}\, d\vec{l} = 0 \qquad (11)$$

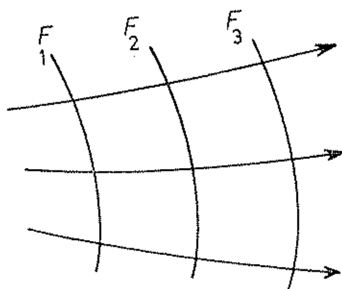


Fig. 107

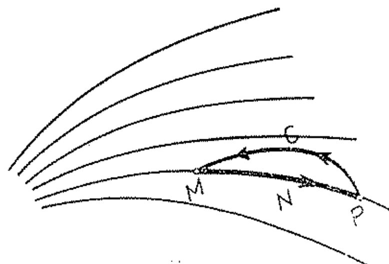


Fig. 108

Përgjatë rrugës së dritës vektori $\vec{n}$ e ka kahjen e elementit vijorë $\vec{d\,l}$ prandaj prodhimi $\vec{n}\,\vec{d\,l}$ në integralin e parë është i barabartë me $n\,d\,l$. Në vend të integrimit nëpër vijën *PCM* mund të integrojmë integralin e dytë nëpë *MCP* ashtu që këtij i ndërron parashenja. Nëse e shënojmë me α këndin në mes të $\vec{n}_o$ dhe $\vec{d\,l}$ në bazë të asaj çka u cek më parë mund të shkruajmë

$$\int_{MNP} n\,d\,l = \int_{PCM} n\,d\,l \cos\alpha$$

dhe meqë $\cos\alpha < 1$ do të kemi

$$\int_{MNP} n\,d\,l < \int_{PCM} n\,d\,l \qquad (12)$$

Ky është formulimi ekzakt i parimit të Fermatit. Kuptojmë se integrali ka vlerë minimale nëse merret përgjatë rrugës së dritës.

$$\int_{M}^{P} n\,d\,l = minimum \qquad (13)$$

Nëpër çfarëdo rruge tjetër e cila nuk përputhet me rrezen e dritës integrali do të ketë vlerë më të madhe se (13).

Nëse indeksin e thyerjes e shprehim si herës të shpejtësisë së dritës në mjedis dhe boshllëk

$$n = \frac{c}{v}$$

do të kemi

$$\int_{M}^{P} \frac{c\,dl}{v} = minimum$$

apo

$$\int_{M}^{P} \frac{dl}{v} = minimum$$

Ky integral kuptohet si vijon. Drita me shpejtësi v e kalon rrugën dl gjatë kohës dt, prandej integrali paraqet diferencialin e kohës

$$\int_M^P dt = minimum.$$

Pra, drita në mes të dy pikave të caktuara përhapet nëpër atë rrugë për të cilën i nevojitet kohë minimale. Këte parim e ka formuluar Fermati më 1665 duke e përgjithsuar ligjin e thyerjes. Nga ky parim mund të përfitohen të gjitha ligjet e optikës gjeometrike.

8. PARIMI I VARIACIONIT NË MEKANIKË DHE LIDHJA ME OPTIKËN

Të kthehemi edhe njëherë në kapitullin VII të këtij libri. Kemi cekur atje se ekuacionet diferenciale të lëvizjes së grimcës mund të zëvendësohen me parimin e variacionit

$$\int_A^B L(x, y, z, \quad \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)\, dt = ekstrem. \tag{1}$$

ku L është funksion i njohur i koordinateve dhe shpejtësive. Integrali është funksion i pikës fillestare dhe të fundit të cilat gjatë variacionit mbesin konstante,

$$\delta \int_A^B L\, dt = 0 \tag{2}$$

Nëse gjatë kohës forcat janë konstante, atëherë funksioni i Lagranzhit shprehet në formën

$$L = \frac{1}{2}\, m\, v^2 - U(x, y, z) \tag{3}$$

Por meqë energjia është konstante

$$E = \frac{1}{2}\, m\, v^2 + U(x, y, z) \tag{4}$$

Nga (3) dhe (4) për Lagranzhian fitojmë

$$L = m\, v^2 - E$$

ndërsa (2) do të ketë formën

$$\delta \int_A^B L\, dt = \delta \int_A^B (mv^2 - E)\, dt = 0 \tag{5}$$

Meqë energjia është konstante mund të mos e shkruajmë. Në anën tjetër e dijmë se

$$v\, dt = dl$$

dhe (1) e shkruajmë për një grimcë

$$\int_A^B mv\, dl = ekstrem. \tag{6}$$

Impulsin i cili figuron në (6) e gjejmë nga

$$E = \frac{1}{2}\, mv^2 + U$$

prej nga fitojmë

$$p = mv = \sqrt{2m\,(E - U)}$$

Vlerën e fituar e zëvendësojmë në (6)

$$\int_A^B \sqrt{2m\,(E - U)}\, dl = ekstrem. \tag{7}$$

Parimi i variacionit (7) formalisht mund të merret i ngjajshëm me parimin themelor të optikës gjeometrike (XVI.7.13)

$$\int_A^B n\, dl = ekstrem. \tag{8}$$

ashtu që përhapja e dritës në mjedis me indeks të ndryshuar të thyerjes i përgjigjet lëvizjes së grimcës në fushë me potencial të ndryshuar. Pra, nga (7) dhe (8) kemi

$$n^2 \sim 2m\,(E - U) \tag{9}$$

Duke u bazuar në këte formalisht ligjet e optikës gjeometrike mund të shndërrohen në ligje të lëvizjes së grimcave.

Shprehja (6) është funksion i cili varet nga kufiri i lartë. Këte do ta shënojmë me $\check{S}$. Do të kemi

$$\check{S} = \int_{A_1}^{A} p\, dl \tag{10}$$

Për rrugë të vërtetë të grimcës elementi vijorë ka kahje të impulsit, prandej për shprehje të fundit do të kemi:

$$\check{S} = \int_{A_1}^{A} \vec{p}\, d\vec{r}$$

Diferenciali i këtij funksioni është:

$$d\check{S} = \vec{p}\, d\vec{r} = p_x dx + p_y dy + p_z dz$$

prej nga për komponente të impulsit fitojmë:

$$\frac{\partial \check{S}}{\partial x} = p_x \; ; \quad \frac{\partial \check{S}}{\partial y} = p_y \; ; \quad \frac{\partial \check{S}}{\partial z} = p_z$$

Shuma e tyre është:

$$p^2 = p^2_x + p^2_y + p^2_z = \left(\frac{\partial \check{S}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \check{S}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \check{S}}{\partial z}\right)^2 \tag{11}$$

ose

$$\left(\frac{\partial \check{S}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \check{S}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \check{S}}{\partial z}\right)^2 = 2m\,(E - U) \tag{12}$$

E kemi fituar ekuacionin e Hamilton-Jakobit (shiko ekuacionin VII. 19.13). Formalisht, ky ekuacion përputhet me ekuacionin (XVI.7.7) për përcaktimin e fazës hapësirore në optikë gjeometrike:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\, n^2$$

Pra, për funksionin $\check{S}$, formalisht vlenë i njëjti ekuacion diferencial sikurse për fazën hapësirore të valës së dritës.

Nëse e dijmë zgjidhjen e ekuacionit (12) atëherë:

$$\check{S}(x, y, z) = const.$$

paraqet ekuacionin e familjes së sipërfaqeve, ashtu që kahja e impulsit do të qëndrojë normalisht në to, (fig. 109).

Në optikë rol vendimtar kanë frontet e valëve, ndërsa rrezet të cilat qëndrojnë normal në këto sipërfaqe nuk kanë rëndësi primare. Në mekanikë vlenë e kundërta. Në mekanikë klasike gjendja reale paraqitet me rrugët e grimcave. Nëse ekziston ngjajshmëria formale në mes të mekanikës dhe optikës atëherë edhe lëvizjet e grimcave do të mundemi t'i përshkruajmë me sipërfaqe fazore, ashtu që rrugët e grimcave do të qëndronin normal në to. Funksioni $\check{S}$ do t'i përgjigjej fazës hapësirore të valës së dritës.

Për lëvizje të lirë të grimcës me impuls konstant funksioni $\check{S}$ e ka formën:

$$\check{S} = \int \vec{p}\, d\vec{r} = \vec{p}\,\vec{r}$$

Nëse e krahasojmë këte funksion me fazën e valës së rrafshtë

$$F = \vec{k}\,\vec{r}$$

fitojmë:

$$p \sim \frac{1}{\lambda} \tag{13}$$

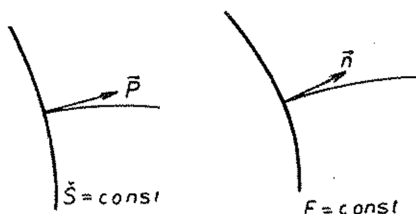


Fig. 109

Në mekanikë klasike funksioni $\check{S}$ ka ngelë vetëm si konstruksion matematik, sepse gjendja reale përshkruhet me rrugën e grimcave. Kjo ngjajshmëri në mes të mekanikës dhe optikës gjeometrike në studimin e fizikës klasike nuk ka gjetur kuptim më të thellë, por vet tentimi që mekanikës t'i jepet forma e optikës gjeometrike ka hapur shtigje të reja në fizikë. Duke u nisur nga fakti se optika gjeometrike është rast i veçantë i optikës valore ka mundur të paraqitet ideja se edhe mekanike klasike është përafrim i ndonjë teorie valore të përgjithësuar. Atëherë ngjajshmëria në mes të dritës dhe materies tjetër do të ishte e plotë.

Duke u nisur nga këto ide de Broli propozoi që edhe lëvizja e grimcave të prezentohet me lëvizje valore, ndërsa Shredingeri për këto valë të materies e paraqiti ekuacionin e ngjajshëm me ate të dritës (XVI.7.5)

$$\Delta u + \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2}\, n^2 u = 0 \quad (\text{sepse } \omega = 2\pi\nu)$$

me ndryshim se për indeks të thyerjes paraqitet shprehja (9)

$$\Delta u + const.\,(E - U)\, u = 0$$

Ky ekuacion njihet si ekuacion i Shredingerit, i cili shërben si bazë e mekanikës së kuanteve, përkatësisht mekanikës valore.

9. TEORIA E DISPERZIONIT TË DRITËS

a) Të metat e teorisë së Maksuelit për dritën

E dijmë se gjatë kalimit të dritës së bardhë nëpër prizmë optike paraqitet disperzioni i dritës, zbërthimi i dritës së bardhë në gjatësitë valore përbërëse.

Në prizmë drita thehet dy herë, prandej nga eksperimentet duhet të përfundojmë se indeksi i thyerjes varet prej frekuencës së dritës, ashtu që drita me frekuenca të ndryeshme thehet me kënde të ndryeshme.

E dimë se indeksi i thyerjes përkufizohet si marrëdhënie

$$n = \frac{c}{v}$$

Meqë është

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \qquad \text{dhe} \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

fitojmë

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_o\mu_o}}$$

Nëse mjedisi nuk është feromagnetik, atëherë $\mu \approx \mu_o$ dhe do të fitojmë

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_o}} \quad (1)$$

ose

$$n^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} \quad (2)$$

Kjo shprehje tregon se indeksi i thyerjes në teorinë e Maksvelit nuk varet nga frekuenca e dritës. Kuptojmë se sipas kësaj teorie nuk duhet të ekzistojë as disperzioni i dritës. Por, kjo e dhënë nuk pajtohet me eksperimentet.

Pastaj, sipas teorisë së Maksvelit të gjithë izolatorët duhet të jenë pa thithje, pra të tejdukshëm, ndërsa të gjithë përcjellësit për arsye thithjeje duhet të jenë jo të tejdukshëm. E dijmë se te shumica e materialeve kjo është e vërtetë, por paraqiten edhe përjashtime. Ekzistojnë izolatorë të shkëlqyer të cilët janë të pa tejdukshëm, p.sh., porculani apo bakeliti, por edhe në mes të përcjellësve ka të atillë të cilët janë të tejdukshëm, p.sh., disa elektrolit.

Nga kjo që u tha më sipër mund të përfundojmë se teoria e Maksvelit saktësisht e shpjegon një numër të madh të dukurive optike, por ka edhe aso dukuri për të cilat rezultatet e kësaj teorie janë në kundërthënie me të dhënat eksperimentale.

Prandej, duhet kuptuar se teoria e Maksvelit është e saktë, por në te paraqiten disa detaje të cilat janë paraqitur në mënyrë shumë të thjeshtë, prandej për disa pyetje të veçuara dërgon në rezultate të pa pranuara.

Është treguar se pika të dobëta të teorisë së Maksvelit paraqesin madhësitë të cilat i shprehin vetitë e materialeve. Kësisoji, për konstantë dielektrike, permeabilitet dhe përçueshmëri specifike kemi supozuar se janë konstante. Ky supozim është paraqitur për fushat statike dhe si i tillë është zgjeruar për fusha të ndryshuara si edhe për fusha te të cilat ndërrimet kohore janë tepër të shpejta, sikurse është fusha e dritës. A është kjo e saktë? Shumë lehtë mund të bindemi për përgjegjen negative. Të cekim një shembull. Uji e ka konstanten relative dielektrike

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} = 91$$

ashtu që sipas (1) indeksi i thyerjes për te do të jetë

$$n = 9,$$

ndërsa eksperimentet tregojnë se për ujë kjo vlerë është

$$n = 1{,}33$$

Në anën tjetër, eksperimentet tregojnë se valët elektromagnetike me gjatësi valore me të madhe se 1 cm nuk kanë disperzion dhe për to vlenë relacioni i Maksvelit (1). Prandej mund të përfundojmë se për valë me frekuencë të vogël rezultatet teorike dhe matjet eksperimentale përputhen, por për frekuenca tepër të mëdha, sikurse në valët e dritës paraqitet devijim mjaft i madh i këtyre rezultateve.

Duke u bazuar në këte që cekëm është e arsyeshme që teoria të korrigjohet duke supozuar se konstanta dielektrike nuk është konstantë e vërtetë. Kjo është konstante vetëm në fushat stacionare ndërsa në fushat të cilat shumë shpejt ndërrojnë gjatë kohës varet prej frekuencës së lëkundjes së valës elektromagnetike. Natyrisht se vlera e saj mund të merret si konstante jo vetëm në fusha stacionare por edhe në ato të cilat ndërrojnë ngadalë gjatë kohës. Në mënyrë të ngjajshme vlen edhe për madhësitë tjera karakteristike të materialit të mjedisit.

Zgjerimin e teorisë së Maksvelit në këte drejtim e ka kryer Lorenci. Teoria e tij njifet si teori elektronike. Në të vërtetë në teori të Maksvelit, materialet nëpër të cilët kalon drita nuk kanë strukturë, ndërsa në teorinë e Lorencit supozohet se ato përmbajnë grimca elektrike në mes të cilave gjenden elektronet lëvizëse. Nga këtu vjen edhe emri i teorisë.

b) Teoria elektronike e disperzionit

Materialet përbëhen nga molekulat në të cilat gjenden elektronet. Kur nëpër izolator kalon vala elektromagnetike, atëherë kjo me fushën e vet vepron në elektrone dhe i detyron të kryejnë lëvizje lëkundëse.

Elektronet në molekule janë të lidhura me forca. Për këto mund të paraqesim hipotezën punuese teorike. Sipas Lorencit duhet supozuar se këto forca janë proporcionale me zhvendosjen e elektroneve nga pozitat ekuilibruese. Konstanten e proporcionalitetit do ta shënojmë me $-m\omega^2_j$, ashtu që forca e cila e lidhë elektronin me pozitë ekuilibruese është e barabartë me $-m\omega^2_j\vec{r}$, ku $\vec{r}$ është zhvendosja e elektronit nga kjo pozitë. E dimë nga mekanika se trupi i zhvendosur nga pozita ekuilibruese nën veprimin e forcës së tillë kryen lëvizje oshiluese harmonike me frekuencë ciklike ω_j. Këte e quajmë frekuencë vetjake të lëkundjeve të lira të elektronit. Supozojmë se elektronet në molekulë kanë frekuenca të ndryshme vetjake të lëkundjeve, prandej pranë simbolit për frekuencë e shënojmë indeksin j. Do të supozojmë gjithashtu se forcat veprojnë në elektrone ashtu që ata lëkunden sikur të gjendeshin në ndonjë mjedis rrezistues. Forcën e rrezistencës e shprehim në formën $-\alpha_j\dot{\vec{r}}$. Këtu madhësia α_j është e ngjajshme me koeficientin e rezistencës i cili varet prej ndërtimit të molekulës. Përveç këtyre forcave

vepron edhe fusha e jashtme me forcë $e\vec{E}$. Në bazë të kësaj çka u cekë në elektronin e shqyrtuar vepron forca:

$$\vec{f} = -m\omega^2{}_j\vec{r} - \alpha_j\dot{\vec{r}} + e\vec{E}$$

Në vend të forcës shënojmë prodhimin e masës dhe nxitimit dhe fitojmë ekuacionin e lëvizjes së elektronit

$$m\ddot{\vec{r}} + d_j\dot{\vec{r}} + m\omega^2{}_j\vec{r} = e\vec{E} \tag{3}$$

E shumëzojmë me eN_j/m, ku N_j paraqet numrin e elektroneve në njësi të vëllimit të cilët e kanë frekuencën ω_j. Do të kemi:

$$eN_j\ddot{\vec{r}} + \frac{\alpha_j}{m}eN_j\dot{\vec{r}} + \omega^2{}_j eN_j\vec{r} = \frac{N_j e^2}{m}\vec{E}$$

Prodhimi $e\vec{r}$ paraqet momentin dipolarë, i cili paraqitet si rrezultat i zhvendosjes së elektronit për $\vec{r}$, ndërsa $N_j e\vec{r}$ paraqet momentin e të gjithë dipoleve në njësi të vëllimit. Ky është kontributi i këtyre elektroneve për polarizim të izolatorit

$$\vec{P}_j = eN_j\vec{r}$$

Prandej për polarizim vlenë shprehja

$$\ddot{\vec{P}}_j + \frac{\alpha_j}{m}\dot{\vec{P}}_j + \omega^2{}_j\vec{P}_j = \frac{N_j e^2}{m}\vec{E} \tag{4}$$

Fusha elektrike e cila vepron në elektrone është fushë e valës elektromagnetike, prandej do të marrim se ajo ndërron si funksion harmonik i kohës

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{-i\omega t} \tag{5}$$

Për këte arsye ekuacionin (4) mund ta kënaqin vetëm funksionet oshiluese harmonike me të njëjtën frekuencë, prandej zgjidhjen e marrim të formës

$$\vec{P}_j = \vec{P}_o e^{-i\omega t}$$

me derivatet kohore

$$\dot{\vec{P}}_j = -i\omega\vec{P}_j$$

$$\ddot{\vec{P}}_j = -\omega^2\vec{P}_j$$

të cilat pasi t'i zëvendësojmë në (4) fitojmë

$$(-\omega^2 - i\,\frac{\alpha_j}{m}\,\omega + \omega^2_j)\,\vec{P}_j = \frac{N_j\,e^2}{m}\,\vec{E}$$

Në anën e djathtë do të shkruajmë

$$N_j = N\,f_j$$

ku me N e kemi shënuar numrin e të gjitha molekuleve në njësi të vëllimit, ndërsa f_j tregon pjesën e këtij numri me elektrone që e kanë frekuencën vetjake ω_j. Pra,

$$\vec{P}_j = \frac{\dfrac{N\,e^2}{m}\,f_j}{(\omega^2_j - \omega^2) - i\,\dfrac{\alpha_j}{m}\,\omega}\,\vec{E}$$

Ky është kontributi i atyre elektroneve të cilët e kanë frekuencën vetiake ω_j, për polarizim. Që të fitojmë tërë polarizimin duhet t'i mbledhim kontributet e të gjitha elektroneve me frekuenca të ndryeshme.

Fitojmë:

$$\vec{P} = N \sum_j \frac{e^2\,f_j/m}{(\omega^2_j - \omega^2) - i\,\dfrac{\alpha_j\omega}{m}}\,\vec{E} \qquad (6)$$

Lidhmëria në mes të polarizimit dhe fushës elektrike shprehet në formën

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\,\vec{E}$$

dhe duke i krahasuar fitojmë

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = N \sum_j \frac{e^2\,f_j/m}{(\omega^2_j - \omega^2) - i\,\dfrac{\alpha_j\omega}{m}}$$

E pjesëtojmë me ε_0

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{N}{\varepsilon_0} \sum_j \frac{e^2\,f_j/m}{(\omega^2_j - \omega^2) - i\,\dfrac{\alpha_j\omega}{m}}$$

Sipas shprehjes (2) në vend të $\varepsilon/\varepsilon_0$ mund të shkruajmë n^2. Meqë vlera e fituar nuk është reale duhet të shkruajmë

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = (n + i\varkappa^2)^2$$

Prandej,

$$(n + i\varkappa^2)^2 = 1 + \frac{N}{\varepsilon_0} \sum_j \frac{e^2 f_j/m}{(\omega^2_j - \omega^2) - i\,\dfrac{\alpha_j \omega}{m}}$$

Anën e majtë e ngrisim në katror, ndërsa në të djathtën e eliminojmë numrin kompleks nga emëruesi

$$n^2 - \varkappa^2 + i\,2n\varkappa = 1 + \frac{N}{\varepsilon_0} \sum_j \frac{\dfrac{e^2 f_j}{m}\left[(\omega^2_j - \omega^2) + i\,\dfrac{\alpha_j \omega}{m}\right]}{(\omega^2_j - \omega^2)^2 + \dfrac{\alpha^2_j \omega^2}{m^2}}$$

I barazojmë pjesët reale dhe imagjinare dhe fitojmë

$$n^2 - \varkappa^2 = 1 + \frac{N}{\varepsilon_0} \sum_j \frac{\dfrac{e^2 f_j}{m}\,(\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega^2_j - \omega^2)^2 + \dfrac{\alpha^2_j \omega^2}{m^2}} \tag{7}$$

$$2n\varkappa = \frac{N}{\varepsilon_0} \sum_j \frac{\dfrac{\omega e^2 f_j}{m^2}\,\alpha_j}{(\omega^2_j - \omega^2)^2 + \dfrac{\alpha^2_j \omega^2}{m^2}} \tag{8}$$

I kemi fituar dy ekuacione për përcaktimin e indeksit të thyerjes n dhe faktorit të thithjes $\varkappa$. Që të dyja janë katrore, prandej nuk do t'i zgjidhim, por diskutimin do ta kryejmë nga vet ekuacionet.

c) Në pjesën e dukshme të spektrit nuk ka thithje

Frekuenca vetjake e elektronit mund të jetë në cilëndo pjesë të spektrit. Së pari do të shqyrtojmë rastin kur në pjesën e dukshme të tij nuk gjendet asnjë frekuencë e dukshme. Atëherë ndryshimi $\omega^2_j - \omega^2$ është i madh dhe pasi që α_j është i vogël mund të marrim se vlenë

$$(\omega^2_j - \omega^2) \gg \frac{\alpha_j \omega}{m}$$

dhe mund të mos e përfillim faktorin

$$\frac{\alpha_j \omega}{m} \approx 0$$

Atëherë nga ekuacioni (8) fitojmë

$$n\varkappa = 0$$

Pasi që $n \neq 0$, do të jetë $\varkappa = 0$ (9)

Në pjesën e dukshme të spektrit nuk ka thithje dhe izolatori është i tejdukshëm. Në këte rast ekuacioni (7) redukohet në

$$n^2 = 1 + \frac{N}{\varepsilon_o} \sum \frac{e^2 f_j}{m(\omega^2{}_j - \omega^2)} \tag{10}$$

Për këte rast do të marrim se të gjitha frekuencat vetjake gjenden në pjesën ultraviolete të spektrit. Frekuencën më të vogël do ta shënojmë me ω_1. Do të jetë e mjaftuar që në serinë (10) të marrim vetëm anëtarin e parë

$$n^2 = 1 + \frac{N}{\varepsilon_o} \frac{e^2 f_1}{m(\omega^2{}_1 - \omega^2)}$$

sepse të gjithë anëtarët tjerë janë të vegjël, meqë $\omega^2{}_j - \omega^2$ është i madh. Shprehjen e fundit mund ta shkruajmë edhe në formën

$$n^2 = 1 + \frac{N}{\varepsilon_o} \frac{e^2 f_1}{m\omega^2{}_1} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega^2{}_1}\right)^{-1}$$

Në vend të frekuencave shkruajmë gjatësitë valore. Pasi që janë proporcionale të zhdrejta me frekuencat do të kemi:

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda}$$

Këtu me λ_1 e kemi shënuar gjatësinë valore të dritës e cila i përgjigjet frekuencës ω_1 në boshllëk.

$$n^2 = 1 + \frac{N}{\varepsilon_o} \frac{e^2 f_1}{m\omega^2{}_1} \left(1 - \frac{\lambda^2{}_1}{\lambda^2}\right)^{-1}$$

E kryejmë zhvillimin në seri të binomit

$$n^2 = 1 + \frac{N}{\varepsilon_o} \frac{e^2 f_1}{m\omega^2{}_1} \left(1 + \frac{\lambda^2{}_1}{\lambda^2} + \frac{\lambda^4{}_1}{\lambda^4} + \ldots\right)$$

I shënojmë koeficientët e anëtarëve $1/\lambda$ me nga një germë. Atëherë këte shprehje e shkruajmë shkurtimisht në formën

$$n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \ldots . \tag{11}$$

Kjo është formula e Koshit për varshmërinë e indeksit të thyerjes nga gjatësia valore. Konstantet A, B, C për materiale të ndryeshme janë të ndryeshme. Në përgjithësi shohim se indeksi i thyerjes zvogëlohet në mënyrë monotone me zmadhimin e gjatësisë valore sikurse shihet nga figura 110. Prandej drita e kuqe e cila i ka gjatësitë valore më të mëdha, në prizmën optike zhvendoset më së pakut, ndërsa drita e kaltër me gjatësi valore më të shkurtëra, zhvendoset më së tepërmi. Kjo plotësisht i përgjigjet dukurisë së disperzionit të dritës. Pra, supozimet tona na dërgojnë deri te rezultati se izolatori është i tejdukshëm dhe tregon disperzion normal në pjesën e dukshme të spektrit.

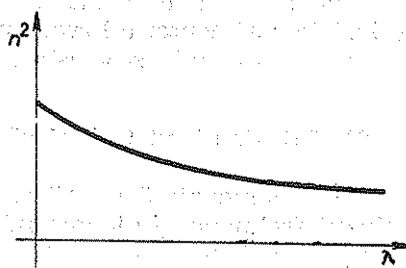


Fig. 110

Mundësinë tjetër që në pjesën e dukshme të spektrit nuk ka thithje e fitojmë kur pjesa e dukshme e spektrit gjendet në mes të dy frekuencave vetjake të elektronit. Supozojmë se kjo pjesë gjendet në mes të frekuencës së parë vetjake dhe të dytë. Atëherë në (10) duhet t'i marrim dy anëtarët të cilët përmbajnë frekuencat më të afërta vetjake.

$$n^2 = 1 + \frac{N e^2}{\varepsilon_0 m}\left(\frac{f_1}{\omega^2{}_1 - \omega^2} + \frac{f_2}{\omega^2{}_2 - \omega^2}\right)$$

$$n^2 = 1 + \frac{N e^2}{\varepsilon_0 m}\,\frac{f_1}{\omega^2{}_1}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega^2{}_1}\right)^{-1} - \frac{N e^2}{\varepsilon_0 m}\,\frac{f_2}{\omega^2}\left(1 - \frac{\omega^2{}_2}{\omega^2}\right)^{-1}$$

Edhe në këte rast i paraqesim gjatësitë valore në vend të frekuencave

$$n^2 = 1 + \frac{N e^2}{\varepsilon_0 m}\,\frac{f_1}{\omega^2{}_1}\left(1 - \frac{\lambda^2{}_1}{\lambda^2}\right)^{-1} - \frac{N e^2}{\varepsilon_0 m}\,\frac{f_2 \lambda^2}{4\pi^2 v^2}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda^2{}_2}\right)^{-1}$$

I zhvillojmë seritë e binomit

$$n^2 = 1 + \frac{N e^2}{\varepsilon_0 m}\,\frac{f_1}{\omega^2{}_1}\left(1 + \frac{\lambda^2{}_1}{\lambda^2} + \frac{\lambda^4{}_1}{\lambda^4} + \ldots\right) - \frac{N e^2 f_2}{4\pi^2 \varepsilon_0 m v^2}\left(\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{\lambda^2}\right) + \ldots$$

Pasi që paraqesim shënimet e shkurtëra për koeficientë do të kemi për indeks të thyerjes

$$n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \ldots\ldots - S\lambda^2 - T\lambda^4 - \ldots\ldots \qquad (12)$$

Kjo formulë ndryshon nga ajo e Koshit për anëtarët negativ. Këta nuk e ndërrojnë karakterin e disperzionit. Edhe në këte rast disperzioni është normal, që do të thotë se indeksi i thyerjes është më i vogël për gjatësi të mëdha valore. Këte funksion gjithashtu e shpreh grafikisht lakorja e cila zvogëlohet në mënyrë monotone.

Në seritë (11) dhe (12) duhet të merren në njehsim aq anëtarë sa i kërkon saktësia e rezultateve. Zakonisht mjafton të merret anëtari me λ^2. Eksperimentet e kryera për izolatorë të tejdukshëm e vërtetojnë saktësinë e formulës së Koshit.

d) Thithja gjendet në pjesën e dukshme të spektrit

Do të supozojmë se njëra prej frekuencave vetjake të elektronit të themi frekuenca j gjendet në pjesën e spektrit të dukshëm. Në këte rast në ekuacionet (7) dhe (8) mund t'i mos përfillim të gjithë anëtarët përveç anëtarit j. Fitojmë

$$n^2 - \varkappa^2 = 1 + \frac{N e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{f_j(\omega_j - \omega^2)}{(\omega^2_j - \omega^2)^2 + \dfrac{\varkappa^2_j \omega^2}{m^2}} \tag{13}$$

$$2n\varkappa = \frac{N e^2}{\varepsilon_0 m^2} \frac{f_j \alpha_j \omega}{(\omega^2_j - \omega^2)^2 + \dfrac{\alpha^2_j \omega^2}{m^2}}$$

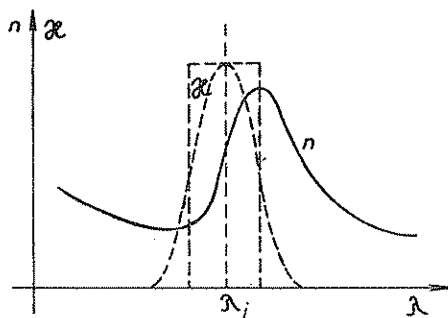


Fig. 111

Në këte rast ekziston thithja e cila e ka vlerën e vet maksimale në rrethinën e gjatësisë valore λ e cila i përgjigjet frekuencës vetjake. Kah gjatësitë valore të mëdha dhe të vogla λ zvogëlohet dhe bëhet e pa përfillshme për ndryshim të madh të $\lambda - \lambda_j$. Në fig. 111 me vija të ndërprera është paraqitur varshmëria e faktorit të thithjes nga gjatësia valore. Hapësira e gjatësive valore në të cilën $\varkappa$ ka vlerë të konsideruar quhet hapësirë thithjeje. Për këto gjatësi valore të dritës izolatori është i patejdukshëm, ndërsa për gjatësi tjera është i tejdukshëm. Nëse hapësira e thithjes mbulon tërë spektrin e dukshëm atëherë izolatori është plotësisht i patejdukshëm. Në të kundërtën, nëse kjo mbulon vetëm një pjesë të spektrit të dukshëm atëherë izolatori është i tejdukshëm, por drita të cilën e lëshon është e ngjyrosur si rezultat i përzierjes së të gjitha gjatësive valore lëshuese.

Indeksi i thyerjes n në hapësirë, jasht hapësirës së thithjes është funksion rënës i gjatësisë valore. Këte funksion mund ta paraqesim grafikisht. Majtas dhe djathtas hapësirës së thithjes kjo është lakore e cila zvogëlohet. Meqë kemi të bëjmë me funksion rënës, atëherë indeksi i thyerjes majtas nga hapësira e thithjes duhet të ketë vlerë të vogël, ndërsa djathtas nga kjo duhet të ketë vlerë të madhe. Shprehja tregon se n është funksion i pakuptuar i gjatësisë valore, prandej ska-

jet e vijës jasht hapësirës së thithjes duhet t'i bashkojmë në formën më të thjeshtë, sikurse është treguar në fig. 111. Shohim se indeksi i thyerjes n në hapësirë të thithjes rritet me λ, pra, zotëron në mënyrë të kundërt nga zotërimi i tij jasht hapësirës së thithjes. Prandej themi se izolatori në hapësirën e thithjes tregon disperzion jonormal.

10. TEORIA ELEKTRONIKE E KONSTANTEVE OPTIKE TË METALEVE

Në metale ekzistojnë elektronet e lira, prandej nuk ekziston forca e lidhjes së tyre me pozitë ekuilibruese. Edhe për metale mund të paraqesim ekuacionin e lëvizjes (XVI.9.3) me ndryshim se këtu nuk paraqitet anëtari me frekuencë vetjake të elektronit, sepse ky anëtarë është rezultat i forcës së lidhjes me pozitën ekuilibruese. Për metale kemi këte ekuacion të lëvizjes së elektronit

$$m\ddot{\vec{r}} + \alpha\dot{\vec{r}} = e\vec{E} \tag{1}$$

E shumëzojmë me eN/m dhe e paraqesim vektorin e polarizimit

$$\ddot{\vec{P}} + \frac{\alpha}{m}\dot{\vec{P}} = \frac{Ne^2}{m}\vec{E}$$

Për fushë lëkundëse duhet të marrim

$$\vec{P} = \vec{P}_0 e^{-i\omega t}$$

dhe fitojmë

$$\left(-\omega^2 - i\omega\frac{\alpha}{m}\right)\vec{P} = \frac{Ne^2}{m}\vec{E}$$

prej nga

$$\vec{P} = -\frac{Ne^2}{m\left(\omega^2 + i\frac{\omega\alpha}{m}\right)}\vec{E}$$

Nga faktori i proporcionalitetit do të kemi

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = -\frac{Ne^2}{m\left(\omega^2 + i\frac{\omega\alpha}{m}\right)}$$

dhe meqë

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = (n + i\varkappa)^2$$

vlenë

$$(n + i\varkappa)^2 = 1 - \frac{N\, e^2\, (\omega^2 - i\omega\alpha/m)}{m(\omega^4 + \omega^2\alpha^2/m)}$$

I barazojmë pjesët reale dhe imagjinare

$$n^2 - \varkappa^2 = 1 - \frac{N\, e^2}{m(\omega^2 + \alpha/m^2)} \qquad (2)$$

$$2n\varkappa = \frac{N\, e^2\alpha}{m^2\omega(\omega^2 + \alpha^2/m^2)}$$

Kemi fituar shprehje të njëjta sikurse për izolatorë. Edhe në metale kemi thithje të dritës, por në shumicën e metaleve e mbulon tërë spektrin e dukshëm.

XVII. OPTIKA E KRISTALEVE

1. TENZORI DIELEKTRIK

a) Lidhmëria në mes të indukcionit dhe fushës elektrike

Kristalet janë mjedise anizotrope. Themi se një mjedis është anizotrop nëse vetitë e tij fizike varen nga kahja. Këso mjedise anizotrope paraqesin të gjithë kristalet, përveç atyre të cilët bëjnë pjesë në sistemin teseral kristalografik. Mjediset tjera sikurse janë, lëngjet gazet dhe trupat amorf, janë izotrope. Në këto mjedise vetitë fizike të trupave nuk varen nga kahja dhe i shprehim me ndihmën e konstanteve specifike të cilat kanë karakter skalari. Në teori të fushës elektromagnetike i kemi njohur tri konstante specifike të materialeve, ε, μ dhe σ. Në shqyrtimin e mjediseve anizotrope këto konstante nuk kanë të njëjtën vlerë në të gjitha kahjet. Do të kufizohemi vetëm për izolatorë që nuk janë feromagnetik. Atëherë $\sigma = 0$ dhe $\mu = \mu_o$. Prandej dy konstante janë të pavarura nga kahja. Ka ngelë konstanta ε e cila nuk mund të ketë karakter skalari.

E dijmë se konstantja dielektrike paraqet një faktor proporcionaliteti në mes të vektorit të induksionit elektrik $\vec{D}$ dhe vektorit të fushës elektrike $\vec{E}$. Në mjedise izotrope këta vektorë kanë të njëjtën kahje por intensitete të ndryshme. Kur të paraqesim një sistem të koordinateve kënddrejta x_1, x_2, x_3 këta vektorë mund t'i zbërthejmë në komponente të veta. Komponentet gjegjëse janë proporcionale dhe për të gjitha paraqitet i njëjti faktor i proporcionalitetit ε. Për mjedise anizotrope kjo nuk vlenë më.

Në mjedise anizotrope komponentet e vektorit $\vec{D}$ duhet të varen nga komponentet e vektorit $\vec{E}$ në një mënyrë. Do të supozojmë se kjo varshmëri shprehet në formë të funksioneve lineare. Se ky supozim është i arsyeshëm do të tregojnë rezultatet që mund të përfitohen nga kjo.

Sipas supozimit tonë, duhet të paraqesim këto formula për lidhje në mes të vektorëve karakteristik për fushë elektrike

$$D_1 = \varepsilon_{11}E_1 + \varepsilon_{12}E_2 + \varepsilon_{13}E_3$$

$$D_3 = \varepsilon_{31}E_1 + \varepsilon_{32}E_2 + \varepsilon_{33}E_3 \qquad (1)$$

$$D_2 = \varepsilon_{21}E_1 + \varepsilon_{22}E_2 + \varepsilon_{23}E_3$$

Edhe në këte rast koeficientët i kemi shënuar me ε por me dy indekse. Indeksi i parë tregon se cilës komponentë të vektorit $\vec{D}$ i përgjigjet ai koeficient, ndërsa i dyti pranë cilës komponentë të vektorit $\vec{E}$ qëndron. Madhësitë e këtyre koeficientëve i shprehin vetitë e mjedisit.

Koeficientët ε_{ik} mund t'i interpretojmë si elemente të një matrice

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \tag{2}$$

E dijmë se komponentet e çdo vektori mund t'i mendojmë si elemente të një matrice me një shtyllë

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

Ndërsa (1) mund ta shkruajmë në formën

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \tag{3}$$

Kemi fituar të njëjtën shprehje sikurse për mjedise izotrope, me ndryshim në karakterin e madhësisë ε. Në mjediset izotrope ε ka karakter skalari, ndërsa në ato anizotrope ka karakter tenzori. Këte tenzor e quajmë tenzor dielektrik.

b) Simetria e tenzorit dielektrik

Do të tregojmë se tenzori dielektrik është tenzor simetrik. Tenzori quhet simetrik nëse

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki} \ (i, k = 1, 2, 3) \tag{4}$$

Për vërtetimin e kësaj vetie fillojmë nga ligji mbi ruajtjen e energjisë. Teorema e Pointingut për izolator mund të shkruhet në formën

$$\frac{d}{dt} \int (w_{el} + w_{mg})\, d\tau = -\oint \vec{N}\, d\vec{S}$$

sepse ndërrimi i energjisë në vëllim të caktuar është i barabartë me fluksin e energjisë nëpër sipërfaqe e cila e mbyllë ate vëllim. Meqë është

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$$

anën e djathtë mundemi ta shndërrojmë në integral vëllimor dhe ta zbërthejmë

$$\oint (\vec{E} \times \vec{H})\, d\vec{S} = \int div\, (\vec{E} \times \vec{H}) d\tau = \int (\vec{H}\, rot\, \vec{E} - \vec{E}\, rot\, \vec{H}) d\tau$$

I shfrytëzojmë ekuacionet e Maksvelit

$$rot\,\vec{H} = \dot{\vec{D}}$$

$$rot\,\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

dhe do të kemi

$$\frac{d}{dt}\left(\int w_{el}\,d\tau + \int w_{mg}\,d\tau\right) = \int \vec{H}\,\dot{\vec{B}}\,d\tau + \int \vec{E}\,\dot{\vec{D}}\,d\tau$$

Meqë

$$w_{mg} = \frac{1}{2}\vec{B}\,\vec{H} = \frac{\mu}{2}H^2$$

fitojmë

$$\frac{d}{dt}w_{mg} = \mu\,\vec{H}\,\dot{\vec{H}} = \vec{H}\,\dot{\vec{B}}$$

Shohim se anëtarët e parë në të dy anët e ekuacionit janë të barabartë, prandaj mbetet

$$\frac{d}{dt}\int w_{el}\,d\tau = \int \vec{E}\,\dot{\vec{D}}\,d\tau$$

I barazojmë funksionet nën integrale dhe shumëzojmë me dt

$$d\,w_{el} = \vec{E}\,\dot{\vec{D}}\,dt = \vec{E}\,d\,\vec{D}$$

Shohim se prodhimi skalarë $\vec{E}\,d\,\vec{D}$ duhet të jetë diferencial i plotë i një funksioni. E shprehim këte prodhim skalarë me ndihmën e komponenteve të vektorëve

$$\vec{E}\,d\,\vec{D} = \sum_{i=1}^{3} E_i\,dD_i$$

dhe nga (1)

$$dD_i = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ik}\,dR_k$$

Pra,

$$\vec{E}\,d\,\vec{D} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ik}\,E_i\,dE_k = \sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{ii}\,E_i\,dE_i + \sum_{i\neq}\sum_{k=1}(\varepsilon_{ik}\,E_i\,dE_k + \varepsilon_{ki}\,E_k\,dE_i)$$

Anëtari i parë paraqet diferencialin e plotë të funksionit

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1} \varepsilon_{ii} E^2_i$$

por, që të jetë edhe anëtari i dytë diferencial i plotë duhet që koeficientët e anëtarëve të jenë të barabartë

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$$

sepse atëherë

$$d\, w_{el} = \frac{1}{2}\sum_{i}\sum_{k} \varepsilon_{ik}\, d\, (E_i\, E_k)$$

Në këte mënyrë kemi treguar se tenzori dielektrik është simetrik.

c) Elipsoidi i Frenelit

E dijmë nga matematika se çdo tenzor simetrik mund ta shoqërojmë me një elipsoid. Do ta kryejmë këte për tenzorin dielektrik.

E kërkojmë vlerën e shprehjes

$$\frac{\vec{D}\vec{E}}{E^2} = \sum_{i=1}^{3} \frac{D_i\, E_i}{E^2}$$

Meqë vlenë

$$D_i = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ik}\, E_k$$

do të kemi

$$\frac{\vec{D}\vec{E}}{E^2} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1} \varepsilon_{ik}\, \frac{E_i\, E_k}{E^2}$$

Herësi $E_i/E = \cos\alpha_i$ parqet kosinusin e këndit që vektori $\vec{E}$ e mbyllë me boshtin x_i. Pra,

$$\frac{\vec{D}\vec{E}}{E^2} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{i=1} \varepsilon_{ik} \cos\alpha_i \cos\alpha_k \tag{5}$$

Do të konstruktojmë një sipërfaqe të atillë që nga një pikë arbitrare do të tërhjekim vektorët e pozitës me gjatësi r të përcaktuar me shprehjen

$$r^2 = \frac{E^2}{E\,D} \tag{6}$$

Fundet e këtyre vektorëve do të qëndrojnë në një sipërfaqe, ekuacionin e së cilës do ta përcaktojmë. Mbarimet e çdo vektori i kanë koordinatet x_1, x_2 dhe x_3 e këto njëkohësisht paraqesin koordinatet e pikës në sipërfaqe të kërkuar. Pasi që konsinusi i kahjes së vektorit të pozitës $\cos\alpha_i = x_i/r$ me ndihmën e (5) dhe (6) fitojmë

$$\frac{1}{r^2} = \sum_{i=1}\sum_{k=1} \varepsilon_{ik} \frac{x_i\,x_k}{r^2}$$

ose në formë të zbërthyar

$$\varepsilon_{11}x^2_1 + \varepsilon_{22}x^2_2 + \varepsilon_{33}x^2_3 + 2\varepsilon_{12}x_1x_2 + 2\varepsilon_{23}x_2x_3 + 2\varepsilon_{31}x_3x_1 = 1 \tag{7}$$

Kuptojmë se ky është ekuacion i sipërfaqes së rendit të dytë. Pasi që nuk ka pika pambarim të larguara, paraqet elipsoid. Ky elipsoid i shoqëruar me tenzorin e dielektrikut quhet elipsoid i Frenelit.

E dijmë gjithashtu nga gjeometria se elipsoidi e ka formën më të thjeshtë nëse boshtet e sistemit të koordinateve përputhen me boshtet e elipsoidit. Prandaj edhe këtu sikurse në rastet e ngjajshme më parë do të rrotullojmë sistemin e koordinateve për deri sa të mos përputhen me boshtet e elipsoidit. Nëse koordinatet e reja i shënojmë me X_1, X_2 dhe X_3, atëherë ekuacioni i elipsoidit në formë boshtore do të jetë

$$\varepsilon_1 X^2_1 + \varepsilon_2 X^2_2 + \varepsilon_3 X^2_3 = 1 \tag{8}$$

ndërsa tenzori dielektrik i ka elementet

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \tag{9}$$

pra e ka formën e matricës diagonale. Këto komponente të tenzorit quhen komponente kryesore të tenzorit dielektrik. Në këte sistem të koordinateve lidhja në mes të vektorit $\vec{D}$ dhe vektorit $\vec{E}$ shprehet në formën

$$\begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_1 E_1 \\ D_2 &= \varepsilon_2 E_2 \\ D_3 &= \varepsilon_3 E_3 \end{aligned} \tag{10}$$

Shifet se vektori $\vec{D}$ është paralel me vektorin $\vec{E}$ vetëm nëse vektori $\vec{E}$ e ka kahjen e njërit prej tri boshteve të elipsoidit të Frenelit. Për çdo kahje tjetër këta dy vektorë e mbyllin një kënd në mes veti.

Për kahje të dhënë të vektorit $\vec{E}$ mund ta gjejmë kahjen e vektorit $\vec{D}$ me një konstrukcion gjeometrik me ndihmën e elipsoidit të Frenelit. Këte konstruksion së pari e paraqiti Puansoni.

Fillojmë nga funksioni, i cili analitikisht e shpreh elipsoidin e Frenelit

$$f = \varepsilon_1 X^2_1 + \varepsilon_2 X^2_2 + \varepsilon_3 X^2_3 - 1$$

E përcaktojmë kahjen e normales në elipsoid. Sipas rregullave gjeometrike kjo kahje përcaktohet me proporcionin

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} : \frac{\partial f}{\partial X_2} : \frac{\partial f}{\partial X_3} = \varepsilon_1 X_1 : \varepsilon_2 X_3 : \varepsilon_3 X_3$$

Kemi vërejtur se vlenë

$$\frac{X_i}{r} = \cos \alpha_i = \frac{E_i}{E}$$

prandej

$$X_1 : X_2 : X_3 = E_1 : E_2 : E_3$$

dhe mund të shkruajmë

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} : \frac{\partial f}{\partial X_2} : \frac{\partial f}{\partial X_3} = \varepsilon_1 E_1 : \varepsilon_2 E_2 : \varepsilon_3 E_3 = D_1 : D_2 : D_3$$

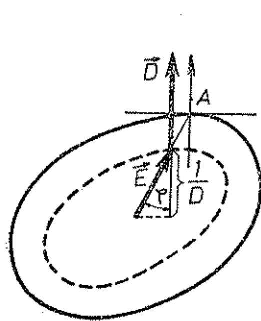


Fig. 112

Shohim se vektori $\vec{D}$ e ka kahjen e normales në elipsoid të Frenelit. Në fig. 112 është vizatuar prerja e elipsoidit. Rreze vektorin e pikës A le ta paraqet vektori i cili e ka kahjen e vektorit $\vec{E}$. E vizatojmë në pikën A normalën në elipsoid. Kjo normale me kahjen e vet e përcakton kahjen e vektorit $\vec{D}$.

Konstruksioni i cekur ofron mundësi të përcaktohet edhe intensiteti i vektorit $\vec{D}$. Sipas (10) mund të shkruajmë

$$E\,D = \varepsilon_1 E^2_1 + \varepsilon_2 E^2_2 + \varepsilon_3 E^2_3$$

Ana e djathtë e kësajë shprehje tregon ekuacionin e elipsoidit i cili është i ngjajshëm me elipsoidin e Frenelit, i cili si rreze i ka gjatësitë e vektorit të fushës elektrike $\vec{E}$. Në ekuacion të elipsoidit ky trinom duhet të jetë i barabartë me një. Pra

$$\vec{E}\,\vec{D} = 1$$

Sipas përkufizimit të prodhimit skalarë është

$$E\,D\cos\varphi = 1$$

ose

$$\frac{1}{D} = E\cos\varphi \tag{11}$$

Përfundojmë se projeksioni i gjatësisë së vektorit $\vec{E}$ është e barabartë me vlerën reciproke të intensitetit të vektorit $\vec{D}$.

Nëse tenzori dielektrik është i njohur, atëherë mund të vizatohet elipsoidi i Frenelit dhe me konstruksionin e përshkruar për çdo kahje të vektorit $\vec{E}$ mund të përcaktojmë vektorin $\vec{D}$.

d) Elipsoidi i indekseve

Për paraqitjen e lidhjes në mes të vektorëve $\vec{D}$ dhe $\vec{E}$ në mjedise anizotrope kemi filluar nga supozimi se komponentet e vektorit $\vec{D}$ janë funksione lineare të komponenteve të vektorit $\vec{E}$. Mund të marrim edhe anasjelltas, që komponentet e vektorit $\vec{E}$ t'i paraqesim si funksione lineare të komponenteve të vektorit $\vec{D}$. Atëherë mund të shkruajmë:

$$\begin{aligned} E_1 &= a_{11} D_1 + a_{12} D_2 + a_{13} D_3 \\ E_2 &= a_{21} D_1 + a_{22} D_2 + a_{23} D_3 \\ E_3 &= a_{31} D_1 + a_{32} D_2 + a_{33} D_3 \end{aligned} \tag{12}$$

E paraqesim tenzorin a

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{13}$$

dhe (12) mund ta shkruajmë në formën

$$\vec{E} = a\,\vec{D} \tag{14}$$

Tenzori a quhet tenzor i indekseve. Tani mund të përsërisim tërë ate çka është cekur për tenzorin e dielektrikut dhe do të fitonim rezultate të ngjajshme. Themi se kjo mënyrë e paraqitjes është duale me ate të cilën e kemi shqyrtuar deri tani. Kuptohet se këto dy mënyrë të paraqitjes mund të lidhen ndërmjet veti. Për përfitimin e kësaj lidhmërie shprehjen (14) e shumëzojmë me matricën reciproke a^{-1}.

$$\vec{D} = a^{-1} \vec{E}$$

Kur këte e krahasojmë me (3) shohim se është

$$\varepsilon = a^{-1} \tag{15}$$

ose

$$a = \varepsilon^{-1}$$

Përfundojmë se tenzori dielektrik dhe i indekseve janë reciprok njëri ndaj tjetrit.

Meqë ε është tenzor simetrik, kësisoji do të jetë edhe tenzori reciprok i tij. Kjo do të thotë se edhe tenzorin e indekseve mund ta lidhim me një elipsoid. E quajmë elipsoid të indekseve. Kur ekuacionin e tij e shndërrojmë në boshtorë do të ketë formën

$$a_1 X^2_1 + a_2 X^2_2 + a_3 X^2_3 = 1$$

Në sistemin e koordinateve boshtore tenzorin e indekseve e shpreh matrica diagonale

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

elementet e të cilit, të cilët ndryshojnë nga zeroja quhen komponente kryesore të tenzorit të indekseve. Në këte sistem të koordinateve lidhmëria (12) do të ketë formën

$$\begin{aligned} E_1 &= a_1 D_1 \\ E_2 &= a_2 D_2 \\ E_2 &= a_3 D_3 \end{aligned} \tag{16}$$

Pasi ta krahasojmë më (10) do të gjejmë

$$a_1 = \frac{1}{\varepsilon_1} \qquad a_2 = \frac{1}{\varepsilon_2} \qquad a_3 = \frac{1}{\varepsilon_3} \tag{17}$$

Gjithashtu me ndihmën e konstruksionit të Puanostit nga elipsoidi i indekseve për vektorin e dhënë $\vec{D}$ mund të përcaktojmë vektorin gjegjës $\vec{E}$.

2. KARAKTERISTIKAT OPTIKE TË SISTEMEVE KRISTALOGRAFIKE

Kristalet i ndajmë në disa sisteme kristalografike. Ndarja kryhet sipas numrit të rrafsheve të simetrisë së kristalit. Do të shqyrtojmë çfarë është tenzori dielektrik për sistemet kristalografike.

Kristalet të cilët fare nuk kanë rrafshe të simetrisë bëjnë pjesë në sistemin triklinik kristalografik. Tenzorin dielektrik e shpreh matrica

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Duke marrë parasysh se ky tenzor është simetrik kuptojmë se matrica përmban gjashtë elemente të ndryshëm. Elipsoidi i Frenelit është plotësisht i përgjithsuar dhe e përcaktojnë gjashtë parametra. Tre prej tyre i përcaktojnë pozitat e boshteve të elipsoidit, ndërsa tre tjerët i përcaktojnë madhësitë e boshteve të tij.

Nëse kristali e ka një rrafsh të simetrisë, atëherë ai bën pjesë në sistemin monoklinik kristalografik. Do të zgjidhim sistemin e koordinateve të atillë që rrafshi i simetrisë të jetë rrafshi $x_1 = 0$. Atëherë nga simetria vlenë $f(-x_1) = f(x_1)$, prandej mundemi E_1 ta zëvendësojmë me $-E_1$ dhe D_1 me $-D_1$ dhe gjatë kësaj asgjë të mos ndërrojë. Ekuacioni

$$D_1 = \varepsilon_{11}E_1 + \varepsilon_{12}E_2 + \varepsilon_{13}E_3$$

për arsye simetrie shndërrohet në

$$-D_1 = -\varepsilon_{11}E_1 + \varepsilon_{12}E_2 + \varepsilon_{13}E_3$$

Pasi t'i mbledhim fitojmë

$$2\varepsilon_{12}E_2 + 2\varepsilon_{13}E_3 = 0$$

Ky ekuacion kënaqet për çdo vektor $\vec{E}$ nëse vlenë

$$\varepsilon_{12} = 0 \text{ dhe } \varepsilon_{13} = 0$$

Matrica e tenzorit dielektrik për kristal monoklinik e ka formën

$$\varepsilon_{13} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{32} \\ 0 & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Shohim se tenzori dielektrik përcaktohet me 4 elemente. Pra, kristalin e përcaktojnë 4 parametra. Këte mund ta shohim edhe nga elipsoidi i Frenelit. E vendosim njërin bosht të tij normal ndaj rrafshit të simetrisë. Atëherë për përcaktimin e pozitës së dy boshteve tjera të tij duhet njohur vetëm një parametër. Përveç kësaj duhet të dijmë edhe gjatësitë e të tri boshteve të tij. Pra, tërësisht 4 të dhëna.

Lidhja në mes të vektorëve $\vec{D}$ dhe $\vec{E}$ në kristalin monoklinik shprehet në formën

$$D_1 = \varepsilon_{11}E_1$$
$$D_2 = \varepsilon_{22}E_2 + \varepsilon_{23}E_3$$
$$D_3 = \varepsilon_{22}E_2 + \varepsilon_{33}E_3$$

Kristalet të cilët i kanë dy rrafshe të simetrisë normale ndërmjet veti bëjnë pjesë në sistemin rombik kristalografik. Përveç rrafshit të simetrisë $x_1 = 0$, në këto ekziston edhe një rrafsh tjetër të themi $x_2 = 0$. Për këte vlenë $f(-x_2) = f(x_2)$, prandej mundemi në vend të komponenteve me indeks 2 të shkruajmë vlerat e tyre negative. Pra,

$$-D_2 = -\varepsilon_{22}E_2 + \varepsilon_{23}E_3$$

Pasi këte ta mbledhim me ekuacionin e dytë të sistemit të mëparshëm fitojmë

$$2\varepsilon_{23}E_3 = 0$$

ose

$$\varepsilon_{23} = 0$$

Prandej tenzori dielektrik për sistemin rombik e ka matricën

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Në te gjenden tri komponente, prandej kristalet e këtij sistemi përcaktohen me tre parametra. Këte e tregon edhe elipsoidi i Frenelit. Pozita e boshteve të tij është e përcaktuar me rrafshet e simetrisë së boshteve, pra tre numra.

Te sistemet e cekura kristalografike elipsoidi i Frenelit është elipsoid treboshtorë me gjatësi të ndryshme të boshteve.

Pastaj ekzistojnë edhe tri sisteme tjera kristalografike: tetragonal, heksagonal dhe romboedrik. Të gjithë këta i kanë nga dy rrafshe të simetrisë, por gjatësitë e tyre janë të barabarta. Kjo ka për rrjedhim se nga tre elementet e tenzorit dielektrik dy janë të barabartë ndërmjet veti. Pra,

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Këto kristale përcaktohen vetëm me dy parametra. Elipsoidi i Frenelit për këto kristale është elipsoid rrotullues prandej e përcaktojnë vetëm dy parametra: gjatësia e boshtit të rrotullimit dhe boshtit normal ndaj tij.

Ekziston edhe sistemi teseral kristalografik. Ky sistem i ka tri boshte normale kristalografike, të atillë që të tre elementet e tenzorit dielektrik janë të barabartë. Tenzori shndërrohet në skalarë dhe drita nëpër kristale të sistemit tesaral kalon sikurse nëpër trupa amorf. Elipsoidi i Frenelit për këte sistem redukohet në formë sfere.

3. VALËT E RRAFSHTA ELEKTROMAGNETIKE NË KRISTALE

a) Lidhmëria në mes të vektorit $\vec{D}$ dhe $\vec{E}$

Për fushë elektromagnetike në mjedise anizotrope vlejnë ekuacionet e Maksvelit

$$rot\,\vec{H} = \dot{\vec{D}}$$
$$rot\,\vec{E} = -\mu_o\,\dot{\vec{H}} \qquad (1)$$
$$div\,\vec{D} = 0$$
$$div\,\vec{H} = 0$$

Që të eliminojmë vektorin magnetik e derivojmë sipas kohë ekuacionin e parë

$$\ddot{\vec{D}} = rot\,\dot{\vec{H}}$$

dhe e zëvendësojmë në të dytin

$$\ddot{\vec{H}} = -\frac{1}{\mu_o}\,rot\,\vec{E}$$

dhe fitojmë

$$\ddot{\vec{D}} = -\frac{1}{\mu_o}\,rot\,rot\,\vec{E} \qquad (2)$$

Kësisoji e kemi fituar ekuacionin diferencial i cili përmban vetëm vektorët karakteristik për fushë elektrike.

Supozojmë se nëpër kristal përhapet vala e rrafsht me frekuencë ω në kahje të përcaktuar me vektorin unitarë të normales n në sipërfaqe të fazëve të njëjta. Vektorët e fushës për këte valë mund t'i shprehim në formën

$$\vec{E} = \vec{E}_o\,e^{i\Phi}$$
$$\vec{D} = \vec{D}_o\,e^{i\Phi} \qquad (3)$$
$$\vec{H} = \vec{H}_o\,e^{i\Phi}$$

ku me Φ e kemi shënuar fazën e lëkundjes

$$\Phi = \omega\left(\frac{\vec{r}\,\vec{n}}{v} - t\right) \qquad (4)$$

Sipas (3) është

$$\ddot{\vec{D}} = -\vec{D}_o e^{i\Phi} \ddot{\Phi} = -\omega^2 \vec{D} \quad (5)$$

Pastaj kemi

$$rot\,\vec{E} = rot\,\vec{E}_o e^{i\Phi} = grad\, e^{i\Phi} \times \vec{E}_o =$$

$$= i\, grad\Phi \times \vec{E}_o e^{i\Phi} = -i \frac{\omega}{v}\, grad\,(\vec{r}\,\vec{n}) \times \vec{E}$$

dhe përfundimisht

$$rot\,\vec{E} = -i \frac{\omega}{v}\, \vec{n} \times \vec{E} \quad (6)$$

Sipas kësaj shprehje mund të gjejmë edhe rotorin e dyfishtë

$$rot\,(rot\,\vec{E}) = -i \frac{\omega}{v}\, \vec{n} \times (rot\,\vec{E})$$

dhe nga (6)

$$rot\,rot\,\vec{E} = -\frac{\omega^2}{v^2}\, \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}) \quad (7)$$

E zëvendësojmë (5) dhe (7) në (2)

$$\vec{D} = -\frac{1}{\mu_o v^2} [\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E})]$$

E zbërthejmë prodhimin e dyfisht vektorial

$$\vec{D} = \frac{1}{\mu_o v^2} [\vec{E} - \vec{n}\,(\vec{n}\,\vec{E})] \quad (8)$$

Kjo është shprehja e kërkuar për lidhmëri të vektorëve $\vec{D}$ dhe $\vec{E}$ në valën e rrafshtë elektromagnetike e cila përhapet nëpër kristal. Shohim se vektori $\vec{D}$ qëndron në rrafsh të përcaktuar me vektorët $\vec{n}$ dhe $\vec{E}$.

E shënojmë me φ këndin të cilin e mbyllin vektorët $\vec{E}$ dhe $\vec{D}$. Do të kemi

$$\cos\varphi = \frac{\vec{D}\,\vec{E}}{D\,E} \quad (9)$$

Ky kënd do të na nevojitet në njehsimet e mëvonshme.

b) Pozita e vektorëve tjerë

Nga shprehja (3)

$$div\,\vec{D} = 0$$

fitomë

$$div\,\vec{D}_o\,e^{i\Phi} = \vec{D}_o\,grad\,e^{i\Phi} = \vec{D}_o\,e^{i\Phi}\cdot grad\,(i\Phi) =$$

$$= i\,\frac{\omega}{v}\,\vec{D}\,\vec{n} = 0$$

prej nga kuptojmë se vektori $\vec{D}$ është normal ndaj $\vec{n}$,

$$\vec{D}\,\vec{n} = 0$$

Në mënyrë të ngjajshme nga shprehja

$$div\,\vec{H} = 0$$

rrjedh

$$\vec{H}\,\vec{n} = 0$$

që tregon se edhe vektori $\vec{H}$ qëndron normal ndaj vektorit $\vec{n}$. E përcaktojmë pozitën e vektorit $\vec{H}$. Për këte fillojmë nga ekuacioni

$$\mu_o\,\dot{\vec{H}} = rot\,\vec{E}$$

Pasi që

$$\dot{\vec{H}} = -\,i\omega\,\vec{H}$$

dhe me ndihmën e (6)

$$i\omega\,\mu_o\,\vec{H} = -\,i\,\frac{\omega}{v}\,\vec{n}\times\vec{E}$$

ose

$$\vec{H} = -\,\frac{1}{\mu_o v}\,\vec{n}\times\vec{E} \qquad (10)$$

Shprehja e fundit tregon se vektori $\vec{H}$ qëndron normal në rrafshin e përcaktuar me vektorët $\vec{n}$ dhe $\vec{E}$. Meqë sipas (8) vektori $\vec{D}$ qëndron në rrafshin $\vec{n}\,\vec{E}$, vektori $\vec{H}$ është normal edhe ndaj $\vec{D}$.

Në fig. 113 janë vizatuar vektorët në një pikë A të fushës. Vektorët $\vec{n}$, $\vec{D}$ dhe $\vec{E}$ qëndrojnë në rrafshin σ ndërsa vektori $\vec{H}$ është normal ndaj këtij dhe me vektorin $\vec{D}$ e përcaktojnë rrafshin π_1. Ky është rrafshi i fazëve të njëjta të valës së shqyrtuar. Pas një kohe të shkurtër ky rrafsh do të gjendet në pozitën π_2. Kahja e zhvendosjes është kahja e normales $\vec{n}$. Pika A do të gjendet në pikën B. Largësia në mes të këtyre pikave është vt, ku v është shpejtësia e përhapjes së rrafshit të fazëve të njëjta. Meqë kjo shpejtësi ka kahjen e normales, kjo quhet shpejtësi normale.

Fig. 113

Vektori i Pointingut, vektori i dendësisë së rrymimit të energjisë

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$$

qëndron normal në vektorët $\vec{E}$ dhe $\vec{H}$. Pasi që është normal në $\vec{H}$, ky qëndron në rrafshin σ dhe meqë është normal edhe ndaj $\vec{E}$ ky vektor me kahjen e normales e mbyllë këndin φ. Shihet se te valët në mjedise anizotrope energjia e rrezatimit nuk përhapet normal ndaj rrafshit të fazëve të njëjta, por pjerrtas. Për kohën e shkurtër vala e bartë energjinë nga pika A në pikën C e cila gjithashtu qëndron në rrafshin π_2. Kahja e përcaktuar me vektorin unitarë $\vec{s}$, në të cilën përhapet energjia quhet kahje e rrezatimit apo kahje radiale. Shpejtësia me të cilën bartet energjia do ta shënojmë me u dhe do ta quajmë shpejtësi radiale ose shpejtësi të rrezes. Nga vizatimi shohim se

$$\overline{AB} = \overline{AC} \cos\varphi$$

ose

$$v = u \cos\varphi \qquad (11)$$

Kjo formulë shpreh lidhmërinë në mes të shpejtësive normale dhe radiale.

c) Shprehja për lidhmëri të vektorit $\vec{E}$ dhe vektorit $\vec{D}$

Formula (8) shpreh varshmërinë e vektorit $\vec{D}$ nga vektori $\vec{E}$. Këte varshmëri e kemi paraqitur që në fillim gjatë përfitimit të shprehjes (XVII.1.1). Por, kemi cekur në fillim, se optika e kristaleve mund të

shqyrtohet edhe duke filluar nga varshmëria e vektorit $\vec{D}$ prej vektorit $\vec{E}$ sikurse kemi vepruar në shprehjet (XVII.1.12). Kësisoji fitojmë shprehjet duale të optikës së kristaleve.

Fillojmë nga shprehja (8)

$$\mu_0 v^2 \vec{D} = \vec{E} - \vec{n}\,(\vec{n}\,\vec{E})$$

Në vend të shpejtësisë normale e paraqesim ate radiale sipas (11). Pastaj e shumëzojmë në mënyrë skalare me vektorin unitarë të kahjes së radiales $\vec{s}$. Fitojmë

$$\mu_0 u^2 \cos^2\varphi\,(\vec{s}\,\vec{D}) = -\,(\vec{s}\,\vec{n}\,)\,(\vec{s}\,\vec{E})$$

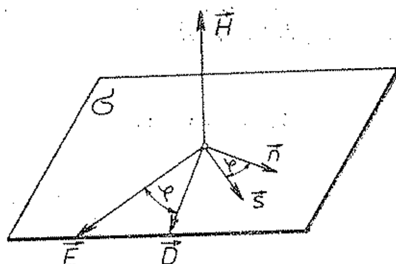


Fig. 114

Këtu e kemi marrë në konsiderim se $\vec{s}$ dhe $\vec{E}$ janë normal ndërmjet veti, ashtu që $\vec{s}\cdot\vec{E} = 0$. Vektorët $\vec{s}$ dhe $\vec{n}$ e mbyllin të njëjtin kënd φ të cilin e mbyllin vektorët $\vec{E}$ dhe $\vec{D}$. Prandej vlenë

$$\vec{s}\cdot\vec{n} = \cos\varphi$$

dhe

$$\vec{n}\,\vec{E} = -\,\mu_0 u^2 \cos\varphi\,(\vec{s}\,\vec{D}) \qquad (12)$$

Do t'i vizatojmë edhe njëherë vektorët në pikën A të paraqitur në fig. 114. Në rrafshin σ gjenden vektorët $\vec{D}$ dhe $\vec{E}$ dhe normal ndaj tyre vektorët $\vec{n}$ dhe $\vec{s}$. Normal ndaj rrafshit σ qëndron vektori $\vec{H}$. E përcaktojmë kahjen e prodhimit të dyfisht vektorial

$$\vec{s}\times(\vec{D}\times\vec{s})$$

Prodhimi $\vec{D}\times\vec{s}$ e ka kahjen e vektorit $\vec{H}$. Kur këte e shumëzojmë edhe njëherë me $\vec{s}$ fitojmë vektorin i cili qëndron në rrafshin σ dhe është normal ndaj $\vec{s}$. Ky vektor e ka kahjen e vektorit $\vec{E}$ dhe nga ky mund të ndryshojë vetëm për nga intensiteti. Prandej mund të shkruajmë

$$\vec{E} = \alpha\,[\vec{s}\times(\vec{D}\times\vec{s})]$$

Ka ngelë të përcaktojmë konstanten skalare α. E zhvillojmë prodhimin e dyfisht vektorial

$$\vec{E} = \alpha\,[\vec{D} - \vec{s}\,(\vec{D}\,\vec{s})] \tag{13}$$

dhe e shumëzojmë në mënyrë skalare me n

$$\vec{n}\,\vec{E} = -\,\alpha\,(\vec{n}\,\vec{s})\ \ (\vec{D}\,\vec{s}) = -\,\alpha\cos\varphi\,(\vec{D}\,\vec{s}) \tag{14}$$

Kësisoji prodhimin $\vec{n}\,\vec{E}$ e kemi shprehur në mënyrë tjetër. I krahasojmë shprehjet (14) dhe (12) dhe për α gjejmë vlerën

$$\alpha = \mu_0 u^2$$

kurse (13) do të ketë formën

$$\vec{E} = \mu_0 u^2\,[\vec{D} - \vec{s}\,(\vec{D}\,\vec{s})] \tag{15}$$

Kjo është shprehja e kërkuar për varshmëri të vektorit $\vec{E}$ prej $\vec{D}$.

Duke i krahasuar shprehjet duale (8) dhe (14) shohim se ato janë njësoj të ndërtuara, vetëm se në to figurojnë madhësi tjera. Kështu në vend të vektorit $\vec{D}$ në (8) qëndron vektori $\vec{E}$ në (14), që do të thotë se $\vec{D}$ dhe $\vec{E}$ janë vektorë dual. Pastaj shohim se në vend të $\vec{n}$ në shprehjen duale qëndron kahja e $\vec{s}$. Përveç kësaj, shohim se shpejtësinë v në (8) e zëvendëson madhësia $1/u$ në (14).

Përfundojmë se optikën e kristaleve mund ta trajtojmë në dy mënyrë plotësisht të ngjajshme. Mundësia e parë qëndron në përcaktimin e kahjes së normales. Atëherë nga vektori i njohur $\vec{E}$ me ndihmën e (8) e përcaktojmë vektorin $\vec{D}$ dhe vektorët tjerë. Në këte trajtim kuptim themelorë ka shpejtësia normale v.

Mundësia tjetër qëndron në paraqitjen e kahjes së energjisë së valës dhe vektorit $\vec{D}$. Atëherë me ndihmën e (14) e përcaktojmë vektorin $\vec{E}$ dhe vektorët tjerë. Shpejtësia karakteristike e kësaj mënyre të shqyrtimit është shpejtësia radiale.

Përveç kësajë shihet se çdo shprehjet menjëherë mund ta shndërrojmë në shprehje duale, nëse i zëvendësojmë vektorët gjegjës, vetëm se në këte rast njërën shpejtësi duhet zëvendësuar me vlerën reciproke të shpejtësisë tjetër.

Ka ngelur të shpjegojmë pozitën e faktorit μ_0. E dijmë se, sipas përkufizimit $v^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu_0}$, prandej $\mu_0 v^2 = \frac{1}{\varepsilon}$. Kemi diktuar se formalisht mund të shkruajmë $\varepsilon = n^2$, ku n është indeksi i thyerjes. Prandej në

shprehjen (8) përpara kllapës paraqitet n^2. Në mënyrë të ngjajshme mund ta përkufizojmë indeksin radial të thyerjes $\mu_o u^2 = \frac{1}{n^2_z}$. Atëherë përpara kllapës në shprehjen (14) qëndron faktori

$$\frac{1}{n^2_z}$$

Përfundojmë se edhe indekset normale dhe radiale paraqiten në shprehje në mënyrë reciproke sikurse edhe shpejtësitë. Tani është e qartë pse në (8) dhe (14) μ_o ka pozitë reciproke.

4. SHPEJTËSIA NORMALE E DRITËS NË KRISTALE

a) Formula e Frenelit

Do të përcaktojmë shpejtësinë normale të valës së rrafshit të dritës në kristal për kahje të dhënë të normales.

Fillojmë nga (8)

$$\mu_o^2 v^2 \vec{D} = \vec{E} - \vec{n}\,(\vec{n}\,\vec{E})$$

Supozojmë se sistemi i koordinateve është vendosur në kahje të boshteve kryesore të kristalit. Në këte rast lidhja në mes të vektorëve $\vec{D}$ dhe $\vec{E}$ mund të shkruhet në formën

$$D_i = \varepsilon_i E_i \qquad i = 1, 2, 3$$

E shkruajmë shprehjen për komponente të vektorëve

$$E_i - \mu_o v^2 D_i = n_i\,(\vec{n}\,\vec{E})$$

E pjesëtojmë me μ_o dhe në anëtarin e parë në vend të E_i shkruajmë D_i/ε_i. Fitojmë

$$\frac{D_i}{\mu_o \varepsilon_i} - v^2 D_i = \frac{n_i}{\mu_o}(\vec{n}\,\vec{E})$$

Koeficienti i anëtarit të parë

$$\frac{1}{\mu_o \varepsilon_i} = v^2_i \tag{1}$$

paraqet katrorin e shpejtësisë e cila i përgjigjet njërës prej vlerave kryesore të konstantes dielektrike ε_i. Pra, tri vlerat kryesore të konstantes dielektrike i përcaktojnë tri shpejtësi normale. Do t'i quajmë shpejtësi kryesore v_i të kristalit.

Shprehja tani e ka formën

$$D_i\,(v^2_i - v^2) = \frac{n_i}{\mu_o}(\vec{n}\,\vec{E})$$

Do t'i shënojmë me α_i këndet të cilët i mbyllin kahja e normales me boshtet e koordinateve. Atëherë vektori unitarë $\vec{n}$ i ka komponentet $\cos\alpha_i$. Do të kemi

$$D_i = \frac{(\vec{n}\,\vec{E})}{\mu_o}\;\frac{\cos\alpha_i}{v^2_i - v^2} \tag{2}$$

E dijmë se vektori $\vec{D}$ qëndron normal ndaj $\vec{n}$, prandej $\vec{n}\,\vec{D} = 0$. E shkruajmë këte me ndihmën e komponenteve

$$\sum_{i=1}^{3} n_i\,D_i = 0$$

ose

$$\sum_{i=1}^{3} D_i \cos\alpha_i = 0$$

E zëvendësojmë në shprehje të fundit vlerën e (2) dhe fitojmë

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\cos^2\alpha_i}{v^2_i - v^2} = 0 \tag{3}$$

ose në formë të zbërthyer

$$\frac{\cos^2\alpha_1}{v^2_1 - v^2} + \frac{\cos^2\alpha_2}{v^2_2 - v^2} + \frac{\cos^2\alpha_3}{v^2_3 - v^2} = 0 \tag{4}$$

Kjo është formula e Frenelit për përcaktimin e shpejtësisë normale në kristale.

Nëse i dijmë vetitë e kristalit, atëherë i dijmë edhe vlerat kryesore të tenzorit dielektrik ε_i. Me ndihmën e (1) përcaktohen shpejtësitë kryesore normale v_i. Nëse edhe kahja e normales shprehet me këndet α_i atëherë në (4) si e vetme e panjohur mbetet shpejtësia normale v në ate kahje.

I eliminojmë nga shprehja (4) emëruesët

$$(v^2_2 - v^2)\,(v^2_3 - v^2)\cos^2\alpha_1 + (v^2_3 - v^2)\,(v^2_1 - v^2)\cos^2\alpha_2 + (v^2_1 - v^2)\,(v^2_2 - v^2)$$
$$\cos^2\alpha_3 - 0 \tag{5}$$

Ky është ekuacion i shkallës së katërt sipas v, prandej i ka katër zgjidhje, prej të cilave dy ndryshojnë vetëm për nga parashenji. Do të thotë se për kahje të dhënë i kemi dy zgjidhje të ndryeshme. Pra, në çdo kahje nëpër kristal përhapen dy valë me shpejtësi të ndryeshme. Kur vala e rrafshtë e dritës hyn në kristal, ajo coptohet në dy pjesë të cilat nëpër kristal përhapen me shpejtësi të ndryeshme. Zakonisht thuhet se në kristal drita thehet dyfish.

Të marrim në veçanti kahjen e boshtit x_1. Për këte kahje duhet të vlejë

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{\pi}{2}$$

dhe ekuacioni (5 do të ketë formën

$$(v^2_2 - v^2)\ (v^2_3 - v^2) = 0$$

Zgjidhjet e të cilit janë

$$v = v_2 \quad \text{dhe} \quad v = v_3$$

Shohim se në kahje të boshtit x_1 përhapen valët e dritës me shpejtësitë kryesore v_2 dhe v_3. Në mënyrë të ngjajshme për kahje të boshtit x_2 fitojmë përhapjen e valëve me shpejtësi v_1 dhe v_3, ndërsa për kahje të boshtit x_3 përhapjen me shpejtësi v_1 dhe v_2. Kësisoji njëkohësisht e kemi përcaktuar kuptimin fizik të shpejtësive kryesore normale në kristal.

b) Polarizimi i valëve të dritës në kristal

Nëpër kristal për kahje të dhënë të normales përhapen dy valë. Duhet përcaktuar pozitën e vektorit $\vec{D}$ në çdo njërën prej tyre. E kryejmë me ndihmën e elipsoidit të indekseve, rreze vektorët e të cilit e kanë kahjen e vektorit $\vec{D}$. Këte elipsoid e tregon fig. 115, ekuacioni i të cilit është

$$a_{11}x^2_1 + a_{22}x^2_2 + a_{33}x^2_3 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 = 1 \qquad (6)$$

E vendosim boshtin x_3 në kahje të normales së valës $\vec{n}$. E dijmë se vektori $\vec{D}$ qëndron normal ndaj $\vec{n}$, prandej duhet të qëndrojë në rrafshin $x_3 = 0$. Ndërsa, ekuacioni i elipsës së formuar me prerjen e këtij rrafshi me elipsoid është

$$a_{11}x^2_1 + a_{22}x^2_2 + 2a_{12}x_1x_2 = 1 \qquad (7)$$

Vektori E e ka kahjen e normales në elipsoid të indekseve. Kosinuset e kahjes së kësaj normale përcaktohen me

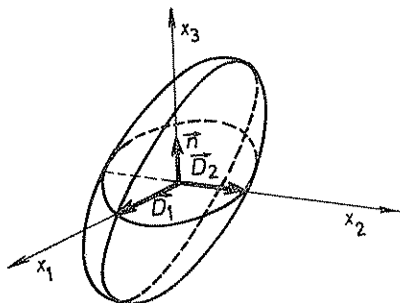


Fig. 115

$$\cos\nu_1 : \cos\nu_2 : \cos\nu_3 = \frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial x_2} : \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

E dijmë se vektori $\vec{E}$ duhet të qëndrojë në rrafshin e përcaktuar nga vektorët $\vec{D}$ dhe $\vec{n}$, prandej duhet të kërkojmë në elipsën e prerjes ato pika për të cilat normalja qëndron në rrafshin e përcaktuar me rrezen e elipsës dhe boshtin x_3. Supozojmë se e kemi gjetur një pikë të këtillë dhe në kahje të sajë e kemi vendosur boshtin x_1 të koordinateve. Atëherë vektori $\vec{E}$ qëndron në rrafshin x_1x_3 dhe vlenë

$$\cos\nu_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

Nga (7) kemi

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = a_{22}\, x_2 + a_{12}\, x_1 = 0$$

dhe për $x_2 = 0$, fitojmë $a_{12} = 0$

Për këte rast ekuacioni i elipsës së prerjes redukohet në formën

$$a_{11}x^2{}_1 + a_{22}x^2{}_2 = 1$$

dhe paraqet formën boshtore të saj. Pra, boshti x_1 i sistemit të koordinateve njëkohësisht është edhe njëri bosht i elipsës. Ky bosht paraqet vektorin $\vec{D}_1$ të njërës prej dy valëve të cilat përhapen në kahje të normales së dhënë. Kuptohet se kahja tjetër e mundshme e vektorit të induksionit $\vec{D}_2$ përputhet me kahjen e boshtit tjetër të elipsës.

Këtu kemi treguar rregullën për përcaktimin e kahjeve të vektorëve të induksionit elektrik. Sipas saj, elipsoidin e indekseve duhet prerë nëpër qendër me rrafsh normal ndaj kahjes së përhapjes së valëve, përkatësisht kahjes së normales. Si prerje fitohet elipsa dhe kahjet e boshteve të saj paraqesin kahjet e vektorëve të induksionit për të dy valët të cilat përhapen në kahje të $\vec{n}$.

Meqë kahjet e boshteve të elipsës janë normale njëra ndaj tjetrës, kuptojmë se valët të cilat përhapen në kahje të n i kanë vektorët e induksionit normal ndërmjet veti. Elipsoidi i indekseve me pozitën e vet është i fiksuar në kristal, prandej në të gjitha pikat e kristalit këto valë e kanë të njëjtën kahje të vektorit $\vec{D}$.

Nëse kahjen e vektorit $\vec{D}$ në kristal e mendojmë se është karakteristike për lëkundjen e dritës, mund të përfundojmë se valët e dritës në kristale gjithmonë janë të polarizuara në mënyrë lineare. Në çdo kahje përhapen dy valë dhe kahjet e lëkundjeve të tyre në mes veti janë normale.

5. SHPEJTËSIA RADIALE NË KRISTALE

Le të jetë kahja e valës së dritës e dhënë me kahjen e rrezatimit, pra me kahjen e vektorit $\vec{s}$. Duhet përcaktuar shpejtësinë e energjisë të cilën e bartë vala e dritës, me fjalë tjera duhet të përcaktojmë shpejtësinë e saj radiale.

Fillojmë nga shprehja (XVII.3.15)

$$\vec{E} = \mu_o u^2 [\vec{D} - \vec{s}(\vec{D}\vec{s})]$$

I shkruajmë komponentet e saj

$$\frac{E_i}{u^2} = \mu_o D_i - \mu_o s_i (\vec{D}\vec{s}) \qquad i = 1, 2, 3$$

Le të jetë vektori $\vec{s}$ i përcaktuar me këndet β_i të cilët i mbyllë me boshtet e koordinateve. Atëherë për komponente të tij kemi

$$s_i = \cos\beta_i$$

Nga

$$D_i = \varepsilon_i E_i$$

kemi

$$\mu_o \varepsilon_i E_i - \frac{E_i}{u^2} = \mu_o (\vec{D}\vec{s}) \cos\beta_i$$

Prodhimi

$$\mu_o \varepsilon_i = \frac{1}{u^2_i} \tag{1}$$

paraqet vlerën reciproke të katrorit të një shpejtësie. E quajmë shpejtësi kryesore radiale. Nëse i krahasojmë shprehjet (1) dhe (XVII.4.1) shohim se shpejtësitë kryesore radiale janë të barabarta me shpejtësitë kryesore normale. Për ruajtje të ngjajshmërisë duale këtu do t'i shkruajmë shpejtësitë radiale u_i. E zëvendësojmë (1) në shprehjen e mëparshme dhe do të fitojmë

$$E_i \left(\frac{1}{u^2_i} - \frac{1}{u^2} \right) \mu_o (\vec{D}\vec{s}) \cos\beta_i \tag{2}$$

ose

$$E_i = \mu_o (\vec{D}\vec{s}) \frac{\cos\beta_i}{\frac{1}{u^2_i} - \frac{1}{u^2}}$$

E marrim në konsiderim se vektorët $\vec{E}$ dhe $\vec{s}$ janë normal ndërmjet veti, prandej prodhimi

$$\vec{E}\,\vec{s} = 0$$

dhe me ndihmën e komponenteve

$$\sum_{i=1}^{3} E_i\, s_i = \sum_{i=1}^{3} E_i \cos\beta_i$$

E zëvendësojmë vlerën e E_i nga (2)

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\cos^2 \beta_i}{\frac{1}{u^2_i} - \frac{1}{u^2}} = 0 \tag{3}$$

ose në mënyrë të zbërthyer

$$\frac{u^2_1 \cos^2\beta_1}{u^2 - u^2_1} + \frac{u^2_2 \cos^2\beta_2}{u^2 - u^2_2} + \frac{u^2_3 \cos^2\beta_3}{u^2 - u^2_3} = 0 \tag{4}$$

Kjo është formula për përcaktimin e shpejtësisë radiale të dritës në kristale. Shohim se në çdo kahje prap fitojmë nga dy zgjidhje. Në çdo kahje në kristal përhapen nga dy valë.

Kahjet e vektorëve elektrik në këto valë mund t'i përcaktojmë me ndihmën e elipsoidit të Frenelit. Fitojmë rezultat dual me ate të cilin e kemi përfituar për shpejtësi normale. Përfundojmë në bazë të rezultateve të mëparshme se vektorët $\vec{E}$ i kanë kahjet e boshteve të elipsës e cila fitohet si prerje e elipsoidit të Frenelit me rrafshin normal ndaj kahjes së rrezes $\vec{s}$.

6. BOSHTET OPTIKE TË KRISTALEVE

Kuptuam më parë se për çdo kahje të dhënë të normales së valës së rrafsht të dritës në kristale ekzistojnë dy valë të cilat përhapen me shpejtësi të ndryshme. Do t'i shënojmë këto shpejtësi me v_{I} dhe v_{II}. Paraqesim pyetjen: a ekziston ndonjë kahje në kristal për të cilën vlenë kondita

$$v_{\mathrm{I}} = v_{\mathrm{II}}$$

dhe nëse ekzistojnë, cilat janë këto kahje?

Shpejtësinë normale e gjejmë si zgjidhje të ekuacionit (XVII. 4.5). Që të njihemi me pozitat e këtyre zgjidhjeve do të hulumtojmë funksionin

$$f(v) = (v^2_2 - v^2)(v^2_3 - v^2)\cos^2\alpha_1 + (v^2_1 - v^2)(v^2_3 - v^2)\cos^2\alpha_2 +$$
$$+ (v^2_1 - v^2)(v^2_2 - v^2)\cos^2\alpha_3 \qquad (1)$$

Vlenë të ceket se shpejtësitë kryesore do t'i shënojmë të renditura sipas madhësisë, ashtu që

$$v_1 \geqq v_2 \geqq v_3 \qquad (2)$$

Do të përcaktojmë parashenjën e funksionit $f(v)$ për vlera të veçanta të v_1, v_2 dhe v_3.

$$f(v_1) = (v^2_2 - v^2_1)(v^2_3 - v^2_1)\cos^2\alpha_1 > 0$$
$$f(v_2) = (v^2_1 - v^2_2)(v^2_3 - v^2_2)\cos^2\alpha_2 < 0$$
$$f(v_3) = (v^2_1 - v^2_3)(v^2_2 - v^2_3)\cos^2\alpha_3 > 0$$

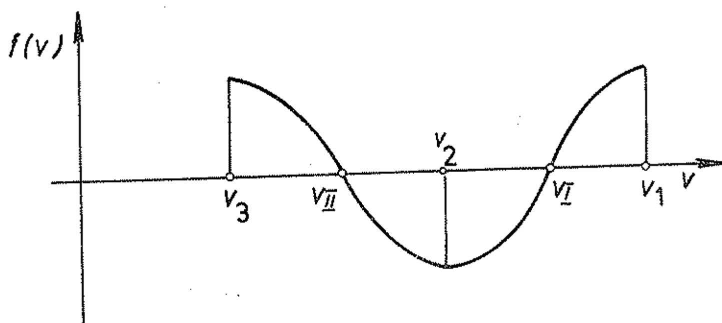


Fig. 116

Nga pakëputshmëria e këtij funksioni zerot e tij duhet të gjenden: fig. 116. Vlerat e shpejtësisë si zgjidhje të ekuacionit (XVII.4.5) janë zerot e funksionit (1).

Nga pakputshmëria e këtij funksioni zerot e tij duhet të gjenden: njëra në mes të v_1 dhe v_2, ndërsa tjetra në mes të v_2 dhe v_3. Pra,

$$v_1 \geqq v_{\mathrm{I}} \geqq v_2 \geqq v_{\mathrm{II}} \geqq v_3$$

Që të kënaqet kondita $v_{\mathrm{I}} = v_{\mathrm{II}}$, të dy zgjidhjet duhet të jenë të barabarta me v_2. *Pra,*

$$v_{\mathrm{I}} = v_{\mathrm{II}} = v_2$$

Në këte rast ekuacioni (XVII.4.5) redukohet në

$$(v^2_3 - v^2_2)(v^2_1 - v^2_2)\cos^2\alpha_2 = 0$$

ose

$$\cos\alpha_2 = 0$$

prej nga

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$$

Kahjet për të cilat shpejtësitë normale janë të barabarta qëndrojnë në rrafshin $x_1\, x_3$.

E zëvendësojmë vlerën e shpejtësisë $v = v_2$ dhe këndit $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ në ekuacionin (XVII.4.4)

$$\frac{\cos^2\alpha_1}{v^2_1 - v^2_2} + \frac{\cos^2\alpha_3}{v^2_3 - v^2_2} \quad 0 =$$

E shënojmë me δ këndin të cilin e mbyllë kahja e kërkuar me boshtin x_3, atëherë $\alpha_3 = \delta$ dhe $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \delta$. Do të kemi

$$\frac{\sin^2\delta}{v^2_1 - v^2_2} + \frac{\cos^2\delta}{v^2_3 - v^2_2} = 0$$

ose

$$\operatorname{tg}\delta = \pm \sqrt{\frac{v^2_1 - v^2_2}{v^2_2 - v^2_3}} \qquad (3)$$

Shihet se ekzistojnë dy kahje për të cilat shpejtësitë normale janë të barabarta. Këto kahje quhen boshte optike të kristalit ose binormalet e tij. Këto qëndrojnë në rrafshin $x_1\, x_3$ dhe me boshtin x_3 mbyllin këndin $\pm\, \delta$ të përcaktuar me shprehjen (3).

Kur drita përhapet nëpër kristal në kahje të boshtit optik, atëherë ekziston vetëm një valë. Kjo valë nuk është e polarizuar. Boshti optik i përgjigjet asaj kahje të elipsoidit të indekseve për të cilën lakorja e prerjes së tij nëpër qendër është rrethore. E dijmë nga gjeometria se çdo elipsoid treboshtorë i ka dy prerje rrethore. Normalet në këto prerje rrethore paraqesin kahjet e boshteve optike. Kemi vërejtur se vektori $\vec{D}$ duhet të ketë kahjen e boshteve të elipsës së prerjes. Meqë në rastin tonë, prerja është rrethore, atëherë ekzistojnë pambarim shumë rreze të njëjta dhe çdo njëra prej tyre mund të mendohet si bosht i rrethit. Prandej vektori $\vec{D}$ mund të ketë çfarëdo kahje të til'ë, për çka vala e dritës nuk është e polarizuar.

Sipas rezultateve të fituara kristali më së shumti mund të ketë vetëm dy boshte optike. Kristalet e tillë quhen dyboshtorë.

Në rast se

$$v_1 = v_2$$

fitojmë

$$\operatorname{tg}\delta = 0$$

dhe të dy boshtet optike përputhen me kahjen e x_3. Nëse është

$$v_2 = v_3$$

atëherë fitojmë

$$\mathrm{tg}\delta \to \infty$$

që do të thotë se të dy boshtet optike përputhen me kahjen e x_1.

Në te rastet e fundit kristali e ka vetëm një bosht optik. Këta quhen kristale njëboshtore. Boshti i tyre optik përputhet me njërin bosht kryesorë të kristalit, pra me njërin bosht kristalografik.

Për kristale njëboshtore elipsoidi i indekseve është rrotullues dhe është e qartë se ekziston vetëm një prerje rrethore nëpër qendër. Kjo prerje qëndron normal ndaj boshtit të rrotullimit të elipsoidit.

Më në fund mund të supozojmë se $v_1 = v_2 = v_3$. Për këte rast këndi δ mbetet e pa përcaktuar dhe çdo drejtim mund ta marrim për bosht optik. Nëpër kristal të këtillë në të gjitha kahjet përhapet vetëm një valë sikurse në mjediset izotrope. Kristali i këtillë në kuptimin optik zotëron njësoj sikurse mjedisi izotrop. Elipsoidi i indekseve shndërrohet në sferë dhe çdo prerje e saj nëpër qendër është rrethore. Të gjitha kahjet veprojnë sikurse boshte optike. Drita në to nuk është e polarizuar.

Kristalet e sistemeve triklinik, monoklinik dhe rombik janë kristale dyboshtore. Kristalet e sistemeve tetragonal, heksagonal dhe romboedrik janë kristale njëboshtore optike. Më në fund kristalet e sistemit teseral veprojnë njësoj sikurse mjediset izotrope.

7. BIRADIALET

Ato kahje në kristale për të cilat të dy shpejtësitë radiale janë të barabarta quhen biradiale.

Pasi që shprehja për shpejtësi radiale (XVII.5.4) është e ngjajshme me shprehjen (XVII.4.5) për shpejtësi normale, mundemi me të njëjtat përfundime si më parë të tregojmë se për rastin e shpejtësive radiale të barabarta ato duhet të jenë

$$u_{\mathrm{I}} = u_{\mathrm{II}} = u_2$$

Nga shprehja

$$(u^2 - u^2_2)(u^2 - u^2_3)\, u^2_1 \cos^2\beta_1 + (u^2 - u^2_1)(u^2 - u^2_3)\, u^2_2 \cos^2\beta_2 +$$
$$+ (u^2 - u^2_1)(u^2 - u^2_2)\, u^2_3 \cos^2\beta_2 = 0$$

për këte rast do të kemi

$$(u^2_2 - u^2_1)(u^2_2 - u^2_3)\, u^2_2 \cos^2\beta_2 = 0$$

ose

$$\cos\beta_2 = 0$$

prej nga përfundojmë se

$$\beta_2 = \frac{\pi}{2}$$

Kuptojmë se edhe biradialet qëndrojnë në rrafshin $x_1 x_3$. Meqë $\beta_2 = \frac{\pi}{2}$, anëtari i dytë i (XVII.5.4) është i barabartë me zero dhe nga $\cos\beta_1 = \sin\beta_3$ do të kemi

$$\frac{u^2_1 \sin^2\beta_3}{u^2_2 - u^2_1} + \frac{u^2_3 \cos^2\beta_3}{u^2_2 - u^2_3} = 0$$

prej nga

$$\operatorname{tg}\beta_3 = \pm\sqrt{\frac{u^2_3}{u^2_1} \; \frac{u^2_2 - u^2_1}{u^2_3 - u^2_2}}$$

Me ndihmën e (XVII.5.1) i paraqesim konstantet kryesore dielektrike

$$u^2_i = \frac{1}{\mu_o \varepsilon_i}$$

dhe fitojmë

$$\operatorname{tg}\beta_3 = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\,\frac{\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}}{\frac{1}{\varepsilon_3} - \frac{1}{\varepsilon_3}}} = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}} \qquad (1)$$

Shihet se kristali i ka dy biradiale, të cilat qëndrojnë në rrafshin $x_1 x_3$ dhe me boshtin x_3 mbyllin kënde simetrike të përcaktuara me shprehjen (1).

Duke i krahasuar shprehjet (XVII.6.3) dhe (1) shohim se biradialet ndryshojnë nga boshtet optike.

Të dy biradialet mund të përputhen nëse $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ose $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$. Atëherë këto do të qëndrojnë në kahjen x_3 gjegjësisht x_1. Të njëjtën gjë e kemi fituar edhe për boshtet e kristalit njëboshtorë. Prandej, kristalet njëboshtore e kanë vetëm një biradialë dhe kjo përputhet me boshtin optik të kristalit.

8. SIPËRFAQET VALORE TË KRISTALIT

a) Ekuacioni i sipërfaqes

Nga një pikë fillestare do t'i tërhjekim shpejtësitë radiale në të gjitha kahjet. Atëherë fundet e vektorëve do të qëndrojnë në një sipërfaqe. E quajmë sipërfaqe valore, ekuacionin e së cilës do ta përcaktojmë.

Le të ketë njëra prej shpejtësive kahje të atillë që me boshte të koordinateve mbyllë këndet β_i $(i = 1, 2, 3)$. Atëherë për komponente të këtij vektori kemi

$$x_i = u \cos \beta_i$$

ose

$$\cos \beta_i = \frac{x_i}{u} \tag{1}$$

Intensiteti i vektorit të shpejtësisë së shqyrtuar është

$$u^2 = x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 \tag{2}$$

Shpejtësia radiale u është zgjidhje e ekuacionit (XVII.5.3)

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\cos^2 \beta_i}{\dfrac{1}{u^2_i} - \dfrac{1}{u^2}} = 0$$

dhe nga (1) fitojmë

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\dfrac{x^2_i}{u^2}}{\dfrac{1}{u^2} - \dfrac{1}{u^2_i}} = 0$$

të cilën mund ta shkruajmë në formën

$$u^2_1 x^2_1 (u^2 - u^2_2)(u^2 - u^2_3) + u^2_2 x^2_2 (u^2 - u^2_1)(u^2 - u^2_3) + \\ + u^2_3 x^2_3 (u^2 - u^2_1)(u^2 - u^2_2) = 0$$

ose

$$u^2_1 u^2_2 u^2_3 (x^2_1 + x^2_2 + x^2_3) - [u^2_1(u^2_2 + u^2_3)x^2_1 + u^2_2(u^2_3 + u^2_1)x^2_2 + \\ + u^2_3(u^2_1 + u^2_2)x^2_3]\, u^2 + (u^2_1 x^2_1 + u^2_2 x^2_2 + u^2_3 x_3^2)u^4 = 0$$

Me ndihmën e (2) mund të thjeshtësojmë me u^2

$$u^2_1 u_2^2 u^2_3 - [u^2_1(u^2_2 + u^2_3)x^2_1 + u^2_2(u^2_3 + u^2_1)x^2_2 + u^2_3(u^2_1 + u^2_2)x^2_3] + \\ + (u^2_1 x^2_1 + u^2_2 x^2_2 + u^2_3 x^2_3)(x^2_1 + x^2_2 + x^2_3) = 0 \tag{3}$$

Ky është ekuacioni i sipërfaqes së valës. Shohim se është sipërfaqe e shkallës së katërt.

b) Forma e sipërfaqes valore

Që të fitojmë formën e kësaj sipërfaqe së pari do të gjejmë prerjen e saj me rrafshin $x_3 = 0$. Ekuacioni i prerjes është

$$u^2_1 u^2_2 u^2_3 - (u^2_1 u^2_2 + u^2_1 u^2_3) x^2_1 - (u^2_1 u^2_2 + u^2_2 u^2_3) x^2_2 +$$
$$+ (u^2_1 x^2_1 + u^2_2 x^2_2)(x^2_1 + x^2_2) = 0$$

E shkruajmë në formën

$$u^2_1 u^2_2 u^2_3 - u^2_1 u^2_2 (x^2_1 + x^2_2) - (u^2_1 x^2_1 + u^2_2 x^2_2) u^2_3 + (u^2_1 x^2_1 + u^2_2 x^2_2)$$
$$(x^2_1 + x^2_2) = 0$$

ose

$$u^2_1 u^2_2 (u^2_3 - x^2_1 - x^2_2) + (u^2_1 x^2_1 + u^2_2 x^2_2)(x^2_1 + x^2_2 - u^2_3) = 0$$

$$(x^2_1 + x^2_2 - u^2_3)(u^2_1 x^2_1 + u^2_2 x^2_2 - u^2_1 u^2_2) = 0 \qquad (4)$$

Kjo shprehje tregon se ekuacioni i prerjes nuk është lakore e shkallës së katërt por përbëhet nga dy lakore të shkallës së dytë. E para paraqet rreth

$$x^2_1 + x^2_2 = u^2_3 \qquad (5)$$

me rreze u_3, ndërsa e dyta elipsë

$$u^2_1 x^2_1 + u^2_2 x^2_2 = u^2_1 u^2_2 \qquad (6)$$

Prerja e sipërfaqes së valës me rrafshin $x_3 = 0$ është treguar në fig. 117. Shohim se lakorja e prerjes përbëhet nga rrethi me rreze u_3 dhe elipsës me gjysmboshte u_1 dhe u_2. Natyrisht se edhe këtu i përmbahemi marrëveshtjes se $u_1 > u_2 > u_3$.

Nga prerja e sipërfaqes valore mund të përcaktojmë në mënyrë konstruktive kahjet e vektorëve karakteristik të dritës në kristale.

Në fig. 117 është vizatuar kahja e rrezes $\vec{s}$. Gjatësia $\overline{OA_1}$ paraqet shpejtësinë radiale u', të njërës nga dy valët të përcaktuara me kahjen e $\vec{s}$. Në pikën A_1 e paraqesim tangjenten në elipsë $\overline{TT_1}$. Normalisht ndaj sajë qëndron vektori $\vec{n}_1$ i valës. Vektorët $\vec{D}_1$ dhe $\vec{E}_1$ janë normal ndaj kahjeve $\vec{n}_1$ dhe $\vec{S}$ dhe qëndrojnë në rrafshin e vizatimit. Vektori $\vec{H}_1$ është normal në këte rrafsh, prandaj nuk është vizatuar. Përveç kësaj vale ekziston edhe një tjetër shpejtësia radiale e së cilës është $\overline{OA_2} = u''$. Në te kahja e normales $\vec{n}_2$ përputhet me kahjen e rrezes $\vec{s}$. Meqë $\vec{D}_2$ duhet të qëndrojë normal ndaj $\vec{D}_1$, atëherë $\vec{D}_2$ është normal në

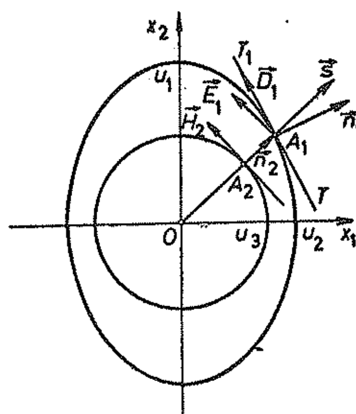


Fig. 117

rrafshin e vizatimit dhe të njëjtën kahje e ka edhe vektori $\vec{E}_2$, prandej nuk janë vizatuar në fig. 117. Vektori $\vec{H}_2$ qëndron në rrafshin e vizatimit dhe ka kahje të tangjentes në rreth. Kësisoji janë përcaktuar kahjet e të gjithë vektorëve karakteristik.

Tani duhet të përcaktojmë prerjen me rrafshin $x_1 = 0$. Edhe pa njehsim mund t'i shkruajmë rezultatet menjëherë sepse rrjedhin nga (5) dhe (6) me zëvendësimin ciklik të indekseve. Kjo prerje është paraqitur në fig. 118. Përbëhet nga rrethi me rreze u_1 dhe elipsa me gjysmëboshte u_2 dhe u_3.

Prerja e tretë me rrafshin $x_2 = 0$ është paraqitur në fig. 119. Në te shohim rrethin me rreze u_2 dhe elipsën me gjysëm boshtet u_1 dhe u_3. Këtu dallojmë edhe prerjen karakteristike në pikat P_1 dhe P_2 të cilat gjenden në skajet e dy kahjeve OP_1 dhe OP_2. Këto janë kahjet e biradialeve dhe të dy shpejtësitë radiale e kanë të njëjtën vlerë.

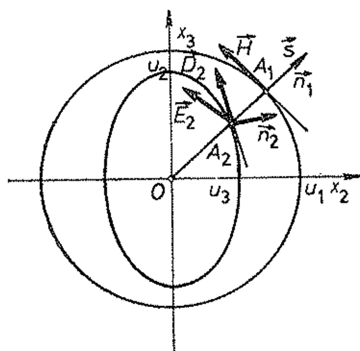


Fig. 118

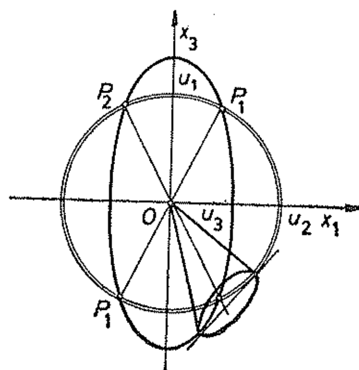


Fig. 119

Duke u bazuar në prerjet me rrafshet $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ dhe $x_3 = 0$, përfundojmë se sipërfaqja e kristalit dy boshtorë i ka dy luspa. Që kjo të vërehet me mirë në fig. 120 është paraqitur në projeksionin e pjerrët një oktant i sipërfaqes valore. Në të shumë mirë dallohen të dy luspat e sipërfaqes valore, e brendshmja dhe e jashtmja. Këto dy luspa takohen në katër pika, njëra prej të cilave në fig. 120 është shënuar me O. Kahja kah pika O tregon se të valët e dritës e kanë të njëjtën shpejtësi radiale. Kjo është kahja e biradiales. Në çdo drejtim tjetër rrezja e depërton sipërfaqen valore në dy pika, që do të thotë se në çdo kahje tjetër përhapen dy valë nëpër kristal. Kjo është në pajtim me shqyrtimin matematik të kryer në (XVII.7).

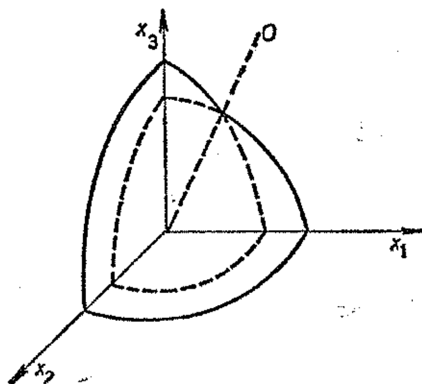


Fig. 120

9. SIPËRFAQJA E SHPEJTËSISË NORMALE

Në mënyrë të ngjajshme sikurse për konstruktimin e sipërfaqes së shpejtësisë radiale mund të gjejmë edhe sipërfaqen e shpejtësisë normale. Kjo është sipërfaqja në të cilën përfundojnë vektorët e shpejtësisë normale të tërhequr nga një pikë fillestare në të gjitha kahjet.

Kahja e shpejtësisë me boshtet e koordinateve i përcaktojnë këndet α_i. Do të kemi

$$\cos\alpha_i = \frac{x_i}{v} \qquad (i = 1, 2,3)$$

Përveç kësaj ekziston edhe shprehja

$$x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 = v^2$$

Fillojmë nga formula e Frenelit për shpejtësi normale

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\cos^2\alpha_i}{v^2_i - v^2} = 0$$

Nga shprehja e mëparshme do të kemi

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\frac{x^2_i}{v^2}}{v^2_i - v^2} = 0$$

ose

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{x^2_i}{v^2_i - v^2} = 0$$

të cilën mund ta shkruajmë në formën

$$x^2_1(v^2_2 - v^2)(v^2_3 - v^2) + x^2_2(v^2_1 - v^2)(v^2_3 - v^2) +$$
$$+ x^2_3(v^2_1 - v^2)(v^2_2 - v^2) = 0$$

ose

$$v^4(x^2_1 + x^2_2 + x^2_3) - v^2[x^2_1(v^2_2 + v^2_3) + x^2_2(v^2_3 + v^2_1) + v^2_3(v^2_1 + v^2_3)] +$$
$$+ x^2_1v^2_2v^2_3 + x^2_2v^2_1v^2_3 + x^2_3v^2_1v^2_2 = 0$$

Në vend të katrorit të shpejtësisë, shkruajmë koordinatet gjegjëse

$$(x^2_1 + x^2_2 + x^2_3)^3 - (x^2_1 + x^2_2 + x^2_3)[x^2_1(v^2_2 + v^2_3) + x^2_2(v^2_1 + v^2_3) +$$
$$+ x^2_3(v^2_1 + v^2_2)] + x^2_1v^2_2v^2_3 + x^2_2v^2_3v^2_1 + x^2_3v^2_1v^2_2 = 0 \quad (1)$$

Ky është ekuacioni i shpejtësisë normale. Shohim se kjo është sipërfaqe e shkallës së gjashtë.

Që të kuptojmë se si duket kjo do të kërkojmë prerjen e saj me rrafshin $x_3 = 0$. Fitojmë

$$v^4(x^2_1 + x^2_2) - v^2[x^2_1(v^2_2 + v^2_3) + x^2_2(v^2_3 + v^2_1)] + x^2_1v^2_2v^2_3 + x^2_2v^2_3v^2_1 = 0$$

Këte ekuacion e transformojmë edhe pak. Fitojmë

$$v^4(x^2_1 + x^2_2) - v^2v^2_3(x^2_1 + x^2_2) - v^2(x^2_1v^2_2 + x^2_2v^2_1) + (x^2_1v^2_2 + x^2_2v^2_1)v^2_3 = 0$$

$$v^2(x^2_1 + x^2_2)(v^2 - v^2_3) - (x^2_1v^2_2 + x^2_2v^2_1)(v^2 - v^2_3) = 0$$

$$(v^2 - v^2_3)[v^2(x^2_1 + x^2_2) - (x^2_1v^2_2 + x^2_2v^2_1)] = 0$$

Meqë $v^2 = x^2_1 + x^2_2$

përfundimisht fitojmë

$$(x^2_1 + x^2_2 - v^2_3)[(x^2_1 + x^2_2)^2 - (x^2_1v^2_2 + x^2_2v^2_1)] = 0 \quad (2)$$

Fig. 121

Ky ekuacion tregon se lakorja e prerjes përbëhet prej dy lakoreve: rrethit

$$x_1^2 + x_2^2 = v_3^2 \qquad (3)$$

me rrezeve v_3 dhe lakores së shkallës së katërt

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 = x_1^2 v_2^2 + x_2^2 v_1^2 \qquad (4)$$

e cila quhet oval. Në mënyrë të ngjajshme fitojmë edhe për prerjet me rrafshet tjera. Shohim se edhe shpejtësia normale përbëhet prej dy luspave.

Kur i krahasojmë sipërfaqet e shpejtësisë normale dhe shpejtësisë radiale shohim se sipërfaqja e shpejtësisë radiale është më e thjeshtë, meqë është sipërfaqe e shkallës së katërt, kurse tjetra është sipërfaqe e shkallës së gjashtë.

Në mes të sipërfaqes së shpejtësisë radiale apo valore dhe sipërfaqes së shpejtësisë normale ekziston një marrëdhënie e thjeshtë gjeometrike. Në fig. 121 është paraqitur prerja nëpër njërën luspë të sipërfaqes valore v_p dhe pjesës gjegjëse të sipërfaqes normale n_p. Nëse e zgjedhim një kahje të normales $\vec{n}$, atëherë kjo do të takohet me sipërfaqen normale në pikën Q. Gjatësia $OQ = v$, paraqet shpejtësinë normale në ate drejtim. E tërhjekim në pikën Q normalen ndaj v. Kjo normale është tangjentja e sipërfaqes valore v_p në pikën P. Segmenti OP paraqet shpejtësinë gjegjëse radiale u. Në të vërtetë, e dijmë se vektori $\vec{D}$ duhet të qëndrojë në rrafshin tangjencial të sipërfaqes valore dhe meqë njëkohësisht duhet të jetë edhe normal ndaj kahjes së shpejtësisë normale v, rrjedh përfundimi se normalja QP në kahje të rrezes së sipërfaqes normale është identike me rrafshin tangjencial në sipërfaqen valore. Prandej, sipërfaqja valore është anvelopë e të gjitha rrafsheve të vendosura normal ndaj rrezeve të sipërfaqes së shpejtësisë normale v.

10. KRISTALET NJË BOSHTORE

a) Sipërfaqja e valës

Kemi cekur më parë se në kristalet një boshtore të dy shpejtësitë kryesore janë të barabarta. Do të supozojmë se

$$u_1 = u_2 > u_3$$

Në formulën për shpejtësi radiale

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\cos^2\beta_i}{\frac{1}{u_i^2} - \frac{1}{u^2}} = 0$$

i zëvendësojmë

$$\cos\beta_i = \frac{x_i}{u}$$

dhe

$$x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 = u^2$$

Fitojmë

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{u^2_i x^2_i}{u^2 - u^2_i} = 0$$

ose

$$u^2_1 x^2_1 (u^2 - u^2_2)(u^2 - u^2_3) + u^2_2 x^2_2 (u^2 - u^2_3)(u^2 - u^2_1) + u^2_3 x^2_3 (u^2 - u^2_1)(u^2 - u^2_2) = 0$$

Meqë kemi vetëm dy shpejtësi kryesore do t'i shënojmë në formën

$$u_1 = u_2 = u_r \qquad u_3 = u_i \tag{1}$$

dhe për ekuacion të sipërfaqes kemi

$$u^2_r x^2_1 (u^2 - u^2_r)(u^2 - u^2_i) + u^2_r x^2_2 (u^2 - u^2_i)(u^2 - u^2_r) + u^2_i x^2_3 (u^2 - u^2_r)^2 = 0$$

Mund të nxjerrim faktorin e përbashkët

$$(u^2 - u^2_r)[u^2_r (u^2 - u^2_i)(x^2_1 + x^2_2) + u^2_i (u^2 - u^2_r) x^2_3] = 0 \tag{2}$$

Ky është ekuacioni i sipërfaqes valore për kristale një boshtore. Shohim se përbëhet prej dy sipërfaqeve. E para e ka ekuacionin

$$u^2 = u^2_r$$

ose

$$x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 = u^2_r \tag{3}$$

që paraqet sferë me rreze u_r. Pjesa tjetër e ka ekuacionin

$$u^2[u^2_r (x^2_1 + x^2_2) + u^2_i x^2_3] = u^2_r u^2_i (x^2_1 + x^2_2 + x^2_3)$$

Thjeshtojmë me

$$u_2 = x^2_1 + x^2_2 + x^2_3$$

dhe fitojmë

$$u^2_r (x^2_1 + x^2_2) + u^2_i x^2_3 = u^2_r u^2_i$$

ose

$$\frac{x^2_1+x^2_2}{u^2_i}+\frac{x^2_3}{u^2_r}=0 \qquad (4)$$

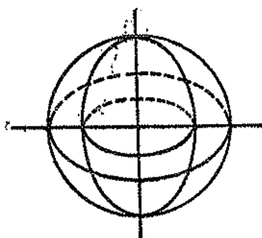


Fig. 122

Ky është ekuacioni i elipsoidit rrotullues me gjysmëboshtet u_i dhe u_r. Boshti i rotullimit është x_3. Figura 122 tregon sipërfaqen e valës. Kjo përbëhet nga sfera dhe elipsoidi rrotullues. Të dy sipërfaqet i kanë dy pika të përbashkëta. Këto janë fundet e biradialës e cila njëkohësisht është edhe bosht optik i kristalit.

Sikur të fillonim nga supozimi se

$$u_1=u_i \text{ dhe } u_2=u_3=u_r \ (u_i>u_r)$$

do të fitonim të njëjtin rezultat me ndryshim se sfera do të gjendej brenda elipsoidit.

Nga kjo që u cekë mund të përfundojmë se edhe në kristale një boshtore përhapen dy valë të dritës. Njëra prej tyre në të gjitha kahjet e ka të njëjtën shpejtësi. Kjo përhapet njësoj sikur në mjediset izotrope, prandej këte valë e quajmë valë të rregullt. Vala tjetër në kahje të ndryeshme ka shpejtësi të ndryeshme. Kjo valë quhet e pa rregullt. Shpërndarja e shpejtësisë së saj është simetrike boshtore, ku si simetrale është boshti optik.

Sipërfaqen valore të kristalit një boshtorë kemi mund ta përfitojmë edhe duke e specializuar sipërfaqen valore të kristalit dy boshtor për rastin kur dy shpejtësi kryesore janë të barabarta.

b) Sipërfaqja e shpejtësisë normale

Gjatë përfitimit të shpejtësisë normale kemi pasur shprehjen

$$x^2_1(v^2_2-v^2)\,(v^2_3-v^2)+x^2_2(v^2_3-v^2)\,(v^2_1-v^2)+x^2_3(v^2_1-v^2)(v^2_2-v^2)=0$$

Për kristale një boshtore duhet marrë se dy shpejtësi kryesore janë të barabarta

$$v_1=v_2=v_r$$

$$v_3=v_i$$

Shpejtësitë e barabarta i përkasin valës së rregullt, ndërsa e treta valës së pa rregullt. I zëvendësojmë

$$x^2_1(v^2_r-v^2)\,(v^2_i-v^2)+x^2_2(v^2_i-v^2)\,(v^2_r-v^2)+x^2_3(v^2_r-v^2)^2=0$$

ose

$$(v^2_r-v^2)\,[v^2_i(x^2_1+x^2_2)+v^2_r x^2_3-v^2(x^2_1+x^2_2+x^2_3)]=0$$

E dijmë se

$$v^2 = x^2_1 + x^2_2 + x^2_3$$

$$(v^2_r - x^2_1 - x^2_2 - x^2_3)[v^2_i(x^2_1 + x^2_2) + v^2_r x^2_3 - (x^2_1 + x^2_2 + x^2_3)^2] = 0$$

Ky ekuacion zbërthehet në dy të formës së këtillë:

$$x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 = v^2_r \tag{5}$$

që paraqet sferën me rreze v_r dhe

$$(x^2_1 + x^2_2 + x^2_3)^2 = x^2_3 v^2_r + v^2_i(x^2_1 + x^2_2) \tag{6}$$

që paraqet ekuacionin e ovaloidit rrotullues.

Pra, shpejtësia normale e kristalit një boshtore përbëhet prej dy luspave, prej të cilave njëra e ka formën e sferës, ndërsa tjetra të ovaloidit rrotullues. Sfera tregon se shpejtësia normale e valës së rregullt nuk varet nga kahja e saj.

c) Shpërndarja e shpejtësive

Formula e Frenelat për shpejtësi në kahje të normales te kristalet një boshtorë redukohet në

$$\frac{\cos^2\alpha_1}{v^2_r - v^2} + \frac{\cos^2\alpha_2}{v^2_r - v^2} + \frac{\cos^2\alpha_3}{v^2_i - v^2} = 0$$

ose

$$(v^2_i - v^2)(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2) + (v^2_r - v^2)\cos^2\alpha_3 = 0$$

prej nga rrjedh

$$v^2 = v^2_r \cos^2\alpha_3 + v^2_i (\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2)$$

E dijmë se është

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 = 1 - \cos^2\alpha_3 = \sin^2\alpha_3$$

dhe shpejtësinë mund ta shprehim me ndihmën e një këndi

$$v^2 = v^2_r \cos^2\alpha_3 + v^2_i \sin^2\alpha_3 \tag{7}$$

Me këte shprehje shpejtësinë në cilëndo kahje e kemi paraqitur me ndihmën e shpejtësive kryesore të rregullta dhe të pa rregullta si dhe të vetmit kënd α_3.

11. THYERJA E DRITËS NË KRISTALE

a) Ligji i thyerjes në kristale

Do të shqyrtojmë kalimin e dritës nga boshllëku në kristal. Në fig. 123 është vizatuar sipërfaqja kufitare *GG* e kristalit. Në anën e sipërme gjendet boshllëku, ndërsa në të poshtmen kristali. Drita le të takohet me sipërfaqen kufitare me këndin α në pikën 0. Kahja e dritës së rënies përcaktohet me vektorin e valës $\vec{k} = \omega \vec{n}/c$, ku me $\vec{n}$ e kemi shënuar vektorin unitar të kahjes së normales së valës. Në kristal vala përhapet në kahje të caktuar me vektorin e valës $\vec{k}' = \omega \vec{n}'/v'$. Kemi treguar se në mjediset izotrope, kënaqen konditat kufitare vetëm nëse vlen

$$\vec{k}\vec{r} = \vec{k}'\vec{r} \tag{1}$$

ose

$$\vec{r}(\vec{k} - \vec{k}') = 0$$

Meqë

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n}$$

e shkruajmë në formën

$$\vec{r}\left(\frac{\vec{n}}{c} - \frac{\vec{n}'}{v'}\right) = 0$$

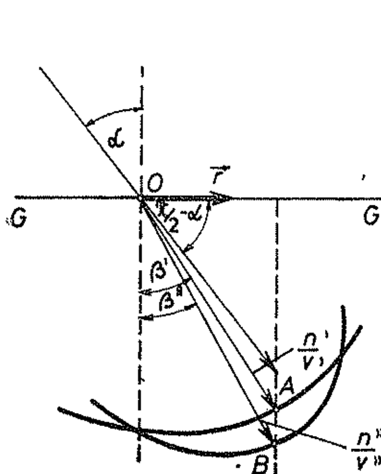


Fig. 123

Vektori i pozitës $\vec{r}$ qëndron në rrafshin kufitar *GG*, prandej shprehja e fundit tregon se vektori $\left(\frac{\vec{n}}{c} - \frac{\vec{n}'}{v'}\right)$ qëndron normal ndaj sipërfaqes kufitare. Rreth pikës 0 ku drita hyn në kristal do të vizatojmë sipërfaqen me rreze $1/v$. Kjo sipërfaqe ndryshon nga sipërfaqja normale e kristalit nga se rrezet e saj nuk janë të barabarta me shpejtësinë normale por, me vlerën reciproke të saj. Kjo sipërfaqe quhet sipërfaqe e shpejtësisë normale reciproke. Natyrisht se edhe kjo përbëhet nga dy luspa. Në fig. 123 janë vizatuar lakoret e prerjes së këtyre sipërfaqeve me rrafshin e vizatimit.

Në kahje të dritës rënëse e vizatojmë vektorin $\vec{n}/c$. Nga mbarimi i këtij vektori e lëshojmë normalen në kufirin *GG*. Kjo normale e përcakton

edhe mbarimin e vektorit $\vec{n'}/v'$, i cili është prerje e kësaj me sipërfaqen e shpejtësisë reciproke normale. Meqë kjo sipërfaqe përbëhet nga dy luspa, normalja këte do ta pret në pikat A dhe B. Pra, nëpër kristal përhapen dy valë. Kahjet e shpejtësive normale përcaktohen me kahjet OA dhe OB, përkatësisht me vektorët $\vec{n'}/v'$ dhe $\vec{n''}/v''$. Në këtë mënyrë janë përcaktuar kahjet e normaleve të valëve në kristal, për kahje të dhëna të dritës së rënies.

Nga shprehja (1) rrjedh

$$\frac{\vec{r}\,\vec{n}}{c} = \frac{\vec{r}\,\vec{n'}}{v'}$$

Këndi në mes të vektorëve $\vec{r}$ dhe $\vec{n}$ është $\frac{\pi}{2} - \alpha$, prandej

$$\frac{\vec{r}\,\vec{n}}{c} = \frac{r \sin\alpha}{c}$$

Nëse këndin e thyerjes e shënojmë me β' do të kemi

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta'} = \frac{c}{v'} \tag{2}$$

dhe në mënyrë të ngjajshme për kahjen tjetër të valës

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta''} = \frac{c}{v''} \tag{3}$$

Kemi fituar shprehje identike me ligjin e thyerjes së dritës në mjedise izotrope. Pra, ligji i thyerjes vlenë edhe për kalim në mjedis anizotrop me të vetmin ndryshim se duhet të zbatohet për të dy valët.

Këndi i thyerjes vështirë mund të caktohet sepse vështirë përcaktohen shpejtësitë v' dhe v'', prandej këtu nuk do ta paraqesim këte njehsim.

b) Refraksionet konike

Në kristalet dy boshtore paraqitet edhe një formë e veçantë e thyerjes e cila njihet si refraksion konik që shihet në fig. 119. Në te, në kahje të biradiales është vizatuar rrafshi tangjencial në rreth dhe elipsë. Ky rrafsh e takon sipërfaqen valore në një varg pikash të cilat gjenden në një rreth, prandej ekzistojnë pambarim shumë rreze të ci-

lat fillojnë nga qendra e sipërfaqes valore dhe mbarojnë në pikprerjet me rrafshin tangjencial. Të gjitha këto rreze qëndrojnë në mbështjellësin e një koni, sepse pikprerjet e tyre qëndrojnë në një vijë rrethore të rrafshit tangjencial.

Lehtë mund të tregohet se koni i rrezeve e ka kahjen e boshtit optik, sepse rrafshi tangjencial njëkohësisht i takon të dy luspat e sipërfaqes valore, të cilat kanë shpejtësi të njëjtë të përhapjes në kahje të boshtit optik të kristalit.

XVIII. SHPËRHAPJA E DRITËS

1. SHPËRHAPJA E RELEJIT NË GRIMCA SHUMË TË VOGLA

a) Vektorët e fushës

Nëse tufa e dritës intensive kalon nëpër enë të tejdukshme në të cilën gjendet benzoli, shohim se nga pjesa e ndriçuar e lëngut do të dalë dritë e kaltër. Natyrisht se e njëjta gjë ndodhë edhe për lëngje tjera por intensiteti i dritës dalëse do të jetë i ndryshëm. Dukuria vërehet edhe në gaze, por e një intensiteti të dobët si dhe në disa trupa të ngurtë. Këtu kemi të bëjmë me shpërndarjen e valëve të dritës në grimcat e mjedisit.

Dukurinë e shpërhapjes e shpjegojmë në këte mënyrë: Kur vala e dritës takohet me grimcën, e indukton në te momentin elektrik, i cili ndërron në mënyrë periodike nën veprimin e saj. Këto momente oshiluese periodike janë burim i valëve sekundare të dritës të cilat në mes veti inteferojnë. Sikur mjedisi nëpër të cilin kalon drita e rënies të cilën e quajmë primare, të përbëhej nga molekulet e renditura në mënyrë të rregullt, valët sekundare me interferim do të shuheshin plotësisht dhe dukuria nuk do të vërehej si e tillë. Mirëpo, nga lëvizja termike e molekuleve, gjithmonë ekziston renditje e pa rregullt e tyre dhe gjithmonë mbetet një pjesë e dritës sekundare. Këte dritë e quajmë dritë të shpërhapur.

Gjatë shpërhapjes së dritës, ndodhë që drita e rënies të ndikojë në gjendjen energjetike të rrotullimit dhe lëkundjes së molekuleve, ashtu që fotonet e dritës së shpërhapur do të kenë energji tjetër, përkatësisht frekuencë nga ajo e fotoneve të rënies. Këte dukuri e quajmë efekt të Ramanit. Por, mund të ndodhë që drita e rënies nuk e ndërron gjendjen energjetike të molekuleve të mjedisit. Atëherë drita e shpërhapur do të ketë të njëjtën frekuencë sikurse drita e rënies. Kjo shpërhapje njihet si shpërhapje e Relejit, për të cilën do të kufizohemi në vazhdim.

Për dritën e shpërhapur mund të njehsojmë intensitetin përkatësisht shpërndarjen e intensitetit për kënde të ndryeshme të shpërhapjes si dhe gjendjen e polarizimit të saj. Tregohet se edhe shpërndarja e intensitetit edhe gjendja e polarizimit të dritës së shpërhapur varen prej ndërtimit të molekulës në të cilat shpërhapet drita, prandej hulumtimi i këtyre karakteristikave na ofron të dhëna për ndërtimin e tyre. Ky hulumtim është treguar mjaft efikas për materialet e ndërtuaara nga makromolekulet.

Problemin e shpërhapjes së dritës në grimca shumë të vogla e zgjidhi Releji më 1881. Kur themi se grimca është shumë e vogël, atëherë mendojmë se dimensionet e saj janë mjaft të vogla në krahasim me gjatësinë valore të dritës së rënies. Duke u nisur nga kjo, forma e grimcës nuk ndikon në shpërhapje, prandej teoria vlenë për grimca të vogla të çfarëdo forme. Tregohet se teoria e Relejit vlenë për grimca, dimensionet e së cilave janë më të vogla se 1/10 e gjatësisë valore. Së pari do të fillojmë për shpërhapjen vetëm në një grimcë.

Në një pikë të saj e vendosim origjinën e sistemit të koordinateve. Le të jetë grimca nga materiali dielektrik me konstant ε. Supozojmë gjithashtu se permeabiliteti i saj nuk dallon nga ai në boshllëk μ_o dhe nuk ekziston as përqueshmëria specifike, pra $\sigma = 0$. Grimca gjendet në boshllëk me konstantet ε_o dhe μ_o. Supozojmë se në grimcë bie vala e rrafshtë e polarizuar, me vektorin elektrik $\vec{E}_o$. Në hapësirë ku nuk ka rryma dhe elektricitete të shpërndara fusha përcaktohet me këto ekuacione të Maksvelit

$$rot\,\vec{H} = \dot{\vec{D}} \tag{1}$$

$$rot\,\frac{\vec{D}}{\varepsilon} = -\dot{\vec{B}} \tag{2}$$

$$div\,\vec{D} = 0 \tag{3}$$

$$div\,\vec{B} = 0 \tag{4}$$

Ekuacionin e dytë e shkruajmë në formën

$$rot\,\vec{D}\left(\frac{1}{\varepsilon_o} + \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_o}\right) = -\dot{\vec{B}}$$

E shumëzojmë me ε_o dhe μ_o. Fitojmë

$$rot\,\mu_o\vec{D} + rot\left(\mu_o\,\frac{\varepsilon_o - \varepsilon}{\varepsilon}\,\vec{D}\right) = -\varepsilon_o\mu_o\dot{\vec{B}} = -\frac{1}{c^2}\,\dot{\vec{B}} \tag{5}$$

sepse

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}}$$

E shumëzojmë ekuacionin (1) me μ_o. Do të kemi

$$rot\,\vec{B} = \mu_o\dot{D}$$

dhe e zëvendësojmë në anëtarin e parë të (5) pasi e kemi derivuar sipas kohës. Fitojmë

$$rot\, rot\, \vec{B} + rot\left(\mu_o \frac{\varepsilon_o - \varepsilon}{\varepsilon} \dot{\vec{D}}\right) = -\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{B}} \qquad (6)$$

Supozojmë se vektorët e fushës ndërrojnë gjatë kohës si funksione harmonike me frekuencë ciklike ω. Prandej mund të shkruajmë

$$\vec{D} = \vec{D}_1 e^{-i\omega t} \qquad \vec{B} = \vec{B}_1 e^{-i\omega t}$$

prej nga

$$\dot{\vec{D}} = -i\omega \vec{D} \qquad (7)$$

$$\ddot{\vec{B}} = -\omega^2 \vec{B} \qquad (8)$$

Nga (8) dhe (9), shprehja (7) do të ketë formën

$$rot\, rot\, \vec{B} - i\omega\, rot\left(\mu_o \frac{\varepsilon_o - \varepsilon}{\varepsilon} \vec{D}\right) = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{B}$$

E zhvillojmë rotorin e dyfishtë

$$rot\, rot\, \vec{B} = grad\, div\, \vec{B} - \triangle \vec{B}$$

por nga (4) anëtari i parë është i barabartë me zero. Nëse marrim në konsiderim edhe vlerën

$$k = \frac{\omega}{c}$$

fitojmë ekuacionin

$$\triangle \vec{B} + k^2 \vec{B} = -i\omega\, rot\left(\mu_o \frac{\varepsilon_o - \varepsilon}{\varepsilon} \vec{D}\right) \qquad (9)$$

Do të supozojmë se vektori i induksionit magnetik përbëhet prej dy pjesëve, njërës pjesë si rezultat i valës së rënies $\vec{B}_o$ dhe tjetrës $\vec{B}_r$ si rezultat i valës së shpërhapur. Pra,

$$\vec{B} = \vec{B}_o + \vec{B}_r \qquad (10)$$

Gjithashtu supozojmë se $|\vec{B}_r| \gg |\vec{B}_o|$ si dhe $|\vec{D}_r|$ është i rendit të madhësisë $\mu_o \frac{\varepsilon_o - \varepsilon}{\varepsilon}$ ashtu që prodhimi i këtyre dy faktorëve mund të mos përfillet. Nga këto që cekëm dhe (10), shprehja (9) është

$$\triangle \vec{B}_o + \triangle \vec{B}_r + k^2 \vec{B}_o + k^2 \vec{B}_r = -i\omega\, rot\left(\mu_o \frac{\varepsilon_o - \varepsilon}{\varepsilon} \vec{D}_o\right) \qquad (11)$$

Pasi që për valën e rënies vlenë ekuacioni

$$\triangle \vec{B}_o + k^2 \vec{B}_o = 0$$

për dritën e shpërhapur ngelë ekuacioni

$$\triangle \vec{B}_r + k^2 \vec{B}_r = - i\omega\, rot\left(\mu_o \frac{\varepsilon_o - \varepsilon}{\varepsilon} \vec{D}_o \right) \tag{12}$$

Ky është ekuacion jo homogjen diferencial, zgjidhja e të cilit e ka formën

$$\vec{B}_r = - \frac{i\omega}{4\pi} \int \frac{1}{r} e^{ikr} rot \left(\mu_o \frac{\varepsilon_o - \varepsilon}{\varepsilon} \vec{D}_o \right) d\tau \tag{13}$$

E kryejmë integrimin parcialisht

$$\vec{B}_r = - \frac{i\omega}{4\pi} \int \mu_o \frac{\varepsilon_o - \varepsilon}{\varepsilon} \vec{D}_o \times grad \left(\frac{1}{r} e^{ikr} \right) d\tau$$

ndërsa

$$grad \left(\frac{1}{r} e^{ikr} \right) = \left(- \frac{1}{r^2} + \frac{i k}{r} \right) \vec{r}_o\, e^{ikr} \tag{14}$$

Ne e kërkojmë valën e shpërhapur në largësi të madhe nga grimca, prandaj r është mjaft i madh, çka do të thotë se mund të marrim vetëm anëtarin e dytë të (14). Fitojmë

$$\vec{B}_r = \frac{\omega k\, \mu_o}{4\pi} \int \frac{\varepsilon_o - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{e^{ikr}}{r^2} \vec{D}_o \times \vec{r}\, d\tau \tag{15}$$

E shënojmë me

$$k' = \frac{\mu_o}{4\pi}$$

dhe me ndihmën e $k = \dfrac{\omega}{c}$ për (15) fitojmë

$$\vec{B}_r = - k' \frac{\omega^2}{c} \int \frac{\varepsilon_o - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{1}{r^2} e^{ikr} \vec{r} \times \vec{D}_o\, d\tau \tag{16}$$

Meqë shqyrtimin e fushës e kryejmë në largësi të madhe nga grimca dhe pasi kjo i ka përmasat shumë të vogla mund të mendojmë se largësia r e vendit të shqyrtimit nga elementi i vëllimit të grimcës është konstant. Atëherë ngelë integrali $\int d\tau = V_o$, ku me V_o e kemi shënuar vëllimin e grimcës. Fitojmë për vektorin e induksionit magnetik

$$\vec{B}_r = - k' \frac{\omega^2}{c} V_o \frac{\varepsilon_o - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{1}{r^2} e^{ikr} \vec{r} \times \vec{D}_o$$

ose nga

$$\vec{E}_o = \frac{\vec{D}_o}{\varepsilon}$$

fitojmë përfundimisht

$$\vec{B}_r = k' \frac{\omega^2}{c} V_o (\varepsilon - \varepsilon_o) \frac{1}{r^2} e^{ikr} \vec{\times E_o} \quad (17)$$

Ka ngelë të përcaktojmë vektorin e fushës elektrike të valës së shpërhapur. Për këte fillojmë nga ekuacioni (1) të cilin e shkruajmë në formën

$$rot\, \vec{B}_r = \varepsilon_o \mu_x \dot{\vec{E}}_r$$

Këtu shkruajmë ε_o për të treguar se shpërndarjen e fushës elektrike e kërkojmë në boshllëk. Nga $\dot{\vec{E}}_r = - i\omega \vec{E}_r$ dhe 17 (fitojmë

$$- i \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_r = k' \frac{\omega^2}{c} V_o (\varepsilon - \varepsilon_o)\, rot \left[\frac{1}{r^2} e^{ikr} (\vec{r} \times \vec{E}_o) \right]$$

ose

$$\vec{E}_r = i\, k' c\omega V_o (\varepsilon - \varepsilon_o) \left[\frac{1}{r^2} e^{ikr} \cdot rot\, (\vec{r} \times \vec{E}_o) + grad \left(\frac{1}{r^2} e^{ikr} \right) \times (\vec{r} \times \vec{E}_o) \right] \quad (18)$$

Duhet të gjejmë vlerën e shprehjes

$$rot\, (\vec{r} \times \vec{E}_o) = \vec{r}\, div\, \vec{E}_o - \vec{E}_o\, div\, \vec{r} + (\vec{E}_o \nabla)\, \vec{r} - (\vec{r} \nabla)\, \vec{E}_o$$

E dijmë se $\vec{E}_o$ paraqet fushën elektrike të valës e rënies në vendin ku gjendet grimca, prandej nuk varet nga vendi i shqyrtimit të valës së shpërhapur. Për këte arsye në shprehje të fundit mund të mendohet si konstante, ashtu që anëtari i parë dhe i fundit janë të barabartë me zero. Anëntari i dytë është $- 3 \vec{E}_o$, kurse i treti është $\vec{E}_o$. Do të kemi

$$\vec{E}_r = i\, k' c\omega V_o (\varepsilon - \varepsilon_o) \left[- 2 \vec{E}_o \frac{1}{r^2} e^{ikr} + \left(- \frac{2}{r^3} + i \frac{k}{r^2} \right) e^{ikr} r_o \times (\vec{r} \times \vec{E}_o) \right]$$

Edhe në këte rast nuk i përfillim anëtarët e shkallës së lartë të $1/r$, prandej fitojmë

$$\vec{E}_r = - k' \omega^2 V_o (\varepsilon - \varepsilon_o) \frac{1}{r^3} e^{ikr} [r \times (r \times E_o)] \quad (19)$$

Shprehjet (17) dhe (19) përmbajnë faktorin $\frac{1}{r} e^{ikr}$ i cili është karakteristik për valë sferike çka tregon se drita e shpërhapur përhapet në formë të valëve sferike me burim të tyre në grimcën e vogël. Nëse e shënojmë me

$$\vec{p} = V_o (\varepsilon - \varepsilon_o) \vec{E}_o \tag{20}$$

atëherë vektorët e fushës së dritës së shpërhapur mund t'i shkruajmë në këte formë

$$\vec{E}_r = - k' \frac{\omega^2}{r^3} e^{ikr} [\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{p})] \tag{21}$$

$$\vec{B}_r = k' \frac{\omega^2}{cr^2} e^{ikr} [\vec{r} \times \vec{p}] \tag{22}$$

Shprehjet e fituara janë të ngjajshme me shprehjet (XV.4.8. dhe 9) për rrezatim të dipolit elektrik me moment dipolarë

$$\vec{p} = \vec{p}_1 e^{-i\omega t} \tag{23}$$

në zonën e valës.

Mund të përfundojmë se drita e rënies e shndërron grimcën në dipol elektrik, i cili emiton dritën e shpërhapur. Momenti i dipolit të induktuar është vektori $\vec{p}$ për të cilin shprehja (20) tregon se është proporcional me fushën elektrike të dritës së rënies. Këte mund ta shkruajmë shkurtimisht në formën

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}_o \tag{24}$$

Faktori i proporcionalitetit përmban vetëm të dhënat për përmasat dhe vetitë elektrike të grimcës. Ky është karakteristik për grimcën dhe quhet polarizibilitet i saj.

b) Intensiteti i dritës së shpërhapur

Fushat e njehsuara nuk mund t'i masim eksperimentalisht në ate formë, me që drita ka frekuencë shumë të lartë. Për këte arsye duhet njehsuar ndonjë madhësi e cila është e mundur të matet. I këtillë është intensiteti i dritës, i cili përkufizohet si vlerë mesatare kohore e vektorit të Pointingut. Pra,

$$I = |\overline{N}| \tag{25}$$

Fillojmë nga shprehja për vektorë të Pointingut

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_o} (\vec{E} \times \vec{B}) \tag{26}$$

Nga shprehjet (21) dhe (22) shohim se vlenë

$$\vec{E} = - c\, \vec{r_o} \times \vec{B} \tag{27}$$

E zëvendësojmë në (26)

$$\vec{N} = \frac{c}{\mu_o} [\vec{B} \times (\vec{r_o} \times \vec{B})] = \frac{c}{\mu_o} [\vec{r_o} \cdot B^2 - \vec{B} (\vec{r_o} \cdot \vec{B})]$$

Nga transverzaliteti i valëve

$$\vec{r} \cdot \vec{B} = 0$$

dhe fitojmë

$$\vec{N} = \frac{c}{\mu_o} \vec{r_o} B^2$$

ose intensiteti

$$|\vec{N}| = \frac{c}{\mu_o} B^2$$

Për vektor $\vec{B}$ shfrytëzojmë shprehjen (22) dhe me ndihmën e (23) mund të shkruajmë pjesën reale të madhësisë komplekse

$$\vec{B} = \frac{k'\omega^2}{cr} (\vec{r_o} \times \vec{p_1}) \cos (k\, r - \omega\, t)$$

prandej

$$|\vec{N}| = \frac{k'^2}{\mu_o} \frac{\omega^4}{cr^2} |\vec{r_o} \times \vec{p_1}|^2 \cos^2 (k\, r - \omega\, t)$$

Sipas (25) duhet njehsuar edhe vlerën mesatare kohore të kësaj shprehje. Pasi që

$$\overline{\cos^2(k\, r - \omega\, t)} = \frac{1}{2}$$

dhe nëse me ϑ e shënojmë këndin që mbyllë kahja e dritës së shpërhapur me kahjen e dipolit, do të kemi

$$|\vec{r_o} \times \vec{p_1}| = p_1 \sin\vartheta$$

Shfrytëzojmë edhe (24) dhe për intensitet do të kemi

$$I_\vartheta = \frac{k'^2}{2\mu_o} \frac{\omega^4}{cr^2} \alpha^2 E^2_{o1} \cdot \sin^2\vartheta \tag{28}$$

Në shprehjen e fundit do të paraqesim intensitetin e dritës së rënies. Nga (27) fitojmë

$$\vec{B} = \frac{1}{c}(\vec{r}_o \times \vec{E}_o)$$

Ndërsa për vektor të Pointingut (26) kemi

$$\vec{N}_o = \frac{1}{c\mu_o}[\vec{E}_o \times (\vec{r}_o \times \vec{E}_o)] = \frac{1}{c\mu_o}\vec{r}_o E^2_o$$

dhe intensiteti

$$I_o = \frac{1}{c\mu_o} E^2_o$$

Pasi që

$$\overline{E}^2_o = \frac{1}{2} E^2_{o1}$$

fitojmë për intensitet të dritës së rënies

$$I_o = \frac{1}{2c\,\mu_o} E^2_{o1} \tag{29}$$

Vlerën e fituar e zëvendësojmë në (28)

$$I_\vartheta = k'^2 \frac{\omega^4}{r^2} \alpha^2 I_o \sin^2\vartheta \tag{30}$$

E dijmë se $k' = \frac{\mu_o}{4\pi}$ dhe pasi që $\mu_o = \frac{1}{c^2\,\varepsilon_o}$

$$k' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o c^2}$$

Për ω kemi

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

ndërsa (30) do të ketë formën

$$I_\vartheta = \frac{\pi^2}{\varepsilon^2_o\,\lambda^4\,r^2} \alpha^2 I_o \sin\vartheta \tag{31}$$

Shprehjet (30) dhe (31) janë dy forma të intensitetit të dritës së shpërhapur në kahje, e cila me kahjen e lëkundjes së dritës së rënies e mbyllë këndin ϑ. Nga shprehja e fundit mund të përcaktojmë intensitetin e shpërhapjes në të gjitha kahjet, duke e integruar nëpër sipërfaqe të sferës me rreze r. Pra,

$$I = \int_o^\pi I_\vartheta\; 2\pi r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{2\pi^3\alpha^2}{\varepsilon_o^2\lambda^4} I_o \int_o^\pi \sin^3\vartheta\, d\vartheta$$

Vlera e integralit është 4/3 dhe përfundimisht fitojmë

$$I = \frac{8\pi^3}{3\varepsilon^2_o\lambda^4} I_o \tag{32}$$

Natyrisht se realisht nuk mund të vërejmë shpërhapjen vetëm në një grimcë, por kemi numër të madhë të tyre, të cilat njëkohësisht e shpërhapin dritën. Nëse supozojmë se shpërhapja është e njëjtë në të gjitha grimcat dhe në mes të pavarura, atëherë intensiteti i të gjitha grimcave të ndriçuara në vëllim të caktuar fitohet duke i shumëzuar shprehjet (30) dhe (32) me numrin e grimcave të ndriçuara. Le të jetë numri i grimcave në njësi të vëllimit n, ndërsa V vëllimi i ndriçuar, atëherë do të kemi

$$I_\vartheta = \frac{\pi^2 nV}{\varepsilon^2_o\lambda^4 r^2} \alpha^2 I_o \sin^2\vartheta \tag{33}$$

$$I = \frac{8\pi^3 nV \alpha^2}{3\varepsilon^2_o\lambda^4} I_o \tag{34}$$

Të dy shprehjet e fundit tregojnë se intensiteti i dritës së shpërhapur është proporcional me shkallën e katërt të $\frac{1}{\lambda}$. Kjo do të thotë se grimcat e vogla me intensitet më të madh e shpërhapin dritën me gjatësi të vogël valore, prandej shpërhapja e dritës së kaltër është më intensive se shpërhapja e dritës së kuqe. Kjo është edhe arsyeja pse qielli i shikuar nga sipërfaqja e Tokës na duket se ka ngjyrë të kaltërt. Drita e Diellit shpërhapet në grimca të pluhurit dhe ajërit në atmosferë, por zotëron ngjyra e kaltër e shpërhapjes e arsyetuar matematikisht me shprehjet (33) apo (34).

c) Polarizimi i dritës së shpërhapur

Shprehja (33) tregon se intensiteti i dritës së shpërhapur varet prej kahjes së vrojtimit të saj. Kjo varshmëri më së miri shihet në diagramin polarë të shpërhapjes. Në fig. 124 për rreze vektor është

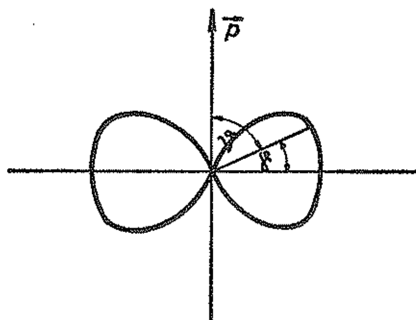


Fig. 124

paraqitur gjatësia proporcionale me intensitetin e dritës së shpërhapur në kahje të dhëna. Shihet se në kahje të lëkundjes së dritës së rënies nuk ka fare shpërhapje. Në kahjet tjera intensiteti rritet proporcionalisht me $\sin^2\vartheta$ dhe mbërrin vlerën më të madhe kur kahja e dritës së shpërhapur është normale ndaj kahjes së lëkundjes së dritës së rënies. Gjithashtu shihet se diagrami polarë është simetrik, prandej shpërhapja përpara dhe prapa është e njëjtë. Për këte arsye në shprehjen (33) mund të paraqesim këndin γ të cilin e mbyllë kahja e dritës së rënies me kahjen e dritës së shpërhapur. Meqë $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \gamma$ atëherë shprehja (33) mund të shkruhet edhe në formën

$$I_\vartheta = \frac{\pi^2 nV\alpha^2}{\varepsilon^2_o\lambda^4 r^2} I_o \cos^2\gamma \tag{35}$$

Shihet qartë se intensiteti për këndin γ dhe këndin $\pi - \gamma$ është i njëjtë.

Shprehjet (21) dhe (22) tregojnë se në valën e shpërhapur vektori elektrik dhe magnetik kanë kahje të caktuar të lëkundjes e cila ndërron gjatë kohës. Kuptojmë se drita e shpërhapur është e polarizuar në mënyrë lineare. Shprehja (22) tregon se kahja e lëkundjes së dritës së shpërhapur qëndron në rrafshin e përcaktuar me kahjen e shpërhapjes $\vec{r}$ dhe kahjen e lëkundjes së dritës së rënies $\vec{p}$.

Shqyrtimi i ynë për shpërndarjen e intensitetit dhe polarizimit të dritës së shpërhapur ishte i bazuar në supozimin se drita rëniese është e polarizuar në mënyrë lineare. Por, shpesh herë drita rëniese është e pa polarizuar. Të shqyrtojmë se çdo të ndodhë në këte rast. E dijmë se dritën e pa polarizuar mund ta mendojmë si dritë të përbërë nga dy valë të polarizuara në mënyrë lineare të cilat lëkunden në dy kahje normale ndërmjet veti. Të mendojmë se njëra kahje qëndron në rrafshin e përcaktuar me kahjen e dritës rëniese dhe asaj të shpërhapur. Për lëkundje të saj vlenë shprehja

$$I_{\parallel} = \frac{\pi^2 nV}{\varepsilon^2_o\lambda^4 r^2} \alpha^2 I_o \cos^2\gamma \tag{36}$$

Kahja tjetër qëndron normal ndaj (36) dhe për te do të kemi

$$I_{\perp} = \frac{\pi^2 nV}{\varepsilon^2_o\lambda^4 r^2} \alpha^2 I_o \tag{37}$$

Pasi që këto dy valë janë jo koherente intensitetet e tyre duhet të mblidhen

$$I = \frac{\pi^2 nV}{\varepsilon^2_o\lambda^4 r^2} \alpha^2 I_o (1 + \cos^2\gamma) \tag{38}$$

Kjo është shprehje për shpërndarje të Relejit, për dritën rëniese të pa polarizuar. Shpërndarjen e këtij intensiteti e tregon fig. 125.

Në këtë figurën me vija të ndërprerja janë paraqitur diagramet e intensiteteve $I_{\parallel}$ dhe $I_{\perp}$ sipas (36) dhe (37), ndërsa me vijë të pakëputur intensiteti i shumës së tyre (38). Shihet se edhe intensiteti i shpërhapjes së dritës së pa polarizuar është simetrik. Kuptojmë se në këte rast vlenë $I(0, \pi) = 2I\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Do të shqyrtojmë gjendjen e polarizimit të dritës së shpërhapur. Pasi që kemi mbledhje jo koherente të dy valëve me lëkundje normale drita e shpërhapur nuk është e polarizuar në mënyrë lineare, por meqë të dy komponentet nuk e kanë të njëjtin intensitet, kjo nuk është edhe tërësisht e pa polarizuar. Kjo

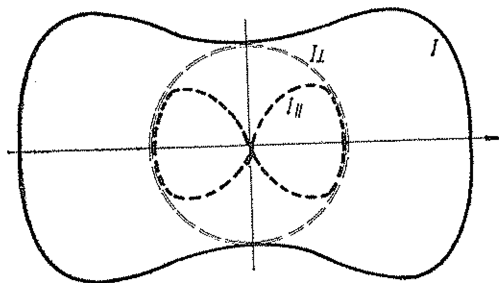


Fig. 125

do të thotë se drita e shpërhapur është e polarizuar pjesërisht. Drita e polarizuar pjesërisht mund të zbërthehet në komponenten e polarizuar dhe të pa polarizuar. Shkalla e polarizimit të saj P, e cila përkufizohet si herës i intensitetit të pjesës së polarizuar ndaj intensitetit total, matematikisht shprehet në formën

$$P = \frac{I_{\perp} - I_{\parallel}}{I_{\perp} + I_{\parallel}} \tag{39}$$

Në këte shprehje me $I_{\parallel}$ e kemi shënuar intensitetin të cilin e lëshon analizatori linearë kur është i vendosur ashtu që të lëshojë dritën e cila lëkundet paralel me rrafshin e përcaktuar me kahjen e rrezes së rënies dhe asaj të shpërhapur, ndërsa me $I_{\perp}$ është shënuar intensiteti të cilin e lëshon ky analizator normal ndaj këtij rrafshi. Intensitetet $I_{\parallel}$ dhe $I_{\perp}$ janë të përcaktuar me shprehjet (36) dhe (37). Do të kemi

$$P = \frac{1-\cos^2\gamma}{1+\cos^2\gamma} = \frac{\sin^2\gamma}{1+\cos^2\gamma} \tag{40}$$

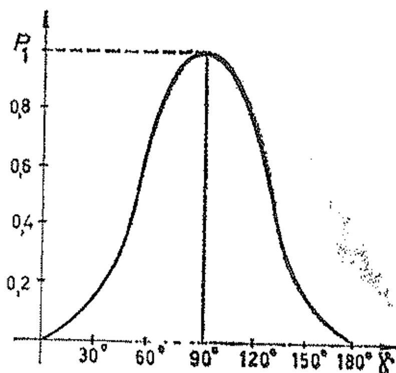


Fig. 126

Varshmëria e shkallës së polarizimit nga këndi i shpërhapjes është paraqitur në

fig. 126. Vlerat ekstremale të shkallës së polarizimit janë $P = 0$, për këndet $\gamma = 0$ dhe $\gamma = \pi$. Pra në kahjet përpara është plotësisht e pa polarizuar. Vlerat $P = 1$ gjendet për $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Pra në kahje normale të dritës rëniese, ajo e shpërhapur është plotësisht e polarizuar dhe lëkundet normal në rrafshin të cilin e përcaktojnë drita e rënies dhe e shpërhapur.

2. SHPËRHAPJA E RELEJ — GANSIT

Shpërhapja e Relejit të cilën e shqyrtuam paraqitet në rastet kur përmasat e grimcës janë të vogla në krahasim me gjatësinë valore të dritës rëniese. Atëherë vala e dritës në tërë grimcën e ka gati të njëjtën fazë të lëkundjes, prandej e detyron këte që të lëkundet sikurse dipol. Oshilimet e këtij dipoli gjenden në fazë me oshilimet e valës së rënies. Për grimca më të mëdha, vala nuk do të ketë në tërë grimcën, të njëjtën fazë të lëkundjes dhe si të tillë nuk mund ta mendojmë si dipol elektrik. Sipas propozimit të Relejit në këte rast grimca duhet ndarë në elemente të vogla të vëllimit, ndërsa Gansi më 1925 këte propozim e përpunoi më hollësisht.

Çdo element i këtillë i vëllimit rrezaton sikurse dipol elektrik, por lëkundjet e tyre nuk gjenden në të njëjtën fazë. Këta e kanë fazën e valës rëniese në vendin e elementit të shqyrtuar. Drita e shpërhapur paraqitet si interferim i rrezatimeve dipolare të elementeve të veçuara të vëllimit. Ky interpretim i shpërhapjes mund të zbatohet për grimca më të mëdha dhe njihet si shpërhapje e Relej-Gansit. Përderisa në shpërhapje të Relejit shpërndarja e intensitetit është simetrike dhe nuk varet prej formës së grimcës, në shpërhapje të Relej-Gansit është karakteristike se intensiteti i shpërhapjes nuk është më simetrik. Këtu zotëron intensiteti kah pjesa e përparshme dhe shpërndarja e tij varet prej formës së grimcës.

Së pari do të paraqesim formulën e përgjithshme për interferencën e dritës së emituar nga pjesët e ndryeshme të dipolit e pastaj ate do ta specializojmë për forma të ndryeshme të grimcave.

Grimcën në të cilën shpërhapet drita e ndajmë në elemente të vogla të vëllimit $d\tau$. Çdo njëri prej tyre rrezaton si dipol elektrik. Për moment të dipolit të këtillë mund të shkruajmë

$$p = \alpha\, e^{i\delta}\, E$$

Këtu njëkohësisht e kemi marrë në konsiderim se faza e valës së rënies nuk është e njëjtë në të gjitha dipolet. Me δ e kemi shënuar ndryshimin e fazës në mes të dipolit të shqyrtuar dhe atij i cili gjendet në origjinë të koordinateve. Për dipolin e shqyrtuar mund të kryejmë të njëjtin njehsim sikurse për shpërhapjen e Relejit për fushë të dritës së shpërhapur dhe do të fitojmë të njëjtat shprehje me ndryshim se do të përmbajnë edhe faktorin $e^{i\delta}$. Që të fitojmë fushën e rrezatimit të tërë grimcës duhet t'i mbledhim kontributet e dipoleve të veçuar, për çka fitojmë integralin

$$P(\gamma) = \frac{1}{V} \int e^{i\delta}\, d\tau \tag{1}$$

Për njehsimin e intensitetit edhe këtu veprojmë njësoj sikurse për shpërhapje të Relejit. Natyrisht se fitohen të njëjtat shprehje sikurse (XVIII.1.33 dhe 34), me ndryshim se paraqitet edhe faktori $|P(\gamma)|^2$. Për këte arsye mundemi intensitetin e shpërhapjes së Relejit ta shënojmë me I_R, ndërsa për intensitet të shpërhapjes së Relej-Gansit e kemi shprehjen

$$I = I_R\, |P(\gamma)|^2 \tag{2}$$

Faktorit të inteferencës do t'i japim një formë më të përshtatshme. Në fig. 127 në pozitën 0 gjendet dipoli elementar fillestar, ndërsa dipoli i shqyrtuar gjendet në pozitën e përcaktuar me vektorin e pozitës $\vec{r}$. Drita rënuese paralele përcaktohet me vektorin unitarë $\vec{n}$.

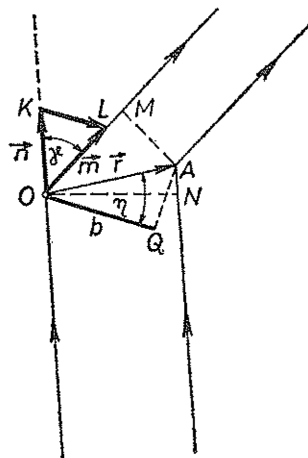


Fig. 127

Meqë përmasat e grimcës janë të vogla ndërsa vendi i shqyrtimit të dritës së shpërhapur është mjaft larg duhet marrë se edhe drita e shpërhapur është paralele. Kahjen e saj e përcakton vektori unitar $\vec{m}$. Në figurë është vizatuar drita rënuese dhe e shpërhapur nëpër pikën fillestare O dhe pikën e shqyrtuar A. Nga e njëjta shohim se ndryshimi në fazë paraqitet nga ndryshimi i rrugëve $\overline{OM} - \overline{NA}$. Këte ndryshim ta shprehim me ndihmën e vektorëve në formën:

$$\overline{OM} = \vec{r}\,\vec{m} \text{ dhe } \overline{NA} = \vec{r}\,\vec{n}$$

kurse ndryshimin e fazës e gjejmë duke e shumëzuar ndryshimin e rrugëve me numrin e valës $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$$\delta = k\,\vec{r}\,(\vec{m} - \vec{n}) \tag{3}$$

Vektorët unitarë e mbyllin këndin i cili gjendet në kulm të trekëndëshit OKL, prandej vlenë

$$|\vec{m} - \vec{n}| = 2 \sin \frac{\gamma}{2}$$

Nëpër pikën O e vizatojmë paralelen me kahjen e vektorit $(\vec{m} - \vec{n})$.

Kjo paralele $\overline{OQ}$ me vektorin $\vec{r}$ e mbyllë këndin η. Sipas përkufizimit të prodhimit skalarë kemi

$$\delta = k\,|\vec{m} - \vec{n}|\, r \cos\eta \tag{4}$$

Pikën Q e përcakton normalja e lëshuar nga pika A në paralelen $\overline{OQ}$. Nëse e shënojmë me

$$b = \overline{OQ}$$

atëherë nga trekëndëshi OQA rrjedhë $b = r\cos\eta$, dhe për ndryshim faze mund të shkruajmë

$$\delta = 2b\,k \sin\frac{\gamma}{2} \tag{5}$$

Shohim se ndryshimi i fazës është i njëjtë për të gjitha ato elemente të vëllimit të cilat e kanë të njëjtin projeksion b në vijën e cila e përgjysmon këndin në mes të valës rëniese dhe të shpërhapur. E zavendësojmë shprehjen (5) në (1)

$$P(\gamma) = \frac{1}{V}\int e^{i2bk\sin\frac{\gamma}{2}}\, d\tau \tag{6}$$

Në këte mënyrë e kemi përcaktuar faktorin e interferencës. Për njehsimin e tij konkret duhet të kryhet integrimi sipas vëllimit të grimcës. Për këte nevojitet njohja e formës gjeometrike të saj. Në vazhdim do të njehsojmë shpërhapjen në forma të caktuara të grimcave.

3. SHPËRHAPJA E RELEJ — GANSIT NË GRIMCA TË FORMËS SFERIKE

Supozojmë se shpërhapja e dritës kryhet në grimca të formës sferike me rreze a. E vendosim origjinën e sistemit të koordinateve në qendër të saj. Në fig. 128 është paraqitur gjeometria e këtij problemi. Sferën e ndajmë në elemente të vëllimit të formës së shtresës sferike me gjërësi db normal ndaj gjatësisë b. Meqë rrezja e shtresës është $\sqrt{a^2 - b^2}$ për element të vëllimit kemi

$$d\tau = (a^2 - b^2)\,\pi\, db$$

ndërsa shprehja (6) do të ketë formën

$$P(\gamma) = \frac{3}{4a^3}\int_{-a}^{a} e^{i2bk\sin\frac{\gamma}{2}}\,(a^2 - b^2)\, db \tag{1}$$

Shënojmë shkurtimisht me

$$u = 2a\,k\sin\frac{\gamma}{2} \tag{2}$$

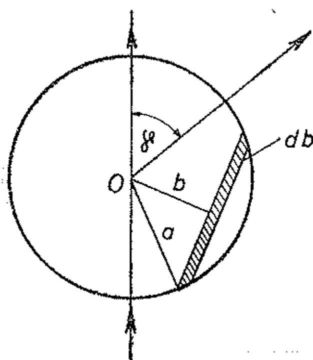


Fig. 128

dhe integrali do të ketë formën

$$P(\gamma) = \frac{3}{4a^3} \int_{-}^{} e^{i\frac{u\,b}{a}} (a^2 - b^2)\, db =$$

$$= \frac{3}{4a} \int_{-}^{} e^{i\frac{u\,b}{a}}\, db - \frac{3}{4a^3} \int_{-a}^{a} b^2 e^{i\frac{u\,b}{a}}\, db$$

Zgjidhja e këtij integrali elementarë është

$$P(\gamma) = \frac{3}{u^3} (\sin u - u \cos u) \qquad (3)$$

dhe nga (XVIII.2.) kemi

$$I = I_R \left\{ \frac{3}{8a^3k^3} \sin^3 \frac{\gamma}{2} \left[\sin\left(2ak \sin \frac{\gamma}{2}\right) - \left(2ak \sin \frac{\gamma}{2}\right) \cos\left(2ak \sin \frac{\gamma}{2}\right) \right] \right\}^2$$

4. SHPËRHAPJA E RELEJ — GANSIT NË GRIMCA NË FORMË SHKOPTHI

Të mendojmë se drita shpërhapet në grimcë në formë të shkopthit të gjatë dhe mjaft të hollë. Gjatësinë e saj e shënojmë me l ndërsa trashësinë e mendojmë se është e pa përfillshme. Origjinën e sistemit të koordinateve e vendosim në mes të grimcës. Elementi i vëllimit i cili nga origjina e sistemit është i larguar për r lëkundet me ndryshim faze të paraqitur me (XVIII.2.3),

$$\delta = 2k\, r \sin \frac{\gamma}{2} \cos\eta \qquad (1)$$

Këtë vlerë e zëvendësojmë në (XVIII.2.1) dhe fitojmë

$$P(\gamma) = \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} e^{i\, 2kr \sin \frac{\gamma}{2} \cos\eta}\, dr \qquad (2)$$

Shënojmë shkurtimisht me

$$u = kl \sin \frac{\gamma}{2} \cos\eta \qquad (3)$$

dhe fitojmë

$$P(\gamma) = \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} e^{i\, 2u \frac{r}{l}}\, dr = \frac{1}{l} \frac{l}{2iu} (e^{iu} - e^{-iu})$$

$$P(\gamma) = \frac{\sin u}{u} \tag{4}$$

Ky është faktori i interferencës për një shkopth të çfarëdo orientimi ndaj dritës rëniese. Por në praktikë kemi të bëjmë me numër të madh të shkopthave të orientuar në mënyrë statistike. Drita e shpërhapur do të ketë faktorin e interferencës i cili i përgjigjet vlerës mesatare të orientimeve të ndryeshme të shkopthave. Meqë në shprehje për intensitet paraqitet katrori i (4) duhet të njehsojmë këte vlerë mesatare

$$\overline{P^2(\gamma)} = \frac{1}{\Omega}\int \frac{\sin^2 u}{u^2}\, d\Omega \tag{5}$$

Orientimin e shkopthit e përcakton këndi η, prandej vlerën mesatare duhet njehsuar për të gjithë këndet e mundshëm η. Pasi që elementi i këndit hapësinorë është $2\pi \sin\eta\, d\eta$ do të kemi

$$\overline{P^2(\gamma)} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, 2\pi \sin\gamma\, d\eta$$

Pjesën konstante të (3) e shënojmë me G

$$G = k\, l \sin\frac{\gamma}{2} \tag{6}$$

dhe për vlerë mesatare do të kemi

$$\overline{P^2(\gamma)} = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 (G\cos\eta)}{(G\cos\eta)^2}\, d\,(\cos\eta)$$

Të dy skajet e shkopthit janë të barabartë ashtu që kontributi i pozitës η është i barabartë me kontributin $\pi - \eta$ dhe integrimin mund të marrim nga 0 deri në $\frac{\pi}{2}$. Fitojmë

$$\overline{P^2(\gamma)} = -\frac{1}{G}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 (G\cos\eta)}{(G\cos\eta)^2}\, d\,(G\cos\eta)$$

dhe nëse shënojmë shkurtimisht me

$$t = G\cos\eta$$

do të kemi

$$\overline{P^2(\gamma)} = \frac{1}{G}\int_0^{G} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt$$

Integralin e fundit e zgjidhim me metodën e integrimit të pjesërishëm. Shënojmë

$$y = \sin^2 t \quad ; \quad dy = \sin 2t dt$$

$$dz = \frac{dt}{t^2} \quad ; \quad z = -\frac{1}{t}$$

$$\int_0^G \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = -\frac{\sin^2 t}{t}\Bigg|_0^G + \int_0^G \frac{\sin 2t}{t} dt = \int_0^G \frac{\sin 2t}{2t} d(2t) - \frac{\sin^2 G}{G}$$

Për integralin e mbetur mund të shënojmë

$$x = 2t$$

dhe *fit*ojmë

$$\int_0^G \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \int_0^{2G} \frac{\sin x}{x} dx - \frac{\sin^2 G}{G}$$

Përfundimisht fitojmë për faktorin e interferencës

$$\overline{P^2(\gamma)} = \frac{1}{G}\left(\int_0^{2G} \frac{\sin x}{x} dx - \frac{\sin^2 G}{G}\right)$$

Ndërsa për shpërndarjen e dritës së shpërhapur fitojmë shprehjen

$$I = I_R \left(\frac{1}{G} \int_0^{2G} \frac{\sin x}{x} dx - \frac{\sin^2 G}{G}\right) \tag{6}$$

Edhe kjo shpërndarje e intensitetit tregon asimetri tipike. Duke matur intensitetin e shpërhapjes mund të njehsohet faktori G dhe me ndihmën e (6) mund të përcaktojmë gjatësinë e shkopthit l.

Duke mos tentuar të shqyrtojmë rastet tjera të shpërhapjes e shohim të arsyeshme të cekim se dukuria paraqitet edhe në lëngje si rezultat i lëkundjes së dendësisë apo lëkundjes së koncentrimit. Natyrisht se ekziston dallim i qenësishëm në trajtimin e shpërhapjes në lëngje nga shpërhapja në gaze, sepse duhet marrë në konsiderim parametra tjerë, por megjithate në shprehjet përfundimtare figuron faktori $1/\lambda^4$.

Për derisa në gaze supozimi i shpërhapjes së pavarur në grimca, në lëngje ky supozim nuk është i arsyeshëm. Kjo shihet nga fakti se në lëngje numri i molekulave në njësi të vëllimit është shumë më i madh se numri i tyre në të njëjtin vëllim të gazit, por shpërhapja është 10 deri në 50 herë më e fuqishme. Shihet se nuk ekziston proporcionalitet me numrin e molekulave të gazit dhe lëngjeve në rastin e shpërhapjes sepse ky numër është disa qinda herë më i madh në lëngje, ndërsa shpërhapja është disa dhjeta herë më e fuqishme se sa në gaze.

XIX. DIFRAKSIONI I DRITËS

Në shqyrtimin e deritanishëm nuk kemi supozuar kurrfarë kufizimi të valëve në hapësirë. Mirëpo, në shumicën e instrumenteve optike kemi të bëjmë me tufa dritësore të kufizuara. Kur valët e dritës janë të kufizuara në hapësirë, atëherë në skajet e këtij kufizimi paraqiten dukuri të veçanta të cilat njihen si difraksion. Në vazhdim do të përqëndrohemi në shqyrtimin e këtyre dukurive.

1. INTENSITETI I DRITËS

Drita është elektromagnetike e frekuencës së lartë. Prandej vlera e vektorit elektrik shumë shpejt ndërron dhe është e pa mundur të matet vlera e tij momentale. Që të mundemi të dallojmë dritat e të njëjtës ngjyrë duhet të përkufizojmë madhësinë e cila quhet intensitet i dritës. Intensiteti i dritës përkufizohet si vlerë mesatare kohore e vektorit të Pointingut të valës së dritës. Kjo është vlera mesatare e dendësisë së energjisë të cilën vala e dritës e bartë në njësi të kohës.

Sipas përkufizimit

$$I = \overline{N} \tag{1}$$

Për vektorë të Pointingut vlenë shprehja

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Kemi treguar se në valë elektromagnetike

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, \vec{n} \times \vec{E}$$

ose

$$\vec{N} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, \vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E})$$

prej nga

$$\vec{N} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, [\vec{n}\, E^2 - \vec{E}\,(\vec{n}\, \vec{E})]$$

Meqë valët e dritës janë transverzale $\vec{n} \cdot \vec{E} = 0$ dhe fitojmë

$$N = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \; E^2$$

E shënojmë faktorin e proporcionalitetit me 2K

$$2K = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$$

dhe për intensitet të vektorit të Pointingut kemi

$$N = 2K\, E^2$$

ndërsa sipas (1)

$$I = 2K\, \overline{E^2} \tag{2}$$

Vektorin elektrik në valë e shpreh funksioni

$$\vec{E} = \vec{a} \cos\,(\vec{k}\,\vec{r} - \omega t + \delta) \tag{3}$$

të cilin mund ta shprehim në formën

$$\vec{E} = \vec{a}\, e^{i(\vec{k}\,\vec{r} + \delta)}\, e^{-i\omega t}$$

E shënojmë amplitudën komplekse me

$$\vec{u} = \vec{a}\, e^{i(\vec{k}\,\vec{r} + \delta)} \tag{4}$$

dhe me ndihmën e saj

$\vec{E} = \vec{u}\, e^{-i\omega t}$, ndërsa vlera absolute $E = u\, e^{-i\omega t}$

Numrin kompleks e zbërthejmë në pjesën reale dhe imagjinare

$$u = u_1 + i\, u_2 \tag{5}$$

Atëherë kemi

$$\vec{E} = (u_1 + i\, u_2)\,(\cos\omega t - i \sin\omega t)$$

Pjesa reale e kësaj shprehje është

$$E = u_1 \cos\omega t + u_2 \sin\omega t$$

E ngrisim në katrorë dhe kërkojmë vlerën mesatare kohore

$$\overline{E^2} = u^2_1\, \overline{\cos^2\omega t} + u^2_2\, \overline{\sin\omega t} + u_1 u_2\, \overline{\sin 2\omega t}$$

Vlerat mesatare janë:

$$\overline{\cos^2\omega t} = \overline{\sin^2\omega t} = \frac{1}{2} \quad \text{dhe} \quad \overline{\sin 2\omega t} = 0$$

Prandej

$$\overline{E^2} = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2)$$

kurse nga (2) fitojmë

$$I = K(u_1^2 + u_2^2)$$

Në këte shprehje paraqitet katrori i modulit të numrit kompleks (5). E dijmë se i njëjti modul mund të shprehet edhe në formën

$$u_1^2 + u_2^2 = u^* u$$

Këtu me u^* e kemi shënuar numrin kompleks të konjuguar të u. Pra,

$$I = K\, u^* u \tag{6}$$

Kjo është shprehja përfundimtare për intensitet të dritës. Prandej, për njehsimin e intensitetit së pari duhet njehsuar amplituda komplekse e valës sipas (4) e pastaj të shumëzohet me vlerën komplekse të konjuguar. Gjatë njehsimit të difraksionit të dritës nuk është e nevojshme njohja eksplicite e konstantes K, sepse me rëndësi është krahasimi i intensiteteve e cila gjatë pjesëtimit të tyre thjeshtohet. Shprehja (6) e fituar për intensitet të dritës është mjaft e përshtatshme për njehsimin e interferencës, sepse kur dy valë bashkohen atëherë vektorët elektrik duhet të mblidhen, prandej e kryejmë mbledhjen e amplitudave komplekse të tyre. Të njëjtën shprehje do ta shfrytëzojmë për njehsimin e intensitetit difraksional.

2. PARIMI I HAJGENSIT

Difraksioni i dritës është dukuria e përkuljes së valëve të saj pranë skajeve të pengesës. Kur drita përhapet nëpër hapje të vogël atëherë nuk fitohet pjesa e ndriçuar e hapësirës me kufij të prerë të hijes, por vërehet se skajet e pjesës së ndriçuar janë të mbuluar me sistem të vijave të ndriçuara dhe të errëta.

Njehsimi i vijave difraksionale duhet të kërkohet ashtu që të zgjidhet ekuacioni diferencial valorë duke shfrytëzuar konditat kufitare të cilat i përgjigjen pengesës. Kjo metodë e hulumtimit është mjaft e vështirë dhe është kryer vetëm për disa raste kur pengesa ka formë të rregullt gjeometrike. Rast tipik kemi difraksionin në sferë.

Por, kjo zgjidhje rigoroze e problemeve të difraksionit nuk është e domosdoshme, meqë ekzistojnë metoda të përafërta të cilat në shumicën e rasteve japin rezultate të cilat shumë mirë përputhen me të dhënat eksperimentale. Një metod të këtillë të përafërt e ka dhënë Kirhofi, ndërsa ne do të shfrytëzojmë një metodë edhe më të vjetër e cila bazohet në parimin e Hajgensit.

Parimi i Hajgensit vërteton se çdo pikë në fushë të valës mund të mendohet si burim i valës së re elementare. Këte parim e ka zgjë-

ruar Freneli duke supozuar se këto valë janë koherente dhe në mes veti interferojnë. Këtu do të paraqesim shprehjen matematike e cila përfaqëson parimin e Hajgens-Frenelit.

Të mendojmë rrafshin nga materiali jo i tejdukshëm në të cilin gjendet një hapje e vogël e çfarëdo forme. Burimi piksorë i dritës monohromatike le të gjendet në largësi të madhe nga kjo hapje. Në rrafshin e hapjes e zgjedhim një pikë për origjinë të sistemit të koordinateve. E shënojmë me a largësinë e burimit nga kjo pikë, sikurse tregon fig. 129. E ndajmë hapjen në elemente të vogla të sipërfaqes dS dhe me r_o e shënojmë largësinë e një elementi të këtillë nga burimi. Nga burimi përhapen valët sferike dhe amplituda komplekse e lëkundjes në vendin ku gjendet elementi i shqyrtuar i sipërfaqes është

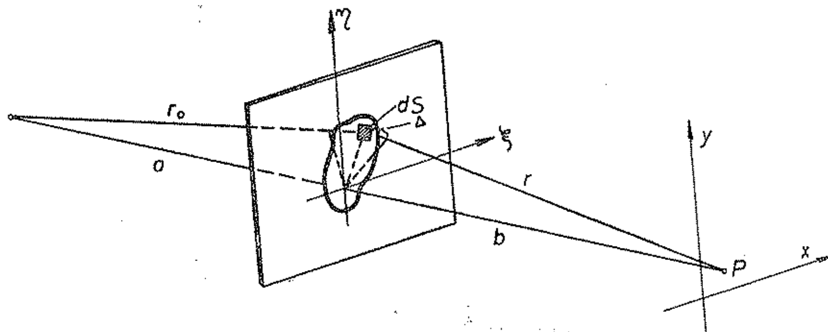


Fig. 129

$$u(dS) = A \frac{1}{r_o} e^{ikr_o} \tag{1}$$

Amplituda reale A varet prej intensitetit të dritës të cilën e emiton burimi. Meqë ndriçimi i elementit të sipërfaqes dS varet edhe prej kosinusit të këndit të pjerrtësisë së dritës së rënies me normalen në element të sipërfaqes, duhet të shumëzohet edhe me kosinusin e këtij këndi. Mirëpo eksperimentet me difraksion të dritës kryhen gjithmonë për hapje të vogla në krahasim me largësinë e burimit, prandej për të gjithë elementet e sipërfaqes ky kënd është i vogël ashtu që kosinusi përafërsisht i barabartë me një.

Sipas parimit të Hajgensit çdo pikë të hapjes mund ta mendojmë si burim të valëve elementare, prandej edhe elementi i shqyrtuar i sipërfaqes do të jetë burim i valëve elementare

$$u(dS)\, dS$$

Në pikën P të hapësirës në të cilën dëshirojmë të përcaktojmë fushën e dritës e cila nga elementi i sipërfaqes dS është e larguar për r amplituda komplekse do të jetë

$$du = u(dS) \frac{1}{r} e^{ikr} dS$$

dhe nga (1) fitojmë

$$du = A \frac{1}{r_o r} e^{ik(r + r_o)} dS$$

Edhe në këte rast nuk e përfillim kosinusin e këndit të pjerrtësisë. Shprehja e fituar paraqet kontributin e elementit të sipërfaqes dS për amplitudën komplekse të lëkundjes së dritës në pikën P, prandej këto kontribute duhet të mblidhen nga të gjithë elementet e hapjes. Fitojmë

$$u = A \int \frac{1}{r_o r} e^{ik(r + r_o)} dS$$

Integrimi duhet të kryhet nëpër sipërfaqe të hapjes. Nëse me b e shënojmë largësinë nga qendra e sistemit të koordinateve deri në pikën P, sikurse shihet në figurën 129, atëherë nga përmasat e vogla të hapjes mund të marrim përafërsisht se vlenë $1/r_o \approx 1/a$ dhe $1/r \approx 1/b$. Eksponentin mund ta transferojmë në formën

$$r + r_o = a + b + (r - b) + (r_o - a)$$

dhe do të kemi për amplitudë komplekse

$$u = \frac{A}{ab} e^{ik(a + b)} \int e^{ik(r - b) + (r_o - a)} dS$$

Për ndryshim të rrugëve nga origjina deri te elementi i sipërfaqes dS shkruajmë

$$\begin{aligned} \Delta &= r - b \\ \Delta_o &= r_o - a \end{aligned} \qquad (2)$$

ndërsa konstanten përpara integralit e shënojmë me C. Fitojmë

$$u = C \int e^{ik(\Delta + \Delta_o)} dS \qquad (3)$$

Kjo formulë e shpreh parimin e Hajgens-Frenelit. Në problemet e difraksionit me ndihmën e saj do të njehsojmë amplitudën komplekse të dritës së përkulur e pastaj duke shfrytëzuar (XIX.1.6) e njehsojmë intensitetin e saj.

Në fund të theksojmë se dukuritë difraksionale i ndajmë në dy kategori: në dukuri të Fraunhoferit dhe të Frenelit. Në dukuri të difraksionit të Fraunhoferit bëjmë pjesë ato raste kur drita rëniese dhe e difraktuar janë paralele. Atëherë burimi i dritës dhe pika e vrojtimit janë të larguara pambarim. Praktikisht kjo arrihet ashtu që përpara dhe prapa pagesës vendoset thjerrëza përmbledhëse. E para vendoset në vatër të burimit dhe valët e tij i shndërron në paralele ndërsa e dyta këto rreze i mbledhë në vatër të vet. Dukuritë e difraksionit të Frenelit paraqiten kur burimi dhe vendi i vrojtimit gjenden në çfarëdo largësie nga hapja por jo në pambarim.

3. DIFRAKSIONI I FRAUNHOFERIT NË QARJE

a) Intensiteti i dritës së difraktuar

Le të kalojë drita nëpër qarje shumë të ngushë e cila gjendet në perde jo të tejdukshme. Teorikisht supozojmë se qarja është shumë e gjatë ashtu që problemin mund ta zgjidhim si njëdimensional. Praktikisht qarja me gjatësi prej 5 apo 10 cm vepron si pambarim e gjatë nëse gjërësia e saj është disa pjesë të milimetrit. Gjërësinë e saj do ta shënojmë me a sikurse tregon fig. 130. Origjinën e sistemit të koordinateve e vendosim në mes të qarjes. Elementin e sipërfaqes e marrim në vendin me apscisë ζ. Pasi problemi është redukuar në njëdimensional elementi i sipërfaqes redukohet në element të gjatësisë $d\zeta$. Supozojmë se drita një ngjyrshe paralele përhapet normal ndaj rrafshit të qarjes. Për dritë rëniese ndryshimi i rrugëve $\Delta_0 = 0$. Nga qarja drita prap vazhdon si tufë paralele në të gjitha kahjet. Nga të gjitha këto kahje do të zgjedhim ate e cila me drejtimin e dritës rëniese e mbyllë këndin α. Pasi që drita e difraktuar është paralele, të njëjtën gjatësi do të kenë rrezet nga pika T dhe M, prandej ndryshimi i rrugëve është

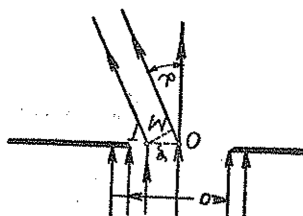


Fig. 130

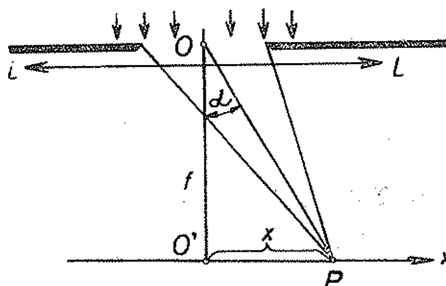


Fig. 131

i barabartë me gjatësinë OM. Këte e njehsojmë nga trekëndëshi OMT. Fitojmë

$$\Delta = \overline{OM} = \zeta \sin\alpha$$

ndërsa shprehja (XIX.2.3) redukohet në

$$u = C \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{ik\zeta\sin\alpha} d\zeta$$

Zakonisht nuk matet këndi α, por prapa qarjes vendoset thjerrëza përmbledhëse sikurse tregon fig. 131. Kjo thjerrëzë rrezet paralele i mbledhë në pikën P e cila qëndron në rrafshin e vatrës së saj. E vendosim në këte rrafsh sistemin tjetër të koordinateve me origjinë në boshtin optik të qarjes, pra në mesin e figurës difraksionale. Kështu pika P do të ketë apscisën x. E paraqesim këte apscisë në vend të këndit α. Nëse me f e shënojmë largësinë e vatrës së thjerrëzës, atëherë nga trekëndëshi $OO'P$ në fig. 131 kemi

$$\text{tg}\alpha = \frac{x}{f}$$

Në praktikë përdoret thjerrëza me largësi të madhe të vatrës ashtu që vlenë $x \ll f$, prandej këndi i përkuljes është i vogël dhe përafërsisht tangjensin mund ta zëvendësojmë me sinus. Pra,

$$\sin\alpha = \frac{x}{f}$$

dhe meqë $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ do të kemi

$$k \sin\alpha = \frac{2\pi x}{\lambda f}$$

dhe

$$u = C \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{i \frac{2\pi x}{\lambda f} \zeta} d\zeta \qquad (1)$$

Shënojmë shkurtimisht me

$$s = \frac{2\pi x}{\lambda f} \qquad (2)$$

dhe amplituda komplekse e ka formën

$$u = C \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{is\zeta} d\zeta = C \frac{e^{isa/2} - e^{-isa/2}}{i s} = \frac{2C}{s} \sin \frac{s a}{2} = Ca \left(\frac{\sin \dfrac{s a}{2}}{\dfrac{s a}{2}} \right)$$

Ndërsa sipas (XIX.1.6) për intensitet fitojmë

$$I = K C^2 a^2 \left(\frac{\sin \dfrac{s a}{2}}{\dfrac{s a}{2}} \right)^2 \qquad (3)$$

dhe nga (2)

$$I = K C^2 a^2 \left(\frac{\sin \dfrac{\pi a x}{\lambda f}}{\dfrac{\pi a x}{\lambda f}} \right)^2 \qquad (4)$$

Ka ngelë të përcaktojmë kuptimin fizik të konstantës në këte shprehje. Për $x = 0$ fitojmë vendin e rrezeve të pa difraktuara. Nëse intensitetin e tyre e shënojmë me I_o fitojmë

$$I_o = K C^2 a^2 \lim_{x \to o} \left(\frac{\sin \dfrac{\pi a x}{\lambda f}}{\dfrac{\pi a x}{\lambda f}} \right)$$

prej nga kuptojmë se

$$I_o = K\,C^2 a^2$$

kurse (4) do të jetë

$$I = I_o \left(\frac{\sin \dfrac{\pi a x}{\lambda f}}{\dfrac{\pi a x}{\lambda f}} \right)^2 \qquad (5)$$

Kjo është shprehja përfundimtare për shpërndarjen e intensitetit në figurën difraksionale e cila gjendet në rrafshin e vatrës së thjerrëzës përnbledhëse.

b) Diskutimi i shpërndarjes së intensitetit

Do të shqyrtojmë shpërndarjen e intensitetit të përshkruar me (5). Shënojmë shkurtimisht me $\frac{\pi a x}{\lambda f} = v$ dhe funksioni i intensitetit e ka formën

$$I = I_o \left(\frac{\sin v}{v} \right)^2$$

Ky funksion i ka minimumet për

$$\sin v = 0,\ I = 0$$

ose në vendet ku

$$v = \pm\, n\pi \ (n = 1, 2, 3 \ldots) \quad (6)$$

Në këto vende perdja është e errët. Për n nuk merret zero sepse atëherë $\lim\limits_{v \to 0} \left(\frac{\sin v}{v} \right)^2 = 1$ dhe në vend të minimumit paraqitet maksimumi me lartësi I_o. Maksimumet tjera fitohen duke e derivuar funksionin

$$f(v) = \frac{\sin v}{v}$$

Fitojmë

$$\frac{v \cos v - \sin v}{v^2} = 0$$

ose

$$\operatorname{tg} v = v \qquad (7)$$

Me ndihmën e këtij ekuacioni mund të përcaktojmë pozitat e maksimumeve. Ky është eku-

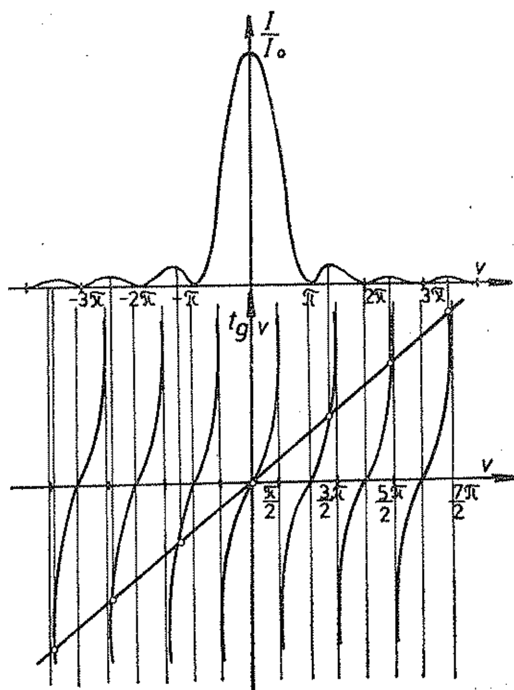


Fig. 132

acion transcedent dhe mund të zgjidhet numerikisht ose grafikisht. Në pjesën e poshtme të fig. 132 është paraqitur zgjidhja grafike e ekuacionit (7), ndërsa në pjesën e sipërme shpërndarja e intensitetit sipas (5). Për zgjidhje grafike së pari vizatohen lakoret $y = \text{tg}\, v$ dhe $y = v$. Lakorja e parë paraqet funksionin e tangjensit, ndërsa e dyta është drejtëz e cila kalon nëpër kuadrantin e parë dhe të tretë, por edhe nëpër origjinë. Pozitat e maksimumeve fitohen me prerjet e këtyre dy lakoreve. Këta gjenden në afërsi të $\pm 3 \frac{\pi}{2}$, $\pm 5 \frac{\pi}{2}$ etj. Kjo shihet edhe nga rezultaet numerike në tabelën vijuese

v	$1{,}430\,\pi$	$2{,}459\,\pi$	$3{,}470\,\pi$	$4{,}479\,\pi$	etj.
I/I_o	0,047	0,017	0,008	0,005	etj.

Në rendin e dytë janë paraqitur vlerat e intensiteteve, nëse vlera e atij qëndrore është 1. Vlerat e maksimumeve fitohen nga shprehja

$$\sin v = \frac{\text{tg}\, v}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 v}} = \frac{v}{\sqrt{1 + v^2}}$$

dhe nga (5)

$$I/I_o = \frac{1}{1 + v^2} \tag{8}$$

Prej nga kuptojmë se intensitetet tjera janë shumë më të vegjël se në fig. 132 ku shofim se në mes të figurës difraksionale maksimumi kryesore është i lartë dhe i gjerë. Majtas dhe djathtas intensiteti zvogëlohet deri në zero, pastaj rritet por nuk kalon vlerën 5% të maksimumit qendror. Kështu, radhiten maksimumet tjera në largësi të rregullta ndërmjet veti por janë mjaft të dobët.

Figura difraksionale përbëhet prej një vargu të vijave të ndriçuara dhe të errëta. Vija qendrore është më e ndriçuara dhe dy herë më e gjerë se vijat tjera.

Eksperimenti kryhet me dritë një ngjyrëshe sepse gjërësia e vijave varet prej gjatësisë valore të saj. Vijat e errëta gjenden në vendin me apscise

$$x = \pm n \frac{\lambda f}{a}$$

prandej për ngjyrë të kuqe vijat janë dy herë më të gjëra se për ngjyrë të kaltër. Përveç kësaj gjërësia e tyre është proporcionale e zhdrejtë me gjërësinë e qarjes a.

Nëse eksperimenti kryhet me dritë të bardhë, atëherë në ndonjë vend gjendet minimumi për njërën ngjyrë por ngjyrat tjera do të kenë mu në ate vend ndonjë vlerë të intensitetit dhe paraqitet ngjyra e përzierjes së tyre. Fitojmë vija paralele me ngjyra të ndryeshme.

4. DIFRAKSIONI NË DY QARJE PARALELE

Le të ketë perdja dy qarje paralele dhe njësoj të gjëra. E shënojmë gjërësinë e çdo njërës me a dhe supozojmë se ndërmjet veti janë të larguara për b. Do të njehsojmë shpërndarjen e intensitetit të difraksionit të Fraunhoferit në këto qarje.

E vendosim origjinën e sistemit të koordinateve në mes të dy qarjeve. Në mënyrë të ngjajshme sikurse më parë dhe me të njëjtin emërtim të simboleve fitojmë amplitudën komplekse

$$u = C\left(\int_{-a-\frac{b}{2}}^{-\frac{b}{2}} e^{is\zeta}\, d\zeta + \int_{\frac{b}{2}}^{a+\frac{b}{2}} e^{is\zeta}\, d\zeta\right)$$

E kryejmë integrimin

$$u = \frac{C}{i\,s}\left[e^{-is\,b/2} - e^{-is(a+b/2)} + e^{is(a+b/2)} + e^{isb/2}\right] =$$

$$= \frac{2C}{s}\left[\sin s(a+b/2) - \sin s\,b/2\right] = \frac{4C}{s}\cos s\frac{a+b}{2}\sin\frac{sa}{2} =$$

$$= 2C\,a\cos s\frac{a+b}{2}\left(\frac{\sin\frac{s\,a}{2}}{\frac{s\,a}{2}}\right)$$

Ndërsa intensiteti është

$$I = 4KC^2a^2\left(\frac{\sin\frac{s\,a}{2}}{\frac{s\,a}{2}}\right)^2\cos^2 s\frac{a+b}{2}$$

Nëse intensitetin në mes të figurës difraksionale e shënojmë me I_o, atëherë për $s = 0$ kemi

$$I_o = 4KC^2a^2$$

dhe fitojmë

$$I = I_o\left(\frac{\sin\frac{\pi a x}{\lambda f}}{\frac{\pi a x}{\lambda f}}\right)^2 \cos^2\frac{\pi(a+b)x}{\lambda f} \qquad (1)$$

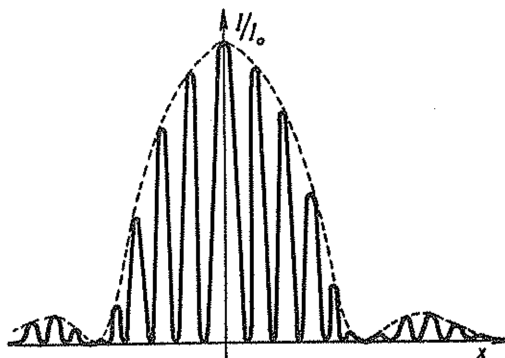


Fig. 133

Shihet se shprehja për intensitet përbëhet prej dy faktorëve. Prandej zerot e intensitetit fitohen aty ku cilido prej faktorëve është i barabartë me zero.

Faktorin e parë e kemi diskutuar hollësisht në mësimin e mëparshëm dhe zerot e tij janë për

$$x = \pm n \frac{\lambda f}{a}$$

Në fig. 133 me vija të ndërprera është paraqitur shpërndarja e intensitetit nga faktori i parë i (1).

Faktori i dytë paraqitet sepse kemi dy qarje. Zerot e tij gjenden në vendet e përcaktuara me

$$\frac{\pi(a+b)x}{\lambda f} = (2p+1)\frac{\pi}{2}$$

ose për vlerat të apscisës

$$x = \left(p + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda f}{a+b} \qquad (2)$$

Pasi që emëruesi $(a+b) > a$ zerot e faktorit të dytë ndërmjet veti janë më afër se sa ato të faktorit të parë. Në mes të zerove paraqiten maksimumet të cilat shihen në fig. 133 me vija të pa ndërprera. Lartësitë e maksimumeve të faktorit të dytë përcaktohen me vlerat e faktorit të parë në ato vende. Pra, si figurë difraksionale fitohen prap difraksioni në qarje por ky sistem është i mbuluar me vija të errëta ekuidistante. Këto vija janë njësoj të gjera dhe paraqesin vija të interferencës në mes qarjeve.

Eksperimentin e difraksionit në dy qarje e ka kryer T. Jangu dhe sipas tij quhet eksperiment i Jangut, i cili zakonisht shpjegohet si eksperiment për interferencë të dritës.

5. DIFRAKSIONI I DRITËS NË RRJETË OPTIKE

a) Shprehja për intensitet

Rrjetë optike quajmë sistemin e N qarjeve të njëjta dhe në mes veti paralele. Gjerësinë e çdo njërës e shënojmë me a. Largësia në mes të dy pikave fillestare të qarjeve fqinje quhet konstanta e rrjetës. Do ta shënojmë me d. Origjinën e sistemit të koordinateve e vendosim në mesin e qarjes së parë, ndërsa me ζ e shënojmë apscisën e ndonjë pike brenda kësaj qarje. Duke i shtuar konstantes d numrin e plotë m arrijmë deri te pika gjegjëse e qarjes $(m+1)$, prandej mund të shkruajmë

$$\zeta_{m+1} = \zeta + m\,d$$

Në mënyrë të ngjajshme sikurse te difraksioni në një qarje dhe duke shfrytëzuar emërtimin (XIX.3.2) fitojmë amplitudën komplekse për difraksion në rrjetë optike

$$u = C\sum_{m=0}^{N-1} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{is(\zeta + m\,d)}\, d\zeta \tag{1}$$

ose

$$u = C\sum_{m=0}^{N-1} e^{ismd} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{is\zeta}\, d\zeta$$

Këte integral e kemi zgjidhur te difraksioni në një qarje, prandej fitojmë

$$u = C\,a \left(\frac{\sin\dfrac{s\,a}{2}}{\dfrac{s\,a}{2}}\right) \sum_{m=0}^{N-1} e^{ismd}$$

Shuma e mbetur paraqet progresion gjeometrik prej N anëtarëve prandej do të kemi

$$u = C\,a \left(\frac{\sin\dfrac{s\,a}{2}}{\dfrac{s\,a}{2}}\right) \left(\frac{1 - e^{isNd}}{1 - e^{isd}}\right) =$$

$$= C\,a \left(\frac{\sin\dfrac{s\,a}{2}}{\dfrac{s\,a}{2}}\right) \frac{e^{isNd/2}}{e^{isd/2}} \left(\frac{e^{isNd/2} - e^{-isNd/2}}{e^{isd/2} - e^{-isd/2}}\right) =$$

$$= C\,a\,\frac{e^{isNd/2}}{e^{isd/2}} \left(\frac{\sin\dfrac{s\,a}{2}}{\dfrac{s\,a}{2}}\right) \left(\frac{\sin\dfrac{s\,N\,d}{2}}{\sin\dfrac{s\,d}{2}}\right)$$

Intensitetin e fitojmë duke e shumëzuar shprehjen e fundit me vlerën e saj të konjuguar

$$I = KC^2a^2 \left(\frac{\sin\dfrac{s\,a}{2}}{\dfrac{s\,a}{2}}\right)^2 \left(\frac{\sin\dfrac{sNd}{2}}{\sin\dfrac{s\,d}{2}}\right)^2$$

Edhe në këte rast e shënojmë me I_o e shënojmë intensitetin e atyre rrezeve të cilat nuk zhvendosen nga përhapja fillestare, pra intensitetin në mes të figurës difraksionale. Këte e fitojmë për $s = 0$. Faktori i parë është i barabartë me 1, por i dyti merr formë të papërcaktuar $0/0$. E njehsojmë vlerën e tij

$$\lim_{s\to o} \frac{\sin \frac{s N d}{2}}{\sin \frac{s d}{2}} = \lim_{s\to o} \frac{\frac{N d}{2}}{\frac{d}{2}} \frac{\cos \frac{s N d}{2}}{\cos \frac{s d}{2}} = N$$

Prandej është

$$I_o = KC^2a^2N^2$$

ose

$$KC^2a^2 = \frac{I_o}{N^2}$$

Ndërsa intensiteti

$$I = \frac{I_o}{N^2} \left(\frac{\sin \frac{s a}{2}}{\frac{s a}{2}} \right)^2 \left(\frac{\sin \frac{s N d}{2}}{\sin \frac{s d}{2}} \right)^2 \qquad (2)$$

Kjo është shprehja për shpërndarjen e intensitetit difraksional në rrjetë optike.

b) Diskutimi i rezultatit

Shprehja për shpërndarje të intensitetit përmban dy faktorë. I pari tregon shpërndarjen e intensitetit difraksional në një qarje, ndërsa i dyti paraqet interferencën e dritës nga të gjitha qarjet. Do të shqyrtojmë më hollësisht faktorin e dytë, pasi që i pari na është i njohur. E shënojmë shkurtimisht me

$$\frac{s d}{2} = v$$

dhe ky faktor do të ketë formën

$$f(v) = \frac{\sin N v}{\sin v}$$

Kuptohet se minimumet e këtij funksioni janë zerot

$$f = 0$$

për

$$\sin N v = 0$$

ose

$$N v = n\pi \quad \text{për} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Pra, pozitat e zerove të funksionit janë për

$$v = \frac{n}{N} \pi \tag{3}$$

Këtu nuk duhet të merren ato vlera për të cilat

$$\frac{n}{N} = p \quad p = 1, 2, 3, \ldots$$

sepse atëherë

$$v = p\pi$$

dhe funksioni $f(v)$ e merr formën e pacaktuar 0/0. Vlerën e kësaj shprehje e kemi përcaktuar më parë dhe fituam N^2. Kjo tregon se në këto vende nuk gjenden zerot e funksionit por maksimumet me lartësi

$$f(p\pi) = N^2$$

Kuptojmë se këto maksimume janë shumë të lartë. I quajmë maksimume kryesore të intensitetit difraksional të rrjetës optike.

I përcaktojmë edhe maksimumet tjera të funksionit duke e derivuar sipas v. Fitojmë ekuacionin

$$N \cos Nv \cdot \sin v - \cos v \cdot \sin Nv = 0$$

i cili shndërrohet në formën

$$N \operatorname{tg} v = \operatorname{tg} Nv \tag{4}$$

Zgjidhja e këtij ekuacioni transcedent mund të kryhet në mënyrë numerike duke shfrytëzuar tabelat, por edhe pa zgjidhje të tij mund të përfundojmë se këto maksimume janë të ulët. I quajmë maksimume sekundare. Në të vërtetë funksionin $f(v)$ mund ta interpretojmë si funksion $\sin^2 Nv$ amplituda e të cilit është e përcaktuar me funksionin $\frac{1}{\sin^2 v}$. Në fig. 134 është paraqitur funksionin $f(v)$ për $N = 8$. Në vendet ku $v = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ gjenden maksimumet kryesore me lartësi $8^2 = 64$. Për $v = \frac{n}{N}$, ku $\frac{n}{N} \neq p$ gjende zerot e intensitetit. Shihet se për $N = 8$, janë 7 zero ose në përgjithësi $N - 1$. Në mes tyre janë maksimumet relativisht të dobët. Të këtillë janë 6 ose në përgjithësi $N - 2$.

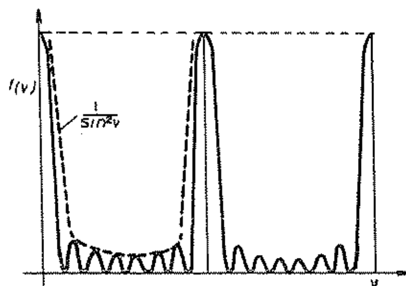


Fig. 134

Që të fitojmë intensitetin e përshkruar me funksionin (2) këte funksion duhet ta shumëzojmë me faktorin e parë. Ky është faktori i modulimit për funksionin $f(v)$ dhe për këte arsye të gjithë maksimumet kryesore nuk e kanë të njëjtën lartësi por zvogëlohen sikurse tregon fig. 135.

c) Aftësia ndarëse e rrjetës optike

Rrjeta optike me numër të vogël të qarjeve nuk ka zbatim praktik. Zakonisht përdoren rrjetat me disa mija qarje. Në këto, maksimumet kryesore janë tepër të lartë dhe meqë numri i qarjeve është i madh zerot janë të renditura shumë afër ndërmjet veti, ashtu që maksimumet sekundare kanë lartësi të papërfillshme. Për këte arsye figura di-

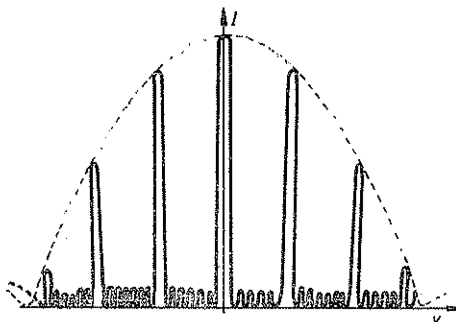


Fig. 135

fraksionale është e përbërë nga vargu i vijave të holla të ndriçuara dhe njësoj të larguara në prapavinë e errët. Vijat e ndriçuara paraqesin maksimumet kryesore. Pasi që pjesët tjera janë të intensitetit të dobët, nuk shihen, dhe veprojnë si prapavijë e errët. Maksimumet krye-

sore janë më të hollë dhe më të ndriçuar sa më i madh të jetë numri i qarjeve në rrjetë. Pozita e maksimumeve kryesore është e përcaktuar me $v = p\pi$ dhe meqë $v = \dfrac{s\,d}{2} = \dfrac{\pi x d}{\lambda f}$ kemi

$$x = p\,\frac{\lambda f}{d} \tag{5}$$

Shohim se varet prej gjatësisë valore të dritës së përdorur. Në fig. 136 janë vizatuar vijat difraksionale të cilat fitohen nga rrjeta optike për ngjyrë të kuqe dhe të kaltër. Vijat e kuqe janë të zhvendosura më tepër se sa vijat e kaltëra.

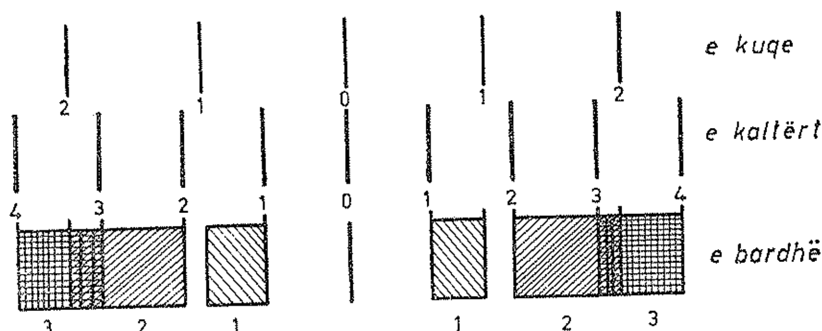


Fig. 136

Nëse nëpër rrjetë lëshohet dritë e bardhë, atëherë maksimumet kryesore të ngjyrave të ndryeshme spektrale gjenden njëri pranë tjetrit dhe në perde fitojmë spektrin. Në mes të figurës gjendet vija e bardhë e dritës së pa difraktuar. Majtas dhe djathtas saj simetrikisht janë të vendosura spektret e rendit të parë të përbërë nga maksimumet kryesore të para. Pastaj renditen spektret e rendit të dytë, të tretë dhe të rendeve të larta. Spektri i rendit të dytë është më i gjerë se spektri i rendit të parë, por më i dobët për nga intensiteti. Spektret e rendeve të larta në mes veti përzihen.

Duke u bazuar në këte kuptojmë se rrjeta optike shërben si aparat spektral dhe si e tillë gjithmonë shfrytëzohet.

Mund të bëjmë pyetjen: Sa është aftësia ndarëse e rrjetës optike? Aftësia ndarëse e rrjetës përkufizohet si herës

$$\frac{d\lambda}{\lambda}$$

ku $d\lambda$ është ndryshimi i gjatësive valore të dy ngjyrave të afërta të cilat akoma mund t'i dallojmë në spektër. Si kriterium të ndarjes së mirë të dy ngjyrave merret rasti i përputhjes së maksimumit kryesorë të njërës me zeron e parë të maksimumit kryesorë të tjetrës.

Kuptuam më parë se maksimumi kryesorë për gjatësinë valore λ gjendet në vendin e përcaktuar me (5). Maksimumi kryesor i dritës me gjatësi valore $\lambda + d\lambda$ gjendet në vendin

$$x' = p \frac{(\lambda = d\lambda)f}{d}$$

Në këte vend duhet të gjendet zeroja për gjatësinë valore λ. Pasi që $p = n/N$ për vend të zeros kemi

$$p' = \frac{n+1}{N} + d = \frac{1}{N}$$

e cila gjendet për

$$x' = \left(p + \frac{1}{N}\right) \frac{\lambda f}{d}$$

I barazojmë këto shprehje

$$p \frac{(\lambda+d\lambda)f}{d} = \left(p + \frac{1}{N}\right) \frac{\lambda f}{d}$$

$$p\lambda + p\,d\lambda = p\lambda + \frac{\lambda}{N}$$

prej nga

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{pN} \qquad (6)$$

Kjo është shprehja për afërsi të ndarjes së rrjetës optike. Shohim se, që të jetë $d\lambda$ sa më e vogël duhet p dhe N të jenë sa më të mëdhenj. Rendi i spektrit nuk mund të zmadhohet sepse në spektret e rendeve të larta paraqitet mbulimi dhe përzierja e tyre, prandej duhet të merret N i madh. Pra, duhet të merret numri i madh i qarjeve. Ky numër në metodat klasike të ndërtimit të tyre është i kufizuar, ndërsa në kohën më të re përparësi ka fituar metoda holografike e ndërtimit të tyre. Rrjetat e mira kanë numër shumë të madh të qarjeve. Sot me metoda holografike arrihen të përfitohen rrjeta me disa mija qarje në një mm.

6. RRJETA FAZORE

Në rrjetat e zakonshme optike drita është e koncentruar më së shumti në rendin zero, i cili i përgjigjet asaj të pa difraktuar. Për fat të keq pjesa më e ndriçuar e figurës difraksionale nuk tregon dispersion dhe si e tillë nuk shfrytëzohet. Në aparatet spektrale kërkohet që intensiteti maksimal të gjendet në spektrin e rendit të parë apo të dytë. Kjo mund të arrihet me ndihmën e rrjetave të tipit tjetër të cilat njihen si rrjeta fazore.

Rrjeta optike fazore e lëshon dritën nga të gjitha pjesët për ndryshim të rrjetave të zakonshme të cilat përbëhen nga sistemi i qarjeve të cilat ndërmjet veti ndahen me vendet jo lëshuese. Por, trashësia e materialit të rrjetës fazore ndërron periodikisht. Ky ndërrim i trashësisë shkakton paraqitjen e ndryshimit të fazës së dritës depërtuese. Prandej, këto rrjeta quhen fazore. Rrjeta fazore mund të ketë forma të ndryeshme të profilit. Këtu do të kryejmë njehsimin për rrjetën fazore në të cilën faza e dritës ndërron si funksion linear i x. Prerja e kësaj rrjete është paraqitur në fig. 137. Gjatësia e një periode paraqet konstanten e rrjetës d. Përgjatë saj trashësia e shtresës rritet për h.

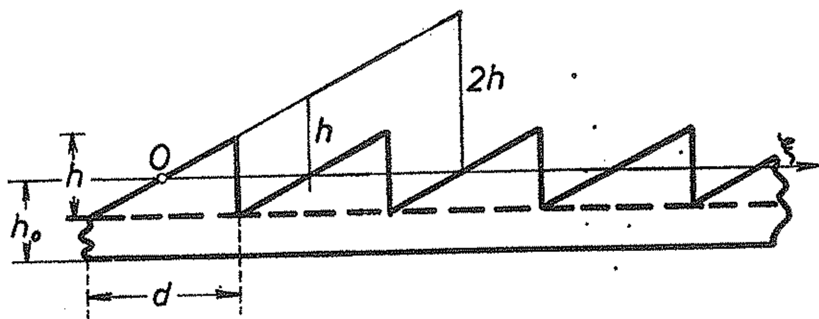


Fig. 137

E vendosim sistemin e koordinateve me origjinë në mes të periodës së parë. Trashësinë e shtresës nën pikën 0 e shënojmë me h_o. Ekuacioni i drejtimit të sipërfaqes së periodës së parë shprehet në formën

$$\eta = \frac{h}{d} \zeta$$

Prandej në vendin e apscisës $\zeta < d/2$ trashësia e shtresës është

$$D = h_o + \frac{h}{d} \zeta$$

Kalimi i dritës nëpër shtresën e materialit me indeks të thyerjes n fiton ndryshim faze

$$\delta\, k n D = k n h_o + k n \frac{h}{d} \zeta \tag{1}$$

Shënojmë shkurtimisht me:

$$\delta_o = k n h_o \tag{2}$$

$$\alpha = k n \frac{h}{d}$$

dhe ndryshimin e fazës e shkruajmë në formën

$$\delta = \delta_o + \alpha\zeta \tag{3}$$

Shprehja (3) vlenë vetëm për periodën e parë të rrjetës. Lehtë mund të tregohet se vlenë për çdo periodë tjetër. Në pikën e periodës së m-të apscisa është $\zeta + m\,d$, ndërsa ordinata e saj është

$$\eta = \frac{h}{d}\,(\zeta + m\,d) - m\,h = \frac{h}{d}\,\zeta$$

Këtu është zbritur mh sepse në fund të çdo periode duhet të zbritet ordinata për lartësinë h. Rezultati i fituar kuptohet pa kurrfarë njehsimi nga periodiciteti i rrjetës.

Ndryshimi i fazës (3) në amplitudën komplekse paraqitet në formë të faktorit $e^{-i\delta}$ sikurse rrjedh nga përkufizimi i saj (XIX.1.4). Parashenji minus tregon se gjatë kalimit të dritës nëpër shtresë më të trashë paraqitet ngecje e fazës.

Nga ky ndryshim faze, shprehjes (XIX.2.1) të parimit të Hajgensit duhet t'i shtojmë edhe këte faktor. Do të kemi

$$u = C \sum_{m=o}^{N-1} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{-i(\delta_o + \alpha\zeta)}\, e^{is(\zeta + md)}\, d\zeta \tag{4}$$

ose

$$u = C\, e^{-i\delta_o} \sum_{m=o}^{N-1} e^{ismd} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{i(s-\alpha)\zeta}\, d\zeta \tag{5}$$

Shumën përpara integralit e kemi njehsuar te rrjeta optike e zakonshme dhe e ka vlerën

$$\sum_{m=o}^{N-1} e^{ismd} = \frac{e^{isNd/2}}{e^{isd/2}} \left(\frac{\sin \frac{s\,N\,d}{2}}{\sin \frac{s\,d}{2}} \right) \tag{6}$$

Edhe integrali është plotësisht i ngjajshëm me ate të rrjetës së zakonshme me të vetmin ndryshim se në vend të parametrit s në (XIX.3.1) këtu paraqitet parametri $s - \alpha$. Do të kemi

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{i(s-\alpha)\zeta}\, d\zeta = d \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}\,(s-\alpha)d}{\frac{1}{2}\,(s-\alpha)d} \tag{7}$$

I zëvendësojmë shprehjet (6) dhe (7) në (5). Fitojmë

$$u = C\,d \cdot \left(\frac{e^{i(sNd/2 - \delta_o)}}{e^{isd/2}} \right) \left(\frac{\sin\,(s-\alpha)\,\frac{d}{2}}{(s-\alpha)\,\frac{d}{2}} \right) \left(\frac{\sin sNd/2}{\sin sd/2} \right) \tag{8}$$

Përfundimisht fitojmë për intensitet

$$I = KC^2d^2 \left(\frac{\sin (s-\alpha) \frac{d}{2}}{(s-\alpha) \frac{d}{2}} \right)^2 \left(\frac{\sin sNd/2}{\sin sd/2} \right)^2 \tag{9}$$

Faktori i dytë në këte shprehje është identik me faktorin interferencial të rrjetës së zakonshme optike, prandej shpërndarja e intensitetit shprehet me të njëjtën lakore sikurse në fig. 134. Faktori i parë përcakton lartësitë e maksimumeve kryesore. Ky ndryshon nga faktori i modulimit (XIX.5.2), prandej do ta shqyrtojmë më hollësisht.

Shihet qartë se edhe ky faktor e ka formën $f = (\sin^2 v)/v^2$, me ndryshim se tani

$$v = (s-\alpha) \frac{d}{2} \tag{10}$$

Ky funksion është paraqitur grafikisht në fig. 138. Maksimumi qendror i saj gjendet në vendin ku $v = 0$ ose $s = \alpha$. I zëvendësojmë vlerat (XIX.3.2) dhe (2)

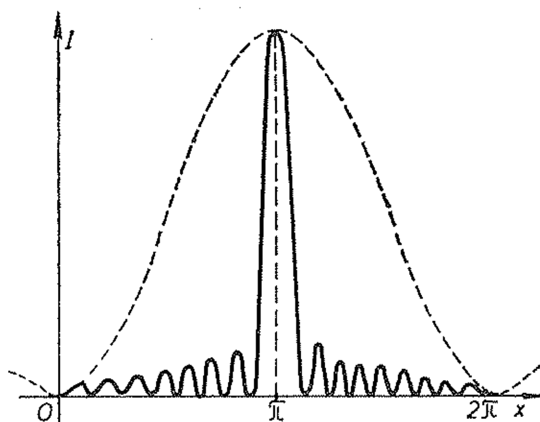


Fig. 138

$$\frac{2\pi x}{\lambda f} = \frac{2\pi}{\lambda} n \frac{h}{d}$$

ose

$$x = \frac{nhf}{d} \tag{11}$$

Për këte vlerë të x gjendet maksimumi i funksionit të modulimit. Kuptojmë se nuk gjendet në mes të figurës difraksionale, por është i zhvendosur nga kjo pozitë.

Maksimumi i parë kryesorë i anëtarit interferencial gjendet sipas (XIX.5.5) në vendin

$$x = \frac{\lambda f}{d}$$

Nëse dëshirojmë që ky maksimum të gjendet në vendin e maksimumit kryesorë të funksionit të modulimit, atëherë këte duhet ta barazojmë me (11). Fitojmë

$$\lambda = n\,h$$

ose

$$h = \frac{\lambda}{n} \tag{12}$$

Nga shpërndarja e funksionit të intensitetit në fig. 138 rrjedh se zerot e saj gjenden plotësisht në vendet ku funksioni në fig. 132 i ka maksimumet. Prandej zgjidhja e ka vetëm një maksimum kryesor. Rrjeta e këtillë e ka vetëm një spektër sikurse tregon vija e pandërprerë në fig. 138.

7. DIFRAKSIONI I FRAUNHOFERIT NË HAPJE KATËRKËNDËSHI

Do të kryejmë njehsimin e shpërndarjes së intensitetit të dritës për difraksion të Fraunhoferit në hapje katërkëndëshi. Përmasat e hapjes i shënojmë me a dhe b. Origjinën e sistemit të koordinateve e vendosim në pikprerjen e diagonaleve të hapjes, ndërsa boshtet ζ dhe η i vendosim paralele me anët e saj. Ndonjë element i sipërfaqes së hapjes do të jetë

$$dS = d\zeta\, d\eta$$

Le të jetë drita rëniese paralele dhe le të përhapet normalisht ndaj rrafshit të hapjes. Në raste të këtilla nuk ekziston ndryshimi i rrugëve në dritën e rënies, prandej $\Delta_o = 0$. Kahja e përhapjes së dritës pas hapjes, le të përcaktohet me vektorin unitar

$$\vec{e}_o = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$$

Pika T rreth së cilës gjendet elementi i shqyrtuar i sipërfaqes e ka vektorin e pozitës

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ O \end{pmatrix}$$

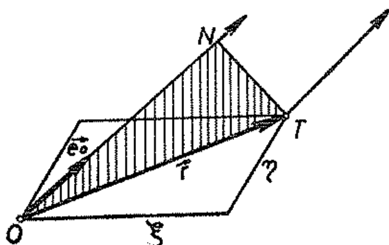


Fig. 139

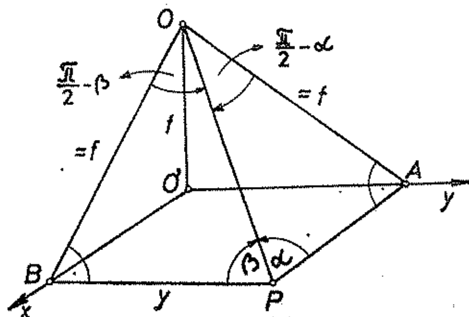


Fig. 140

Nga fig. 139 shihet se ndryshimi i rrugëve të rrezeve të difraktuara nëpër pikën T dhe pikën O është i barabartë me gjatësinë ON. Këte mund ta shprehim me formulën

$$\triangle = \overline{ON} = \vec{r}\,\vec{e}_o = \zeta \cos\alpha + \eta \cos\beta$$

Figurën difraksionale e fitojmë në rrafshin e vatrës së thjerrëzës përmbledhëse të vendosur paralel me rrafshin e hapjes. Në te e vendosim sistemin koordinat $O'\,x\,y$ paralele me sistemin e hapjes. Le të jetë largësia e vatrës f mjaft e madhe në krahasim me koordinatet x dhe y të vendit në figurën difrakisonale. Atëherë, në vend të këndeve α dhe β mund të paraqesim koordinatet e pikës x dhe y në të cilën thjerrëza i mbledhë rrezet e difraktuara të dritës. Në fig. 140 është vizatuar pika P me koordinatet x dhe y. Rrezja e dritës e cila vjen nga mesi i thjerrëzës në këte pikë me kahjen e koordinateve i mbyllë këndet α dhe β. Pasi që largësia e vatrës është e madhe, $\overline{OO'} = f$, ndërsa koordinatet x dhe y të vogla, përafërsisht mund të marrim se $\overline{OA}$ dhe $\overline{OB}$ janë të barabarta me f. Nga fig. 140 rrjedh se

$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \approx \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \simeq \frac{x}{f}$$

dhe në mënyrë të ngjajshme

$$\cos\beta \simeq \frac{y}{f}$$

ndërsa ndryshimi i rrugëve

$$\triangle = \frac{x}{f}\zeta + \frac{y}{f}\eta$$

E zëvendësojmë vlerën e fituar në shprehje të parimit të Hajgensit (XIX.2.3)

$$u = C \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{ik(\zeta x/f + \eta y/f)}\, d\zeta\, d\eta \qquad (1)$$

Shënojmë shkurtimisht me:

$$s = k\,\frac{x}{f} = \frac{2\pi x}{\lambda f}$$

$$t = k\,\frac{y}{f} = \frac{2\pi y}{\lambda f} \qquad (2)$$

dhe (1) e merr formën

$$u = C \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{is\xi}\, d\xi \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{it\eta}\, d\eta$$

Fitojmë pas integrimit për amplitudë

$$u = C\, a\, b \left(\frac{\sin \dfrac{s\,a}{2}}{\dfrac{s\,a}{2}}\right) \left(\frac{\sin \dfrac{t\,b}{2}}{\dfrac{t\,b}{2}}\right)$$

dhe për intensitet

$$I = K\, C^2 a^2 b^2 \left(\frac{\sin \dfrac{s\,a}{2}}{\dfrac{s\,a}{2}}\right)^2 \left(\frac{\sin \dfrac{t\,b}{2}}{\dfrac{t\,b}{2}}\right)^2$$

dc	dg	d^2	d	d^2	dg	dc	
c	g	d	1	d	g	c	
dc	dg	d^2	d	d^2	dg	dc	
gc	g^2	dg	g	dg	g^2	gc	$\frac{\lambda f}{b}$
					$\frac{\lambda f}{a}$		

Fig. 141

Mesi i figurës difraksionale fitohet për $x = 0$ dhe $y = 0$, përkatësisht për $s = 0$ dhe $t = 0$. Nëse me I_o e shënojmë intensitetin në mes të figurës difraksionale, fitojmë

$$I_o = K\, C^2\, a^2 b^2$$

Përfundimisht për intensitet fitojmë shprehjen

$$I = I_o \left(\frac{\sin \dfrac{\pi a x}{\lambda f}}{\dfrac{\pi a x}{\lambda f}}\right)^2 \left(\frac{\sin \dfrac{\pi b\, y}{\lambda f}}{\dfrac{\pi b\, y}{\lambda f}}\right)^2 \qquad (3)$$

Shihet se kemi fituar dy sisteme të vijave të cilat qëndrojnë normal ndërmjet veti të cilat i kemi paraqitur në fig. 141. Largësia ndërmjet vijave të errëta në njërin drejtim është $\frac{\lambda f}{a}$, ndërsa në tjetrin $\frac{\lambda f}{b}$. Përfundojmë se anës më të gjatë të hapjes i përgjigjet gjerësia më e vogël e vijës dhe anasjelltas. Edhe në këte rast vijat qendrore janë dy herë më të gjera se ato anësore.

$$d = 4/9\, \pi^2$$

$$g = 4/25\, \pi^2$$

$$c = 4/49\, \pi^2$$

8. DIFRAKSIONI I FRAUNHOFERIT NË HAPJE RRETHORE

Le të gjendet hapja rrethore në perde të pa tejdukshme. Rrezen e hapjes e shënojmë me a, ndërsa origjinën e sistemit të koordinateve e vendosim në qendër të hapjes. Nga simetria rrethore është më e arsyeshme të shfrytëzojmë koordinatet polare ρ dhe φ. Edhe në këte rast supozojmë se drita rëniese është paralele dhe përhapet normal ndaj rrafshit të hapjes. Gjithashtu, nuk ekziston ndryshimi i rrugëve në dritën rëniese $\Delta_o = 0$. Për përcaktimin e ndryshimit të rrugëve në dritën e difraktuar shërbehemi nga fig. 142, në të cilën hapja rrethore është paraqitur në projeksion të pjerrët. Elementi i sipërfaqes rreth pikës T do të jetë

$$dS = \rho d\rho d\varphi$$

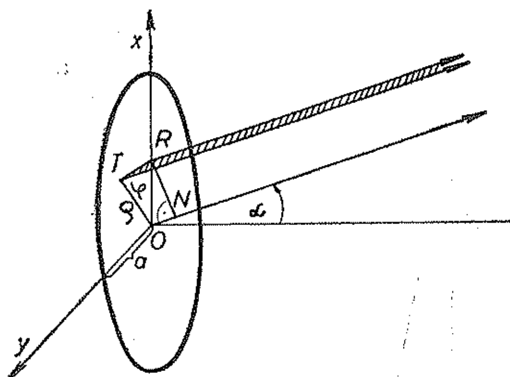


Fig. 142

E shqyrtojmë dritën e cila zhvendoset për këndin α nga boshti i hapjes. Pika R paraqet projeksionin e pikës T në boshtin x, prandej ndryshimin e rrugëve në mes të rrezeve nëpër T dhe 0 e përcaktojmë si ndryshim në mes të pikave R dhe 0. Nga fig. 142 shohim se ky ndryshim i rrugëve është i barabartë me gjatësinë. ON. Pra,

$$\Delta = \overline{ON} = \overline{OR} \sin\alpha$$

Meqë

$$\overline{OR} = \overline{OT} \cos\varphi = \rho \cos\varphi$$

për ndryshim të rrugëve fitojmë

$$\Delta = \rho \cos\varphi \sin\alpha$$

ndërsa shprehja e parimit të Hajgensit do të ketë formën

$$u = C \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{ik\rho \cos\varphi \sin\alpha} \rho d\rho d\varphi$$

Rrezet paralele i mbledhim në rrafshin e vatrës së thjerrëzës përmbledhse. Rrezet e shqyrtuara do të bashkohen në pikën e figurës difraksionale të larguar për r nga qendra e saj. Nga se largësia e vatrës së thjerrëzës është e madhe, mund të marrim përafërsisht

$$\sin\alpha = \frac{r}{f}$$

prandaj

$$u = C \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{i \frac{2\pi r}{\lambda f} \rho \cos\varphi} \rho d\rho d\varphi$$

Shënojmë shkurtimisht me

$$s = \frac{2\pi r}{\lambda r}$$

dhe për amplitudë komplekse fitojmë

$$u = C \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{is\rho \cos\varphi} \rho d\rho d\varphi \qquad (1)$$

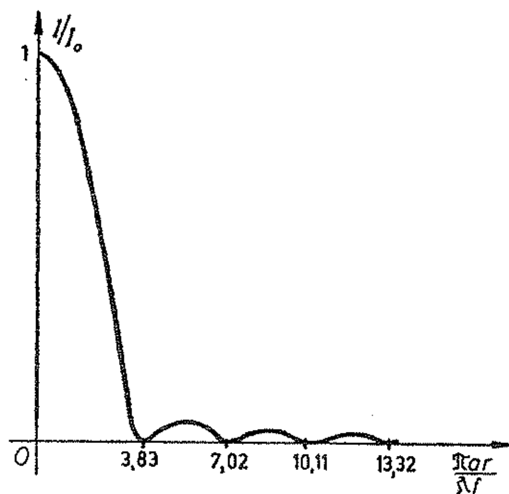


Fig. 143

Në shprehjen (1) gjendet integrali i njohur nga teoria e funksioneve të Beselit

$$\int_0^{2\pi} e^{is\rho \cos\varphi} d\varphi = 2\pi J_o(s\rho) \qquad (2)$$

ku: J_o paraqet funksionin e Beselit të rendit zero. Nga (2) për shprehje (1) fitojmë

$$u = 2\pi C \int_0^a J_o(s\rho) \rho \, d\rho$$

Me zëvendësimin

$$x = s\rho$$

do të jetë

$$u = \frac{2\pi C}{s^2} \int_0^{sa} J_o(x) \cdot x \, dx$$

Për integralin e fundit shfrytëzojmë formulën e njohur nga teoria e funksioneve të Beselit

$$\int_0^{sa} x J_o(x) \, dx = x J_1(x) \Big|_0^{sa} = sa \, J_1(sa)$$

Pra,

$$u = \pi C a^2 \frac{2 J_1(sa)}{sa}$$

dhe intensiteti

$$I = I_o \left[\frac{2 J_1(sa)}{sa} \right]^2 \qquad (3)$$

Këtu me I_o e kemi shënuar konstanten $K\pi^2 C^2 a^4$.

Në fig. 143 është paraqitur varshmëria e intensitetit të dritës së difraktuar nga argumenti $\frac{\pi a r}{\lambda f}$. Ky funksion i ka minimumet $I = 0$ në vendet ku:

$$\frac{\pi a r}{\lambda f} = 3{,}83;\ 7{,}02;\ 10{,}17;\ 13{,}32$$

Maksimumet gjenden në mes tyre. Për $r = 0$ gjendet maksimumi kryesor për të cilin $I/I_o = 1$. Maksimumet tjerë gjenden në vendet ku:

$$\frac{\pi a r}{\lambda f} = 5{,}14;\ 8{,}46;\ 11{,}62$$

me vlera të intensitetit

$$\frac{I}{I_o} = 0{,}0175;\ 0{,}0042;\ 0{,}0016$$

Figura difraksionale përbëhet nga një sipërfaqe rrethore e ndriçuar e cila është e mbuluar me vija të errëta dhe të ndriçuara. Sipërfaqja qendrore është më e ndriçuar në mes dhe kah skajet e saj ky ndriçim zvogëlohet sikurse shihet nga fig. 143. Ndonjëherë nga ndriçimi i dobët unazat e ndriçuara nuk shihen përveç sipërfaqes qendrore.

9. DIFRAKSIONI I FRAUNHOFERIT NË DY HAPJE RRETHORE

Le të përhapet drita normale ndaj rrafshit në të cilin gjenden dy hapje rrethore të vogla. Origjinën e sistemit të koordinateve e vendosim në qendër të hapjes së parë. Atëherë qendra e hapjes së dytë është e larguar për d dhe qëndron në bosht të apscisës.

Të dy hapjet i ndajmë në elemente të vogla të sipërfaqes $d\zeta d\eta$ të përshkruar rreth pikës ζ dhe η në hapjen e parë dhe rreth koordinateve $\zeta + d$ dhe η në hapjen e dytë.

Për amplitudë komplekse të dritës së difraktuar kemi

$$u = C\left(\int\int e^{is\xi} e^{it\eta}\, d\zeta\, d\eta + \int\int e^{is(\xi + d)} e^{it\eta}\, d\zeta\, d\eta\right)$$

Këtu i kemi shfrytëzuar emërtimet (XIX.7.2). Shprehjen e mëparshme mund ta shkruajmë edhe në formën

$$u = C(1 + e^{isd}) \int\int e^{is\xi} e^{it\eta}\, d\zeta\, d\eta$$

Integrimi duhet kryer nëpër sipërfaqe të asaj hapje në të cilën gjendet origjina e sistemit koordinat. Ky integral na jep amplitudën komplekse për difraksion në një hapje rrethore. Meqë një herë e kemi zgjidhur në (XIX.8) këtu e shfrytëzojmë rezultatin e gatshëm. Pra, duke u shërbyer nga shprehjen (XIX.8.3) për intensitet të diferaksionit në dy qarje fitojmë

$$I = I_1 |1 + e^{isd}|^2 \qquad (1)$$

Këtu me I_1 e kemi shënuar intensitetin (XIX.8.3). Faktorin e dytë të (1) e transformojmë në formën

$$1 + e^{isd} = e^{isd/2}\ (e^{-isd/2} + e^{isd/2}) = e^{isd/2}\, 2\cos\frac{sd}{2}$$

Prandej përfundimisht fitojmë

$$I = I_1 \cdot 4\cos^2\frac{s\,d}{2}$$

Rezultati i fituar tregon se në figurën difraksionale paraqitet sistem i unazave të ndritshme dhe të errëta me sipërfaqe qendrore mjaft të ndriçuar sikurse tregon fig. 143, por kjo figurë është e mbuluar me vija të interferencës të cilat i shpreh faktori $\cos^2\frac{s\,d}{2}$. Ky është sistem i vijave të errëta dhe të ndritshme në mes veti paralele dhe njësoj të larguara.

10. DIFRAKSIONI I FRENELIT NË GJYSMË RRAFSH

a) Përfitimi i shprehjes për intensitet

Të mendojmë se pengesë për përhapje të dritës është rrafshi i patejdukshëm i cili e zë gjysmën e hapësirës BA. Pjesa tjetër AC është e lirë për përhapje të saj, (fig. 144). Që problemi të shndërrohet në njëdimensional supozojmë se tehu A i gjysmë rrafshit është pambarim i gjatë. Paralel me këte është i vendosur rrafshi në të cilin e kërkojmë shpërndarjen e intensitetit difraksional. Përpara tehut të gjysmë rrafshit gjendet burimi i dritës një ngjyrëshe i cili e ka formën vijore. Burimi i saj është i vendosur ashtu që segmenti $\overline{MA}$ qëndron paralel me tehun në A. Në praksë largësitë $\overline{MA}$ dhe $\overline{AO'}$ janë disa metra.

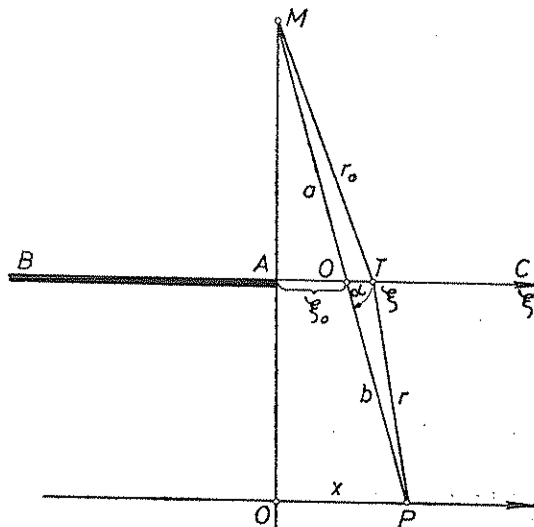


Fig. 144

Do të përcaktojmë shpërndarjen e intensitetit në pikën P të rrafshit, të larguar nga pika O' për x. Pikën P e bashkojmë me burimin M. Ky segment e pret rrafshin BC në pikën O të cilën e zgjedhim për origjinë të sistemit të të koordinateve $O\zeta$. Kësisoji tehu i gjysmë rrafshit e ka apscisën ζ_o. Do të shënojmë segmentet:

$$\overline{OM} = a \text{ dhe } \overline{OP} = b.$$

Pjesën e gjysmë rrafshit nëpër të cilën drita përhapet lirisht e ndajmë në elemen-

te të vogla të sipërfaqes të cilët nga gjatësia pambarim e madhe e tehut në A redukohen në elemente të gjërësisë $d\zeta$. Të mendojmë se një element i këtillë gjendet në pikën T me apscisë ζ. Do të shënojmë gjatësitë me:

$$\overline{MT} = r_o \text{ dhe } \overline{TP} = r$$

Së pari duhet të njehsojmë ndryshimin e rrugëve. Për këte e shfrytëzojmë teoremën e kosinusit për trekëndëshin MOT

$$r_o = (a^2 + \zeta^2 + 2a\zeta \cos\alpha)^{1/2}$$

ose

$$r_o = a\left(1 + \frac{\zeta^2}{a^2} + \frac{2\,\zeta}{a}\cos\alpha\right)^{1/2}$$

Meqë $\zeta/a < 1$, mund ta zbërthejmë në seri të binomit dhe të marrim në konsiderim anëtarët e shkallës së parë dhe të dytë të $\dfrac{\zeta}{a}$. Pra,

$$r_o = a\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\zeta^2}{a^2} + 2\,\frac{a}{\zeta}\cos\alpha\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{\zeta^2}{a^2} + 2\frac{\zeta}{a}\cos\alpha\right)^{2}\cdots +\right]$$

$$r_o = a\left(1 + \frac{\zeta^2}{2a^2} + \frac{\zeta}{a}\cos\alpha - \frac{\zeta^2}{2a^2}\cos^2\alpha\right)$$

prej nga

$$\Delta_o = r_o - a = \frac{\zeta^2}{2a} + \zeta\cos\alpha - \frac{\zeta^2}{2a}\cos^2\alpha$$

Ndërsa nga trekëndëshi OTP kemi

$$r = (b^2 + \zeta^2 - 2b\zeta\cos\alpha)^{1/2}$$

dhe në mënyrë të ngjashme fitojmë

$$\Delta = r - b = \frac{\zeta^2}{2b} - \cos\alpha - \frac{\zeta^2}{2b}\cos^2\alpha$$

Ndryshimi i rrugëve është

$$\Delta_o + \Delta = \frac{\zeta^2}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(1 - \cos^2\alpha)$$

ose

$$\Delta_o + \Delta = \frac{\zeta^2}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\sin^2\alpha \tag{1}$$

Amplituda komplekse e lëkundjeve dritësore në pikën P është

$$u = C \int_{\zeta_0}^{\infty} e^{i \frac{k}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) sin^2 \cdot \zeta^2} d\zeta \qquad (2)$$

Shënojmë shkurtimisht me

$$\frac{k}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \sin^2\alpha \cdot \zeta^2 = \frac{\pi}{2} v^2 \qquad (3)$$

prej nga

$$\zeta = \sqrt{\frac{\pi a\, b}{k(a+b)\sin^2\alpha}}\; v = \sqrt{A}\, v$$

ku:

$$A = \frac{\pi a\, b}{k(a+b)\sin^2\alpha}$$

dhe (2) do të ketë formën

$$u = C\sqrt{A}\int_{v_0}^{\infty} e^{\frac{2}{\pi} v^2} dv$$

Këtu me v_o e kemi shënuar vlerën e v e cila i përgjigjet tehut të gjysmë rrafshit ζ_o.

E zbërthejmë funksionin eksponencial në funksione trigonometrike

$$u = C\sqrt{A}\left(\int_{v_0}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2}\, v^2\, dv + i\int_{v_0}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2} v^2\, dv\right) \qquad (4)$$

Këto integrale quhen integrale të Frenelit dhe përkufizohen në këte mënyrë:

$$X(v) = \int_{0}^{v}\cos\frac{\pi}{2}\; v^2\, dv \qquad Y(v) = \int_{0}^{v}\sin\frac{\pi}{2}\; v^2\, dv \qquad (5)$$

Duke shfrytëzuar shprehjet (5), për (4) do të fitojmë

$$u = C\sqrt{A}\,\{[X(\infty) - X(v_o)] + i\,[Y(\infty) - Y(v_o)]\}$$

prej nga për intensitet do të kemi

$$I = KC^2A\,\{[X(\infty) - X(v_o)]^2 + [Y(\infty) - Y(v_o)]^2\}$$

E shënojmë konstanten me

$$\frac{1}{2} I_o = KC^2A$$

dhe përfundimisht intensiteti shprehet në formën

$$I = \frac{1}{2} I_o \{[X(\infty) - X(v_o)]^2 + [Y(\infty) - Y(v_o)]^2\} \tag{6}$$

Për diskutimin e shprehjes së fituar duhet njohur më parë vetitë e integraleve të Frenelit. Për këtë arsye do të shqyrtojmë një lakore e cila është e lidhur ngushtë me këto integrale dhe njihet si spirale e Kornit.

b) Spirala e Kornit

Madhësitë X dhe Y mund t'i mendojmë si koordinate të pikës në sistemin e koordinateve kënddrejta. Atëherë shprehjet (5) paraqesin ekuacionet parametrike të një lakore të cilën do ta shqyrtojmë.

Së pari shohim se lakorja kalon nëpër origjinë të sistemit të koordinateve sepse për $v = 0$, $X(0) = 0$ dhe $Y(0) = 0$.

Integralet e Frenelit mund t'i shprehim në formë të serive:

$$X(v) = \int_0^v \left[1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{2} v^2\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{2} v^2\right)^4 - \dots\right] dv =$$

$$v - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{v^5}{5} + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \frac{v^9}{9} - + \dots \tag{7}$$

$$Y(v) = \int_0^v \left[\frac{\pi}{2} v^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi v^2}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi v^2}{2}\right)^5 - + \dots\right] dv =$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{v^3}{3} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \frac{v^7}{7} + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 \frac{v^{11}}{11} - + \dots \tag{8}$$

Shihet se në këto seri paraqitet vetëm shkalla tek e madhësisë v, prandej, nëse në vend të v shkruajmë $-v$, këto seri e ndërrojnë parashenjin. Pra,

$$X(-v) = -X(v) \quad Y(-v) = -Y(v) \tag{9}$$

prej nga përfundojmë se lakorja është simetrike qendrore.

Do të përcaktojmë elementin e harkut

$$ds = \sqrt{(dX)^2 + (dY)^2}$$

ndërsa nga (5) kemi

$$dX = \cos \frac{\pi}{2} v^2 dv \quad dY = \sin \frac{\pi}{2} v^2 dv$$

Pasi të zëvendësojmë vlerat e fituara do të fitojmë

$$s = v$$

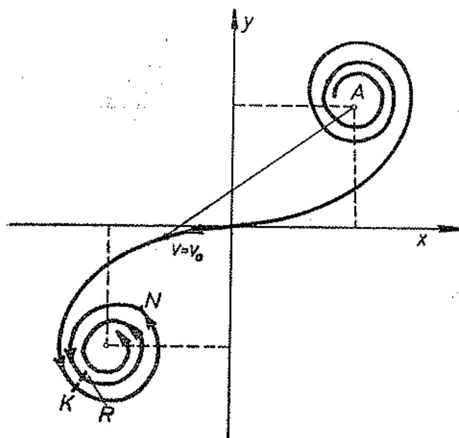


Fig. 145

Në këte mënyrë e kemi përcaktuar kuptimin fizik të parametrit v. Ky është i barabartë me gjatësinë e harkut të lakores nga origjina deri te pika e shqyrtuar.

Do të përcaktojmë në vazhdim këndin të cilin e mbyllë tangjenta në lakore me boshtin e apscisës duke shfrytëzuar shprehjen

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{dY}{dX} = \mathrm{tg} \frac{\pi}{2} v^2$$

prej nga **rrjedh** se

$$\beta = \frac{\pi}{2} v^2 \tag{10}$$

Kjo shprehje tregon se lakorja e ka tangjenten paralele me boshtin e apscisës për vlerat

$$v = 2n \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

dhe paralel me boshtin e ordinatës për

$$v = 2n + 1 \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

Kjo tregon se duke e zmadhuar gjatësinë e harkut v periodikisht arrijmë deri te pikat të cilat e kanë tangjenten paralele me njërin apo me tjetrin bosht të koordinateve. Lakorja mund të zotërojë në mënyrë të këtillë vetëm nëse e ka formën e spirales.

Më në fund do të përcaktojmë rrezen e përkulshmërisë së lakores. E përcaktojmë sipas shprehjes

$$\rho = \frac{ds}{d\beta} = \frac{dv}{\pi v\, dv} = \frac{1}{\pi v} \tag{11}$$

Pra, rrezja e përkulshmërisë vazhdimisht zvogëlohet me rritjen e gjatësisë së harkut v. Kjo është e mundur vetëm nëse lakorja e ka formën e spirales e cila mbyllet në vetveti dhe tenton kah një pikë asimtotike. Spiralen me vetitë e përshkruara e shohim në fig. 145. Kjo njihet me emrin spirale e Kornit.

Për përcaktimin e pikave asimtotike të saj fillojmë nga shprehja

$$X(\infty) - iY(\infty) = \int_0^\infty e^{-i\frac{\pi v^2}{2}} dv$$

Me zëvendësimin

$$i\frac{\pi}{2} v^2 = t^2 \qquad dv = \sqrt{\frac{2}{i\pi}}\, dt$$

fitojmë

$$X(\infty) - iY(\infty) = \sqrt{\frac{2}{i\pi}} \int_0^\infty e{-}t^2\, dt$$

Ky është integrali i Laplasit vlera e të cilit është $\frac{\pi}{2}$. Prandej

$$X(\infty) - iY(\infty) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, i^{-\frac{1}{2}}$$

Pasi që $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ do të kemi

$$i^{-\frac{1}{2}} = e^{-i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

Pra,

$$X(\infty) - iY(\infty) = \frac{1}{2} - i\frac{2}{1}$$

prej nga rrjedh se

$$X(\infty) = \frac{1}{2} \qquad Y(\infty) = \frac{1}{2} \tag{12}$$

Këto janë koordinatet e pikës pozitive asimtotike. Simetrikisht me këte qëndron pika negative asimtotike.

c) Shpërndarja e intensitetit të dritës

Shprehja (6) për shpërndarjen e intensitetit difraksional përmban anëtarët në kllapa të cilët kanë kuptim gjeometrik të katrorit të largësisë së dy pikave dhe kështu, pikës $v = \infty$ e cila paraqet pikën asimtotike pozitive, nga pika $v = v_o$ të cilën e përcakton vendi i x për të cilin e përcaktojmë intensitetin. Prandej mund të përcaktojmë intensitetin kur i bashkojmë këto pika, sikurse tregon fig. 145, për çdo pikë P.

Të marrim së pari $v_o = -\infty$. Kjo do të thotë se pika P është pambarim e larguar në pjesën e ndriçuar. Duhet të përcaktojmë largësinë në mes të pikave asimtotike

$$I = \frac{I_o}{2} \{[X(\infty) - X(-\infty)]^2 + [Y(\infty) - Y(-\infty)]^2\}$$

I zëvendësojmë vlerat nga (12)

$$I = \frac{I_o}{2} \{(1/2 + 1/2)^2 + (1/2 + 1/2)^2\} = I_o$$

Kësisoji kemi fituar kuptimin fizik të konstantes I_o. Kjo konstante paraqet intensitetin në pjesën e ndriçuar të hapësirës larg hijes gjeometrike. Për vlerë të intensitetit në kufirin e hijes gjeometrike duhet zëvendësuar vlerën $v_o = 0$. Fitojmë

$$I = \frac{I_o}{2} [X^2(\infty) + Y^2(\infty)] = \frac{I_o}{4} (1/4 + 1/4) = \frac{1}{4} I_o$$

Në këte pikë ndriçimi është sa 1/4 e ndriçimit në pjesën e lirë të hapësirës. Natyrisht se për $v_o = \infty$ e cila i përgjigjet pikës që gjendet pambarim larg në pjesën e errët të hapësirës, $I = 0$.

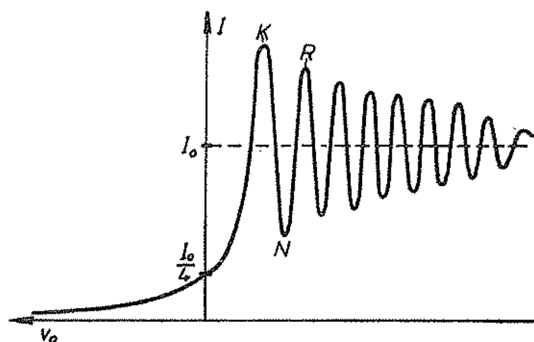


Fig. 146

Nëse pikën P e lëvizim nga pambarimi i pjesës së errët kah kufiri i hijes gjeometrike, atëherë pika v_o lëviz nga kahja pozitive e spirales së Kornit duke iu rritur vazhdimisht largësia e pozitës nga pika asimtotike pozitive. Intensiteti i dritës rritet në mënyrë monotone nga zeroja dhe arrinë vlerën $\frac{I_o}{4}$ kur pika P gjendet në ku- irin e hijes gjeometrike (fig. firin e hijes gjeometrike (fig. 146).

Vazhdojmë me lëvizjen e kësaj pike nëpër pjesën e ndriçuar ashtu që v_o fiton vlera negative. Në spirale të Kornit largohemi nga pika asimtotike pozitive. Intensiteti rritet vazhdimisht për deri sa nuk arrijmë në pikën K të fig. 145. Kjo pikë është maksimalisht e larguar nga pika A, prandej në këte pozitë paraqitet intensiteti maksimal. Duke vazhduar lëvizjen, largësia zvogëlohet e së bashku me te edhe intensiteti. Kur të arrijmë në pozitën N të fig. 145 fitojmë minimum të intensitetit në fig. 146. Pas kësaj pike gjatësia rritet prap për deri sa nuk arrijmë në pikën R të figurës 145, për të cilën fitojmë maksimum të in-

tensitetit në fig. 146 e kështu me radhë. Shohim se maksimumet dhe minimumet e intensitetit përsëriten vazhdimisht, por ndryshimi i intensiteteve zvogëlohet me zmadhimin e largësisë në pjesën e ndriçuar.

Figura difraksionale sikurse shihet në fig. 146 në pjesën e ndriçuar të hapësirës përbëhet nga sistemi i vijave të errëta dhe të ndriçuara, të cilat e kanë kontrastin maksimal afër kufirit të hijes gjeometrike. Shpërndarja e këtillë e intensitetit është vërtetuar edhe në mënyrë eksperimentale.

11. DIFRAKSIONI I FRENELIT NË HAPJE RRETHORE

Hapja le të ketë rrezen R, ndërsa burimi piksorë gjendet në bosht të saj. Hulumtimi i shpërndarjes së intensitetit difraksional është mjaft i vështirë, prandej do të kufizohemi në përcaktimin e intensitetit për gjatë boshtit të hapjes. Kësisoji kufizohemi në kërkimin e këtij intensiteti vetëm në mes të figurës difraksionale. Origjinën e sistemit të koordinateve e vendosim në qendër të hapjes sikurse tregon fig. 147. Në rrafshin e hapjes shfrytëzojmë koordinatet polare, prandej elementi i sipërfaqes, i cili gjendet rreth pikës T është

$$dS = \rho d\rho \, d\varphi$$

Gjatësinë r_o e njehsojmë nga trekëndëshi MOT

$$r_o = \sqrt{a^2 + \rho^2} = a\left(1 + \frac{\rho^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

prej nga

$$\Delta_o = r_o - a = \frac{\rho^2}{2a}$$

Në mënyrë të ngjashme fitojmë ndryshimin e rrugëve të valëve të difraktuara

$$\Delta = r - b = \frac{\rho^2}{2b}$$

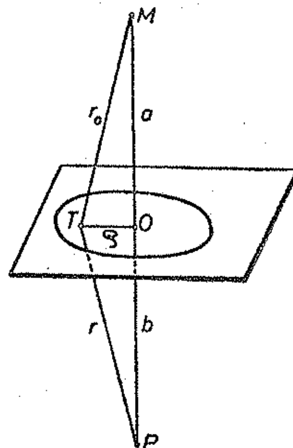


Fig. 147

ndërsa shprehja e parimit të Hajgensit e ka formën

$$u = C \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{i \frac{k}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\rho^2} \rho d\rho \, d\varphi$$

Shënojmë shkurtimisht me

$$s = \frac{k}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \tag{1}$$

dhe fitojmë

$$u = 2\pi C \int_0^R e^{is\rho^2} \rho d\rho$$

E integrojmë

$$u = \frac{C}{is} (e^{isR^2} - 1) = \frac{2\pi C}{s} e^{i\frac{sR^2}{2}} \sin \frac{sR^2}{2} \qquad (2)$$

dhe intensiteti është i barabartë me

$$I = \frac{4\pi C^2 K}{s^2} \sin \frac{sR^2}{2} \qquad (3)$$

Shohim se intensiteti ndërron në mënyrë oshiluese me s, përkatësisht me largësinë b të vendit të vrojtimit nga rrafshi i hapjes. Zerot e intensitetit në mes të figurës difraksionale fitohen për

$$\frac{sR^2}{2} = n\pi$$

dhe nga (1), për vlerë

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2n \frac{\lambda}{R^2} \qquad (4)$$

Pra, në rrafshet e larguara për b të shprehura me (4) mesi i figurës difraksionale është i errët. Rreth këtij mesi, gjenden rrathët e ndriçuar dhe të errët sikurse tregon teoria më e hollësishme dhe matjet eksperimentale.

Maksimumi i intensitetit në mes të figurës difraksionale fitohet për

$$\frac{sR^2}{2} = (2n-1) \frac{\pi}{2}$$

përkatësisht në rrafshet e përcaktuara me vlerën e b

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (2n-1) \frac{\lambda}{R^2}$$

dhe sipas (3) e ka vlerën

$$I_{maks.} = \frac{4C^2 K R^4}{(2n-1)^2} \qquad (5)$$

Në mes të intensitetit maksimal dhe zero mesi i figurës e ka një vlerë të caktuar.

12. DIFRAKSIONI I FRENELIT NË RRJETËN ZONALE

Rrjetë zonale quajmë pllakën e qelqit në të cilën janë të vizatuar rrathët koncentrikë rrezet e të cilëve qëndrojnë sikurse rrënjet katrore të numrave të plotë. Nëse me r e shënojmë rrezen e rrethit më të vogël,

atëherë rrezja e rrathëve tjerë është $r\sqrt{j}$. Unazat në mes të dy rrathëve alternativisht janë të errët dhe të ndritshëm, përkatësisht e lëshojnë dhe nuk e lëshojnë dritën. Le të jetë N numri i unazave të cilat e lëshojnë dritën. Pjesa tjetër e pllakës plotësisht është e pa depërtueshme. Në bosht të saj le të gjendet burimi piksorë i dritës një ngjyrëshe në largësi a. Dëshirojmë të përcaktojmë intensitetin e dritës së difraktuar në ndonjë pikë të larguar për b nga rrafshi i rrjetës. Natyrisht se do të përqëndrojmë vemendjen vetëm për ndërrimin e figurës difraksionale gjatë boshtit optik. Në mënyrë të ngjajshme sikurse në hapje rrethore fitojmë ndryshimin e rrugëve

$$\triangle_o + \triangle = \frac{\rho^2}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

dhe për amplitudë komplekse fitojmë shprehjen

$$u = C \sum_{j=1}^{N} \int_{r\sqrt{2j-1}}^{r\sqrt{2j}} \int_{0}^{2\pi} e^{i\frac{k}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\rho^2} \rho d\rho \, d\varphi$$

E shfrytëzojmë zëvendësimin (XIX.11.1) dhe e integrojmë sipas φ

$$u = 2\pi C \sum_{j=1}^{N} \int_{r\sqrt{2j-1}}^{r\sqrt{2j}} e^{is\rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi C}{is} \sum_{j=1}^{N} (e^{isr^2 2j} - e^{isr^2(2j-1)}) =$$

$$= \frac{\pi C}{is} \sum_{j=1}^{N} (e^{isr^2(2j-1)})\,(e^{isr^2} - 1)$$

$$u = \frac{\pi C}{is} (e^{isr^2} - 1)\;(e^{isr^2} + e^{3isr^2} + \ldots + e^{(2N-1)\,isr^2})$$

Në kllapa gjendet progresioni gjeometrik prej N anëtarëve. E shkruajmë shumën e tij

$$u = \frac{\pi C}{is} (e^{isr^2} - 1)\;\; e^{isr^2} \left(\frac{e^{isr^2 2N} - 1}{e^{2isr^2} - 1}\right)$$

E thjeshtojmë njërin anëtarë në emërues me anëtarin në kllapë

$$u = \frac{\pi C}{is}\; e^{isr^2} \left(\frac{e^{i2sr^2} - 1}{e^{isr^2} + 1}\right)$$

ose

$$u = \frac{\pi C}{s}\; e^{isr^2} \left(\frac{e^{iNsr^2} \sin N sr^2}{e^{isr^2/2} \cos \dfrac{sr^2}{2}}\right)$$

Ndërsa për intensitet fitojmë shprehjen

$$I = \frac{K\pi^2C^2}{s^2}\left(\frac{\sin Nsr^2}{\cos\frac{sr^2}{2}}\right)^2 \tag{1}$$

Zerot e intensitetit gjenden në vendet ku

$$Nsr^2 = n\pi \qquad n = 1, 2, 3\ldots$$

ose

$$sr^2 = \frac{n}{N}\pi$$

Por, këtu duhet veçuar ato vlera të n për të cilat

$$\frac{n}{N} = 2p - 1$$

sepse atëherë

$$\frac{sr^2}{2} = (2p-1)\frac{\pi}{2}$$

dhe për këto vlera edhe emëruesi është i barabartë me zero. Në këte rast shprehja për intensitet merr formë të pa përcaktuar 0/0. E njehsojmë shprehjen e pa përcaktuar

$$\lim_{s\to(2p-1)\pi}\frac{\sin Nsr^2}{\cos\frac{sr^2}{2}} = \lim_{s\to(2p-1)\pi}\frac{Nr^2\cos Nsr^2}{-\frac{r^2}{2}\sin\frac{sr^2}{2}} = \pm 2N$$

Pra, në këto vende gjenden maksimumet shumë të lartë të cilët i quajmë maksime kryesorë. Intensiteti i tyre është

$$I_{maks.} = \frac{4N^2KC^2r^4}{(2p-1)^2}$$

Nëse e krahasojmë shprehjen e fundit me shprehjen (XIX.11.5) për maksimume në hapje rrethore, shohim se maksimumet e rrjetës zonale janë N^2 herë më intensiv.

Përveç maksimumeve kryesore në bosht optik gjendet edhe vargu i maksimumeve sekundarë me intensitet të dobët. Pasi që maksimumet kryesorë janë mjaft intensiv njëkohësisht kanë rol vendimtar në difraksionin e rrjetës zonale.

Pozita e maksimumeve kryesorë gjendet nga kondita

$$sr^2 = (2p-1)\pi$$

dhe pasi të zëvendësojmë vlerën e s nga (XIX.11.1) fitojmë

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{(2p-1)\lambda}{r^2} \qquad (2)$$

Kjo shprehje na përkujton formulën për pozitën e shembëllimit në thjerrëzën optike. Prandej mund të përfundojmë se rrjeta zonale vepron sikurse thjerrëzë optike me largësi të vatrës

$$f = \frac{r^2}{(2p-1)\lambda}$$

por, për deri sa thjerrëza e ka vetëm një vatër, rrjeta zonale e ka një varg vatrash.

XX. TEORIA E POLARIZIMIT

1. PARAMETRAT E STOKSIT

Gjendjet e ndryeshme të polarizimit matematikisht mund t'i shprehim me ndihmën e parametrave të Stoksit. Këta janë katër numra të cilët i propozoi Stoksi më 1852. Me ndihmën e vlerave të ndryeshme të tyre mund të shprehen të gjitha gjendjet e polarizimit.

E dijmë se polarizimi eliptik paraqet formën më të përgjithsuar të polarizimit. Në këte rast mbarimi i vektorit elektrik përshkruan elipsë. Formën dhe pozitën e saj e përcaktojmë me ndihmën e dy numrave. Njëri prej tyre është këndi ψ të cilin e mbyllë boshti i madh i elipsës me boshtin e apscisës së sistemit të koordinateve, ndërsa tjetri shpreh marrëdhënien e gjysmëboshteve të saj në formën

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} \tag{1}$$

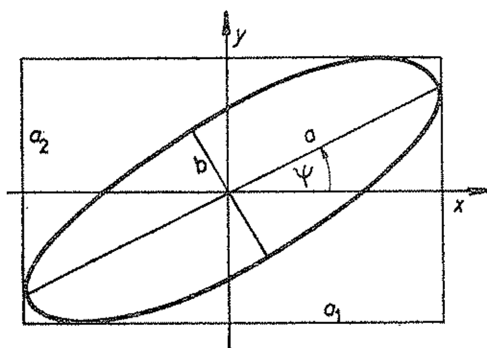


Fig. 148

Elipsa dhe pozita e saj ndaj sistemit të koordinateve është paraqitur në fig. 148. Vlerat karakteristike të elipsës, të përkufizuara në këte mënyrë shumë lehtë mund të specializohen për polarizim linearë apo rrethorë. Për të parin $b = 0$ dhe nga (1) $\alpha = 0$, ndërsa për të dytin $b = a$, përkatësisht $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Vektori elektrik mund të përshkruan elipsën në dy mënyrë, duke lëvizur majtas, ose djathtas. Për këte arsye duhet t'i fiksojmë këto dy kahje të mundshme. Do të merremi vesht se për lëvizje djathtas α do të ketë vlera pozitive, ndërsa për lëvizje majtas vlera negative. Duke u bazuar në këte përkufizim këndi α ndërron në intervalin

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha \leqq \frac{\pi}{4}$$

Gjithashtu, shohim nga fig. 148 se ψ ndërron në intervalin

$$0 \leqslant \psi \leqslant \pi$$

Për përkufizimin e parametrave të Stoksit nevojitet që lëvizjen nëpër elipsë ta zbërthejmë në lëkundje lineare, njërën në kahje të boshtit x me amplitudë a_1, ndërsa tjetrën në kahje të y me amplitudë a_2. Natyrisht se këto lëkundje kryhen me një ndryshim δ. Kësisoji elipsa është e përcaktuar me tre numra: me dy amplituda a_1 dhe a_2 dhe ndryshimin e fazës ndërmjet tyre δ. Me ndihmën e tyre Stoksi ndërtoi këto katër kombinime

$$\begin{aligned} J &= a_1^2 + a_2^2 \\ M &= a_1^2 - a_2^2 \\ C &= 2a_1 a_2 \cos\delta \\ S &= 2a_1 a_2 \sin\delta \end{aligned} \tag{2}$$

dhe paraqesin parametrat e Stoksit për polarizim eliptik. Parametri i parë shpreh intensitetin e dritës, sepse përcaktohet me katrorin e amplitudës. Parametrat tjerë nuk kanë kuptim fizik të caktuar.

Fakti se elipsa është e përcaktuar me tre numra, ndërsa janë përkufizuar katër parametra tregon se parametrat e Stoksit janë të lidhur ndërmjet veti. Kuptojmë nga formulat e përkufizimit (2) se këta janë të lidhur në formën

$$J = \sqrt{M^2 + C^2 + S^2} \tag{3}$$

Zakonisht preferohet që në teori të polarizimit, parametrat e Stoksit të mendohen si elemente të një matrice me një shtyllë

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} J \\ M \\ C \\ S \end{pmatrix} \tag{4}$$

prandej këta parametra mund t'i mendojmë si komponente të një vektori në hapësirën katërdimenzionale. Do ta quajmë vektor të Stoksit.

Në shumicën e njehsimeve është me rëndësi forma e polarizimit pa marrë parasysh intensitetin, prandej këta parametra mund të pjesëtohen me intensitet J dhe të përkufizohen ndaj intensitetit 1. Në këte rast vektori i Stoksit e ka formën

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ M/J \\ C/J \\ S/J \end{pmatrix} \tag{5}$$

Elementi i parë është gjithmonë një dhe themi se vektori i Stoksit është i normiruar në një.

Do t'i shprehim komponentet e vektorit (5) me ndihmën e ψ dhe α. Për këte qëllim, ekuacionin e elipsës në sistemin e koordinateve x dhe y e shprehim në formë të dy lëkundjeve normale me ndryshim faze δ.

$$x = a_1 \cos(\omega t + \delta)$$
$$y = a_2 \cos \omega t \tag{6}$$

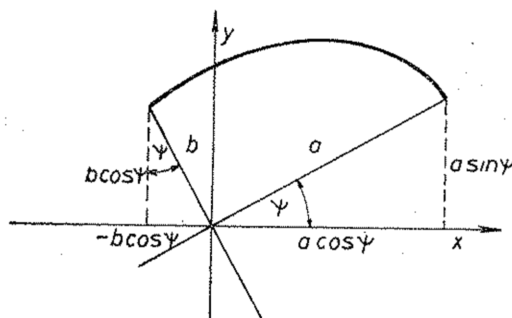


Fig. 149

E shënojmë me τ kohën kur mbarimi i vektorit të fushës elektrike gjendet në boshtin e madh të elipsës (fig. 149). Shohim se vlenë

$$a \cos \psi = a_1 \cos(\omega\tau + \delta) \tag{7}$$

$$a \sin \psi = a_2 \cos \omega\tau \tag{8}$$

Pas kohës $\tau + T/4$ ky vektor do të përputhet me gjysmë boshtin e vogël të elipsës. Meqë në këte rast vlenë

$$\omega(\tau + T/4) = \omega\tau + \frac{\pi}{2}$$

do të kemi

$$b \sin \psi = a_1 \sin(\omega\tau + \delta) \tag{9}$$

$$b \cos \psi = - a_2 \sin \omega\tau \tag{10}$$

Nga ekuacionet (7) dhe (9) dhe ekuacionet (8) e (10) fitojmë

$$a^2_1 = a^2 \cos\psi + b^2 \sin^2\psi$$

$$a^2_2 = a^2 \sin^2\psi + b^2 \cos^2\psi$$

prej nga për dy parametrat e parë fitojmë vlerat

$$a^2_1 + a^2_2 = a^2 + b^2 \tag{11}$$

$$a^2_1 - a^2_2 = (a^2 - b^2) \cos 2\psi \tag{12}$$

Ndërsa nga sistemi (2) fitojmë

$$\frac{M}{J} = \frac{a^2_1 - a^2_2}{a^2_1 + a^2_2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cos 2\psi$$

Shprehjen e fundit mund ta shkruajmë edhe kësisoji

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha} = \cos 2\alpha$$

dhe përfundimisht do të kemi

$$\frac{M}{J} = \cos 2\psi \cos 2\alpha \tag{13}$$

I shumëzojmë shprehjet (7) e (10) dhe (8) e (9) dhe prodhimet i mbledhim. Fitojmë

$$a\,b = a_1 a_2 [\sin(\omega\tau + \delta) \cos \omega\tau - \cos(\omega\tau + \delta) \sin \omega\tau]$$

$$a\,b = a_1 a_2 \sin\delta \tag{14}$$

Nëse i shumëzojmë (7) me (8) dhe (9) me (10) dhe i zbresim do të kemi

$$(a^2 - a^2) \sin 2\psi = 2a_1 a_2 \cos\delta \tag{15}$$

Nga (2) dhe (15) gjejmë

$$\frac{C}{J} = \frac{2a_1 a_2 \cos\delta}{a^2_1 + a^2_2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \sin 2\psi$$

ose

$$\frac{C}{J} = \cos 2\alpha \sin 2\psi \tag{16}$$

Pastaj, nga (2) dhe (14) kemi

$$\frac{S}{J} = \frac{2a_1 a_2 \sin\delta}{a^2_1 + a^2_2} = \frac{2\,a\,b}{a^2 + b^2} = \frac{2\,\mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha} = \sin 2\alpha \tag{17}$$

Shprehjet e fituara tregojnë se vektori i normiruar i Stoksit për polarizim eliptik e ka formën

$$\vec{K}_{elip.} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \ \cos 2\psi \\ \cos 2\alpha \sin 2\psi \\ \sin 2\alpha \end{pmatrix} \tag{18}$$

Polarizimi linearë është rast spercial i polarizimit eliptik dhe fitohet për $\alpha = 0$

$$\vec{K}_{lin.} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\psi \\ \sin 2\psi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Sipas përkufizimit, këndi ψ është këndi i lëkundjes me boshtin e apscisës të cilin do ta marrim në kahje horizontale. Nëse dëshirojmë ta shprehim vektorin e Stoksit për lëkundje horizontale, atëherë duhet që $\psi = 0$. Fitojmë

$$\vec{K}_o = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Për lëkundje në kahje vertikale $\psi = \frac{\pi}{2}$, ndërsa vektori i Stoksit e ka formën

$$\vec{K}_{90^\circ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Për lëkundje të cilat me boshtin horizontal e mbyllin këndin $\psi = 45^\circ$ fitojmë

$$\vec{K}_{45^\circ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{K}_{-45^\circ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

Meqë edhe polarizimi rrethor është një formë speciale e polarizimit eliptik, për $b = a$ ose $\alpha = 45^\circ$, atëherë për vektorë të Stoksit kemi

$$\vec{K}_{djathtë} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{K}_{majtë} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Parametrat e Stoksit për polarizim eliptik të shprehur me (18) tregojnë se dy prej tyre varen prej këndit ψ të cilin e mbyllë boshti i madh i elipsës me boshtin e apscisës. Prandaj nëse sistemin e koordinateve e rrotullojmë për një kënd në kahje të përhapjes së valëve, atëherë do të ndryshojnë edhe vlerat e parametrave M dhe C. Do të shqyrtojmë ndërrimin e tyre.

Në sistemin fillestarë të koordinateve këta e kanë formën

$$M = \cos 2\alpha \cos 2\psi$$

$$C = \cos 2\alpha \sin 2\psi$$

nëse supozojmë se intensiteti është një. Në sistemin e koordinateve të reja boshti i madh i elipsës me boshtin e apscisës e mbyllë këndin $\psi - \vartheta$, prandej do të kenë formën

$$M' = \cos 2\alpha \cos 2(\psi - \vartheta)$$

$$C' = \cos 2\alpha \sin\ 2(\psi - \vartheta)$$

ose

$$M' = M \cos 2\vartheta + C \sin 2\vartheta$$

$$C' = - M \sin 2\vartheta + C \cos 2\vartheta$$

Pasi që vlerat e parametrave tjerë nuk varen nga pozita e sistemit të koordinateve, lehtë bindemi se mund të shkruajmë

$$\begin{pmatrix} J' \\ M' \\ C' \\ S' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\vartheta & \sin 2\vartheta & 0 \\ 0 & -\sin 2\vartheta & \cos 2\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J \\ M \\ C \\ S \end{pmatrix}$$

Kuptojmë se vektorin e Stoksit në sistemin e ri të koordinateve mund ta njehsojmë me ndihmën e matricës së rrotullimit për këndin 2ϑ

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\, 2\vartheta & sin\, 2\vartheta & 0 \\ 0 & -sin\, 2\vartheta & cos\, 2\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. POLARIZIMI I PJESËRISHËM

Do të shqyrtojmë valët e polarizuara pjesërisht dhe të pa polarizuara fare. Në këte rast madhësitë a_1, a_2 dhe δ nuk kanë vlera të caktuara, por këto ndërrojnë gjatë kohës sipas ligjeve të besushmërisë. Për këte arsye mund të masim vlerën e tyre kohore mesatare. Kjo vlerë duhet njehsuar për kohën mjaft të gjatë në krahasim me periodën e lëkundjes. Këto vlera mesatare do t'i shënojmë me shenjën $< >$. Me ndihmën e vlerave mesatare, parametrat e Stoksit i përkufizojmë në këte mënyrë

$$\begin{aligned} J &= \langle a^2_1 \rangle + \langle a^2_2 \rangle \\ M &= \langle a^2_1 \rangle - \langle a^2_2 \rangle \\ C &= \langle 2a_1 a_2 \cos\delta \rangle \\ S &= \langle 2a_1 a_2 \sin\delta \rangle \end{aligned} \qquad (1)$$

Këto përkufizime paraqesin përgjithsim natyror të shprehjeve për polarizim të plotë. Së pari do të shqyrtojmë dritën e pa polarizuar.

Pasi që në dritë të këtillë asnjë kahje nuk është më e theksuar se tjetra do të kemi

$$\langle a^2_1 \rangle = \langle a^2_2 \rangle$$

prej nga përfundojmë se $M = 0$. Pastaj, për këndet δ mund të paraqitet çfarëdo vlere pa marrë parasysh madhësitë e a_1 dhe a_2, prandej mund të shkruajmë

$$C = \langle 2a_1a_2 \rangle \langle \cos\delta \rangle$$

$$S = \langle 2a_1a_2 \rangle \langle \sin\delta \rangle$$

Natyrisht se edhe për ndërrimet e fazëve vlenë

$$\langle \cos\delta \rangle = \langle \sin\delta \rangle = 0$$

prej nga kuptojmë se edhe vlerat e C dhe S janë të barabarta me zero. Duke u bazuar në këto përfundime, parametrat e Stoksit për dritë të pa polarizuar janë

$$K_{p\,.\,p} = \begin{pmatrix} 2\langle a^2{}_1 \rangle \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

dhe nëse normirohet në një do të kemi

$$K_{p\,.\,p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Polarizimin e pjesërishëm mund ta mendojmë si përzierje të njërës komponentë plotësisht të polarizuar dhe tjetrës plotësisht të pa polarizuar. Pra,

$$\vec{K} = \vec{K}_p + \vec{K}_j$$

ndërsa parametrat e Stoksit për polarizim të pjesërishëm do të jenë

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} J \\ M \\ C \\ S \end{pmatrix} \tag{4}$$

Nëse e krahasojmë (4) me (2) shohim se parametrat M, C dhe S paraqiten nga pjesa e polarizuar e dritës. Shfrytëzojmë (XX.1.3) dhe për pjesën e polarizuar do të kemi

$$\vec{K}_p = \begin{pmatrix} \sqrt{M^2 + C^2 + S^2} \\ M \\ C \\ S \end{pmatrix} \tag{5}$$

Kurse për pjesën e pa polarizuar vlenë

$$K_j = \begin{pmatrix} J - \sqrt{M^2 + C^2 + S^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Kuptojmë se për polarizim të pjesërishëm gjithmonë vlenë

$$J > \sqrt{M^2 + C^2 + S^2}$$

dhe se parametrat e Stoksit janë të pavarur ndërmjet veti.

Marrëdhënia e intensiteteve të pjesës së polarizuar dhe total

$$P = \frac{\sqrt{M^2 + C^2 + S^2}}{J} < 1 \tag{7}$$

quhet shkallë e polarizimit të pjesërishëm.

Më në fund do të tregojmë se drita e pa polarizuar mund të fitohet si mbledhje jo koherente e dy valëve të polarizuara në mënyrë eliptike, boshtet e mëdhenj të të cilave qëndrojnë normal ndërmjet veti por rrotullimi i vektorit elektrik kryhet në kahje të kundërt. Në këte rast njëra valë do të ketë vlerën α ndërsa tjetra $-\alpha$. Pasi që boshtet e mëdhenj janë normal ndërmjet veti, njëra valë do të ketë azimutin ψ ndërsa tjetra $\frac{\pi}{2} + \psi$. Për njërën valë vektori i Stoksit është

$$\vec{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ cos\ 2\alpha\ cos\ 2\psi \\ cos\ 2\alpha\ sin\ 2\psi \\ sin\ 2\alpha \end{pmatrix}$$

ndërsa për valën tjetër

$$k_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ cos\ (-2\alpha)\ cos\ 2\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) \\ cos\ (-2\alpha)\ sin\ 2\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) \\ sin\ (-2\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -cos\ 2\alpha\ cos\ 2\psi \\ -cos\ 2\alpha\ sin\ 2\psi \\ -sin\ 2\alpha \end{pmatrix}$$

Në rast të mbledhjes jo koherente të valëve, vektorët e Stoksit duhet të mblidhen. Fitojmë

$$\vec{K}_1 + \vec{K}_2 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ndërsa ky vektor e përshkruan dritën e pa polarizuar.

3. MATRICA E MILERIT PËR POLARIZATORË LINEARË

Me ndihmën e parametrave të Stoksit i kemi përshkruar gjendjet e ndryshme të polarizimit. Tani do t'i përshkruajmë matematikisht elementet optike të cilët e ndërrojnë gjendjen e polarizimit.

Elementet e këtillë e shndërrojnë polarizimin e dritës rëniese në polarizim të dritës dalëse. Meqë polarizimi i dritës rëniese dhe dalëse përcaktohet me parametrat e Stoksit, atëherë elementi optik duhet të paraqet një transformim matematik të matricës me një shtyllë në matricë tjetër poashtu me një shtyllë. E dijmë nga matematika se këte transformim e kryen matrica katrore me numër të rendeve të barabartë me numrin e elementeve të vektorit të Stoksit. Këto matrica i paraqiti Mileri më 1948 dhe mbajnë emrin e tij.

Pra, do të kemi

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Vektori i Stoksit $\vec{K}'$ i dritës dalëse fitohet duke e shumëzuar matricën (1) me vektorin e dritës hyrëse $\vec{K}$

$$\vec{K}' = M\,\vec{K} \tag{2}$$

Ka ngelë të përcaktojmë elementet e matricës së Milerit për lloje të ndryshme të polarizatorëve, përkatësisht analizatorëve. Elementet e saj mund t'i njehsojmë nëse e dijmë polarizimin e dritës hyrëse dhe dalëse. Për ditë hyrëse me radhë duhet të merren këto katër gjendje të polarizimit:

1. Jo e polarizuar
2. Lineare e polarizuar me lëkundje horizontale
3. Lineare e polarizuar me azimut të lëkundjes 45°
4. E polarizuar rrethore djathtas

Për rastin e parë, vektori i Stoksit për dritë dalëse i ka këto elemente

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \\ m_{41} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Për rastin e dytë

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} + m_{12} \\ m_{21} + m_{22} \\ m_{31} + m_{32} \\ m_{41} + m_{42} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Për rastin e tretë

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} + m_{13} \\ m_{21} + m_{23} \\ m_{31} + m_{33} \\ m_{41} + m_{43} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

dhe në rastin e katërt

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} + m_{14} \\ m_{21} + m_{24} \\ m_{31} + m_{34} \\ m_{41} + m_{44} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Lehtë mund të njehsohen elementet e matricës nëse e dijmë gjendjen e polarizimit të dritës dalëse.

Do të përcaktojmë elementet e matricës së polarizatorit linearë, i cili e lëshon dritën me azimut të lëkundjes ψ, Kur nëpër te kalon drita e pa polarizuar, drita dalëse polarizohet në mënyrë lineare dhe intensiteti i saj është sa gjysma e intensitetit të dritës rëniese. Prandej vektori i Stoksit për dritë dalëse është

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ cos\ 2\psi \\ sin\ 2\psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nëse e krahasojmë këte shprehje me shprehjen (3) shohim se

$$m_{11} = \frac{1}{2};\ m_{21} = \frac{1}{2}\ cos\ 2\psi;\ m_{31} = \frac{1}{2}\ sin\ 2\psi;\ m_{41} = 0$$

Kur nëpër te e lëshojmë dritën e polarizuar në mënyrë lineare me lëkundje horizontale, kjo dritë kalon me amplitudë $cos\psi$, përkatësisht me intensitet $cos^2\psi$. Vektori i Stoksit për dritë dalëse është

$$cos^2\psi \begin{pmatrix} 1 \\ cos^2\psi \\ sin^2\psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

dhe pasi ta krahasojmë me (4) kuptojmë se vlenë

$$m_{11} + m_{12} = cos^2\psi \qquad m_{21} + m_{22} = cos^2\psi \, cos \, 2\psi$$
$$m_{31} + m_{32} = cos^2\psi \, sin \, 2\psi \qquad m_{41} + m_{42} = 0$$

Duke shfrytëzuar elementet e njohura më parë pasi t'i zgjidhim këto ekuacione fitojmë

$$m_{12} = \frac{1}{2} \, cos \, 2\psi; \; m_{22} = \frac{1}{2} \, cos^2 \, 2\psi$$

$$m_{32} = \frac{1}{2} \, cos \, 2\psi \, sin \, 2\psi \text{ dhe } m_{42} = 0$$

Së treti marrim dritën dalëse të polarizuar në mënyrë lineare me azimut të lëkundjes 45°. E projektojmë amplitudën dhe në kahje të azimutit ψ fitojmë amplitudën e dritës dalëse

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \psi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos\psi + \sin\psi)$$

ose intensiteti në dalje

$$\frac{1}{2} (1 + \sin 2\psi)$$

dhe për vektor të Stoksit për dritën dalëse fitojmë

$$\frac{1}{2} (1 + \sin 2\psi) \begin{pmatrix} 1 \\ cos \, 2\psi \\ sin \, 2\psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

dhe nga (5) kemi

$m_{11} + m_{13} = \frac{1}{2} (1 + sin \, 2\psi)$. E zëvendësojmë vlerën për $m_{11} = \frac{1}{2}$ prandej do të kemi për

$$m_{13} = \frac{1}{2} \, sin \, 2\psi$$

Në mënyrë të ngjajshme do të gjejmë

$$m_{23} = \frac{1}{2} \, cos \, 2\psi \, sin \, 2\psi$$

$$m_{33} = \frac{1}{2} \, sin^2 \, 2\psi$$

$$m_{43} = 0$$

Më në fund kur nëpër polarizator kalon drita e polarizuar në mënyrë rrethore, në dalje do të kemi vetëm njërën komponentë, intensiteti i së cilës është $\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\psi \\ \sin 2\psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

dhe nga (6) kuptojmë se vlerat e kërkuara janë

$$m_{14} = 0; \; m_{24} = 0; \; m_{34} = 0 \text{ dhe } m_{44} = 0$$

Kështu i kemi përcaktuar të gjithë elementet e matricës së Milerit për polarizator linearë, i cili i lëshon lëkundjet në kahje të përcaktuar me këndin ψ. Matrica e ka formën

$$M_{\psi} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \cos 2\psi & \sin 2\psi & 0 \\ \cos 2\psi & \cos^2 2\psi & \cos 2\psi \sin 2\psi & 0 \\ \sin 2\psi & \cos 2\psi \sin 2\psi & \sin^2 2\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Nga kjo lehtë mund të fitohen vlerat e veçanta të lëkundjes me azimute të ndryeshëm. P.sh., për lëkundje horizontale duhet zëvendësuar $\psi = 0$. Fitojmë

$$M_o = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Për lëkundje vertikale duhet zëvendësuar vlerën $\psi = 90°$ dhe për matricë të Milerit do të kemi

$$M_{90°} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Ndërsa për azimut $\pm 45°$ fitojmë

$$M_{\pm 45°} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Më në fund do të tregojmë zbatimin e shprehjeve të fituara për një shembull mjaft të thjeshtë. Le të kalojë drita e polarizuar lineare me azimut të lëkundjes ψ nëpër polarizator linearë i cili i lëshon vetëm lëkundjet horizontale. Në dalje të tij vektori i Stoksit do të jetë

$$M_o K_\psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ cos\, 2\psi \\ sin\, 2\psi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \pm cos\, 2\psi \\ 1 + cos\, 2\psi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = cos^2\psi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E kemi fituar vektorin e Stoksit për dritë të polarizuar lineare e cila lëkundet horizontalisht dhe e ka intensitetin $\cos^2\psi$. Rezultati i fundit e shpreh përmbajtjen e ligjit të Malusit.

4. MATRICA E MILERIT PËR ANALIZATORË RRETHORË

Do t'i përcaktojmë elementet e matricës për analizatorë rrethorë i cili e lëshon vetëm dritën e polarizuar rrethore. Le të jetë për polarizim rrethor djathtas. Nëse së pari lëshohet drita e pa polarizuar, në dalje fitojmë dritë të polarizuar rrethore djathtas me intensitet $\frac{1}{2}$. Vektori i Stoksit është

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ndërsa nga (XX.3.3) kemi

$$m_{11} = \frac{1}{2}\quad m_{21} = 0;\ m_{31} = 0;\ m_{41} = \frac{1}{2}$$

Pastaj e lëshojmë në te dritën e polarizuar lineare me lëkundje horizontale. Prapë në dalje fitojmë dritë të polarizuar rrethore me intensitet $\frac{1}{2}$. Në të vërtetë, që të zbërthehet amplituda rëniese në dy komponente intensive të barabarta, këto duhet të mbyllin këndin 45°, prandej amplitudat e tyre janë $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ndërsa intensiteti $\frac{1}{2}$. Nga shprehja (XX.3.4) rrjedh

$$m_{12} = 0;\ m_{22} = 0;\ m_{32} = 0 \text{ dhe } m_{42} = 0$$

Pastaj duhet lëshuar nëpër analizator dritën e polarizuar lineare me azimut të lëkundjes 45°. Lëkundja rrethore nuk është e ndieshme ndaj kahjes prandej fitojmë të njëjtin rezultat thua se azimuti i lëkundjes është zero. Do të kemi

$$m_{13} = 0; \; m_{23} = 0; \; m_{33} = 0; \; m_{43} = 0$$

Përfundimisht duhet lëshuar dritën e polarizuar rrethore, të cilën analizatori e lëshon pa kurrfarë ndryshimi. Vektori i Stoksit është

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ndërsa nga (XX.3.6) për elemente fitojmë

$$m_{14} = \frac{1}{2}; \; m_{24} = 0; \; m_{34} = 0 \text{ dhe } m_{44} = \frac{1}{2}$$

Matrica e Milerit për analizator i cili e lëshon dritën e polarizuar rrethore djethtas e ka formën

$$m_d = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Ndërsa analizatori i cili e lëshon dritën e polarizuar rrethore majtas e ka matricën e Milerit

$$m_m = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

5. MATRICA E MILERIT PËR ANALIZATORË ELIPTIKË

Në vazhdim do të përcaktojmë elementet e matricës për analizator i cili e lëshon dritën e polarizuar eliptike të një forme të caktuar. Le të jetë kjo formë e përcaktuar me vektorin e Stoksit

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ M \\ C \\ S \end{pmatrix}$$

Edhe në këte rast duhet të marrim që të katër mundësitë e cekura më parë. Për dritë të pa polarizuar me intensitet 1 drita dalëse do të ketë intensitetin $\frac{1}{2}$, ndërsa vektori i Stoksit është

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\M\\C\\S\end{pmatrix}$$

dhe nga (XX.3.3) fitojmë

$$m_{11}=\frac{1}{2};\ m_{21}=\frac{1}{2}M;\ m_{31}=\frac{1}{2}C \text{ dhe } m_{41}=\frac{1}{2}S$$

Së dyti drita rëniese duhet të jetë e polarizuar në mënyrë lineare me lëkundje horizontale. Lehtë mund të tregojmë se gjatë shndërrimit të dritës eliptike në lineare me lëkundje horizontale intensiteti zvogëlohet për

$$\frac{1}{2}(1+M)$$

sepse nga

$$M_o\vec{K}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\M\\C\\S\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+M\\1+M\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

Mund të marrim se e njëjta marrëdhënie paraqitet edhe anasjelltas, prandej analizatori e lëshon dritën për të cilën vektori i Stoksit është

$$\frac{1}{2}(1+M)\begin{pmatrix}1\\M\\C\\S\end{pmatrix}$$

dhe nga (XX.3.44) do të kemi

$$m_{11}+m_{12}=\frac{1}{2}(1+M) \qquad m_{21}+m_{22}=\frac{1}{2}(1+M)M$$

$$m_{31}+m_{32}=\frac{1}{2}(1+M)C \qquad m_{41}+m_{42}=\frac{1}{2}(1+M)S$$

Pasi t'i zëvendësojmë vlerat e elementeve të parë do të gjejmë

$$m_{12}=\frac{1}{2}M;\ m_{22}=\frac{1}{2}M^2;\ m_{32}=\frac{1}{2}MC \text{ dhe } m_{42}=\frac{1}{2}MS$$

Së treti duhet të lëshohet drita e polarizuar lineare me azimut të lëkundjes 45°. Meqë vlenë

$$M_{45^\circ}\vec{K} = \frac{1}{2}(1 + C)$$

çka është e arsyeshme të vlejë edhe anasjelltas do të kemi për vektor të Stoksit të dritës dalëse

$$\frac{1}{2}(1 + C)\begin{pmatrix} 1 \\ M \\ C \\ S \end{pmatrix}$$

dhe me ndihmën e (XX.3.5) për elemente gjejmë

$$m_{13} = \frac{1}{2} C; \; m_{23} = \frac{1}{2} CM; \; m_{33} = \frac{1}{2} C^2 \text{ dhe } m_{43} = \frac{1}{2} CS$$

Më në fund duhet të lëshohet drita e polarizuar rrethore djathtas. Intensitetin në dalje e fitojmë nga

$$M_d\vec{K} = \frac{1}{2}(1 + S)$$

ndërsa për vektor të Stoksit do të kemi

$$\frac{1}{2}(1 + S)\begin{pmatrix} 1 \\ M \\ C \\ S \end{pmatrix}$$

dhe me ndihmën e (XX.3.6) fitojmë vlerën e elementeve

$$m_{14} = \frac{1}{2} S; \; m_{24} = \frac{1}{2} S\,M; \; m_{34} = \frac{1}{2} C\,S \text{ dhe } m_{44} = \frac{1}{2} S^2$$

Pasi i njohim të gjithë elementet për analizator eliptik, për matricë të tij do të kemi

$$M_{elip.} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & M & C & S \\ M & M^2 & CM & SM \\ C & MC & C^2 & SC \\ S & MS & CS & S^2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Në këte matricë simbolet M, C dhe S paraqesin:

$$\begin{aligned} M &= \cos 2\psi \cos 2\alpha \\ C &= \sin 2\psi \cos 2\alpha \\ S &= \sin 2\alpha \end{aligned} \tag{2}$$

Lehtë mund të tregohet se matricat e Milerit për analizatorë linearë apo rrethore mund të fitohen nga (1) për vlera të veçanta të α. P.sh., për analizatorë linearë duhet zëvendësuar në (2) $\alpha = 0$, prandej

$$M = \cos 2\psi \quad C = \sin 2\psi \quad S = 0$$

Pasi t'i zëvendësojmë vlerat e fituara në (1) fitojmë matricën (XX.3.7). Gjithashtu mund të fitojmë matricën (XX.4.1) nëse në (2) zëvendësojmë vlerën $\alpha = 45°$, sepse atëherë

$$M = 0, \; C = 0 \text{ dhe } S = 1$$

6. MATRICA E MILERIT PËR PLLAKË PLANPARALELE KRISTALORE

Pllaka planparalele nga kristali një boshtor e cila është e prerë paralel me boshtin optik shkakton një ndryshim faze në dritën e cila përhapet nëpër te. Në pllakë të këtillë rrezja e rregullt dhe e pa rregullt përhapen me shpejtësi të ndryshme në të njëjtën kahje. Do të supozojmë se kahja e lëkundjes së valës më të shpejtë është horizontale. E shënojmë matricën e saj me M. Për dritë të pa polarizuar pllaka nuk paraqet kurrfarë ndryshimi të fazës sepse në të gjitha kahjet e shkakton të njëjtin ndryshim. Pra, edhe drita dalëse do të jetë e pa polarizuar

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

prej nga përfitojmë

$$m_{11} = 1; \; m_{21} = 0; \; m_{31} = 0 \text{ dhe } m_{41} = 0$$

Pa kurrfarë ndryshimi do të kalojë edhe drita e polarizuar lineare me lëkundje horizontale, sepse nuk ka komponentë me lëkundje vertikale. Pra,

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

prej nga $m_{11} + m_{12} = 1$, $m_{21} + m_{22} = 1$, $m_{31} + m_{32} = 0$

$$m_{41} + m_{42} = 0$$

ose

$$m_{12} = m_{32} = m_{42} = 0 \quad \text{dhe} \quad m_{22} = 1$$

Nëse drita rëniese me intensitet J lëkundet me azimut 45°, atëherë në pllakën me thyerje të dyfishtë coptohet në dy komponente me amplituda të barabarta $a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ por këto fitojnë edhe një ndryshim faze δ.

Parametrat e Stoksit për dritën dalëse janë

$$J = a^2_1 + a^2_2 = 1 \quad M = a^2_1 - a^2_2 = 0$$

$$C = 2a_1a_2 \cos\delta = \cos\delta \quad S = 2a_1a_2 \sin\delta = \sin\delta$$

Prandej mund të shkruajmë

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix}$$

dhe fitojmë

$$m_{11} + m_{13} = 1 \quad m_{21} + m_{23} = 0$$

$$m_{31} + m_{33} = \cos\delta \quad m_{41} + m_{43} = \sin\delta$$

Pasi t'i zëvendësojmë vlerat e njohura do të kemi për elementet

$$m_{13} = m_{23} = 0 \quad m_{33} = \cos\delta \quad \text{dhe} \quad m_{43} = \sin\delta$$

Më në fund sikurse deri tani duhet drita rëniese të jetë e polarizuar në mënyrë rrethore djathtas. Këte, pllaka me thyerje të dyfishtë e zbërthen në dy komponente me amplituda $a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dhe ndryshim në fazë $\frac{\pi}{2}$. Kjo pllakë këtij ndryshimi në fazë i shton edhe ndryshimin δ, ashtu që drita dalëse do të ketë ndryshimin $\frac{\pi}{2} + \delta$. Parametrat e Stoksit për te janë

$$J = a^2_1 + a^2_2 = 1$$

$$C = 2a_1a_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) = -\sin\delta$$

$$S = 2a_1a_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) = \cos\delta$$

$$M = a^2_1 - a^2_2 = 0$$

dhe mund të shkruajmë

$$M\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-\sin\delta\\\cos\delta\end{pmatrix}$$

ashtu që për elemente të panjohura fitojmë

$$m_{14}=0;\quad m_{24}=0;\quad m_{34}=-\sin\delta\quad \text{dhe}\quad m_{44}=\cos\delta$$

Duke u bazuar në elementet e fituar, matrica e Milerit për pllakë planparalele kristalore e ka formën

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos\delta&-\sin\delta\\0&0&\sin\delta&\cos\delta\end{pmatrix}\tag{1}$$

Në optikë eksperimentale mjaft të rëndësishme janë pllakat $\frac{\lambda}{4}$ të cilat shkaktojnë ndryshim në fazë për $\frac{\pi}{2}$. Nëse zëvendësojmë vlerën $\delta=\frac{\pi}{2}$ do të fitojmë

$$M_{\left(\delta=\frac{\pi}{2}\right)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\tag{2}$$

për $\delta=\pi$ do të kemi

$$M_{(\delta=\pi)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\tag{3}$$

ndërsa për $\delta=2\pi$

$$M_{(\delta=2\pi)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\tag{4}$$

Shohim se pllaka e këtillë fare nuk e ndërron gjendjen e polarizimit të dritës rëniese. Kjo është e qartë nga forma e matricës (4).

E dijmë se pllaka $\frac{\lambda}{4}$ e shndërron dritën e polarizuar lineare me azimut 45° në dritë të polarizuar rrethore. Kjo rrjedh edhe nga shumëzimi i matricës (2) me vektorin gjegjës të Stoksit për ate polarizm. Pra,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Në anën e djathtë qëndron vektori i dritës së polarizuar në mënyrë rrethore.

Nëse nëpër pllakën $\frac{\lambda}{4}$ lëshohet drita e polarizuar në mënyrë lineare me azimut të lëkundjes γ do të fitojmë

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\gamma \\ \sin 2\gamma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\gamma \\ 0 \\ \sin 2\gamma \end{pmatrix}$$

Ky është vektori i Stoksit për dritë të polarizuar në mënyrë eliptike me azimut të boshtit të madh $\psi = 0$ dhe $\alpha = \gamma$. Shohim se mund të fitojmë polarizim rrethore vetëm nëse $\gamma = \pm 45°$, ndërsa polarizim lineare për $\gamma = 0$ ose $\gamma = 90°$.

7. SERIA E ELEMENTEVE OPTIKE

Matricat e Milerit kanë zbatim mjaft të madh në shqyrtimin e gjendjes së polarizimit të dritës kur kjo kalon nëpër një varg të elementeve optike të cilët e ndërrojnë gjendjen e saj.

Lehtë mund të tregohet matrica e Milerit për tërë vargun është e barabartë me prodhimin e matricave të çdo elementi. Nëse me $\vec{K}$ e shënojmë vektorin e Stoksit për dritën rëniese, ndërsa me M_1 matricën e elementit të parë optik, atëherë vektori i Stoksit për dritë dalëse nga ky element shprehet në formën

$$\vec{K}_1 = M_1 \vec{K}$$

Pastaj drita kalon nëpër elementin tjetër me matricë M_2. Vektori i Stoksit për dritën dalëse nga ky do të jetë

$$\vec{K}_2 = M_2 \vec{K}_1 = M_2 M_1 \vec{K}$$

Në mënyrë të ngjajshme mund të vazhdojmë edhe për elementet tjerë optik dhe pas kalimit të dritës nëpër të gjithë, për vektorë të Stoksit fitojmë

$$K_n = M_n \cdot M_{n-1} \ldots\ldots M_2 M_1 K \tag{1}$$

Shohim se matrica e tërë sistemit është

$$M = M_n \cdot M_{n-1} \ldots \ldots M_2 M_1 \quad (2)$$

e barabartë me prodhimin e matricave të elementeve. Meqë shumëzimi i matricave nuk është komutativ, atëherë edhe rezultati përfundimtarë varet prej rendit me të cilin shumëzohen ato, përkatësisht prej rendit me të cilin drita përhapet nëpër elemente, çka është plotësisht e arsyeshme në kuptimin fizik.

Si shembull të zbatimit të matricave të Milerit në sistem prej disa elementeve optike do të cekim kalimin e dritës nëpër periskop rrethor. Ky përbëhet nga një polarizator rrethor nga i cili del drita e polarizuar rrethore

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dhe kalon nëpër analizator i cili përbëhet nga pllaka $\frac{\lambda}{4}$ dhe analizatorit linear. Për dritë dalëse nga ky sistem fitojmë

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \cos 2\psi & \sin 2\psi & 0 \\ \cos 2\psi & \cos^2 2\psi & \cos 2\psi \sin 2\psi & 0 \\ \sin 2\psi & \cos 2\psi \sin 2\psi & \sin^2 2\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - \sin 2\psi \\ \cos 2\psi\,(1 - \sin 2\psi) \\ \sin 2\psi\,(1 - \sin 2\psi) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\,(1 - \sin 2\psi)\begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\psi \\ \sin 2\psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kjo dritë është e polarizuar në mënyrë lineare me intensitet $\frac{1}{2}(1 - \sin 2\psi)$. Nëse dëshirojmë që fusha e analizatorit të jetë plotësisht e errët atëherë ψ duhet të ketë vlerën 45°.

8. SFERA E PUANKARES

Mënyrën gjeometrike të shprehjes së gjendjeve të ndryshme të polarizimit e paraqiti H. Puankare në vitin 1892. Këtu do të cekim vetëm gjendjet e polarizimit të treguara në sferë, por jo edhe zbatimin e saj mjaft të gjerë për probleme të ndryshme.

Çdo gjendje të polarizimit të plotë e përcaktojnë parametrat e Stoksit M, C dhe S duke supozuar se intensiteti është 1. Këta tre numra mund t'i mendojmë për koordinate të një pike në hapësirë. Pra, supozojmë se

$$
\begin{aligned}
x &= M = \cos 2\alpha \cos 2\psi \\
y &= C = \cos 2\alpha \sin 2\psi \qquad (1)\\
z &= S = \sin 2\alpha
\end{aligned}
$$

Do të mendojmë se kjo pikë paraqet figurën e cila shpreh gjendjen e polarizimit. Lehtë mund të bindemi se pikat të cilat i shprehin të gjitha gjendjet e polarizimit të plotë qëndrojnë në sipërfaqe të sferës me rreze një njësi, sepse nga (1)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Këte të dhënë e ka diktuar Puankareu dhe sipas tij sfera e ka marrë emrin.

Në fig. 150 shihet se pikën P në sferë e përcaktojnë gjatësia 2ψ dhe gjerësia 2α. Gjithashtu, shihet se pozita e pikës në sferë në mënyrë të thjeshtë është e lidhur me elementet e polarizimit eliptik të cilin e shpreh ajo. Gjysma e gjatësisë sferike të saj është e barabartë me azimutin e boshtit të madh të elipsës, ndërsa gjysma e gjerësisë sferike me elipticitetin arc tg $\frac{b}{a}$. Prandej, të gjitha pikat të cilat qëndrojnë në të njëjtin meridian e kanë të njëjtën gjatësi sferike dhe i përkasin elipsave me të njëjtin azimut të boshtit të madh por me marrëdhënie të ndryshme të boshtit të madh dhe të vogël. Përkundër kësaj, të gjitha pikat të cilat qëndrojnë në të njëjtën paralele i shprehin elipsat me të njëjtën marrëdhënie $\frac{b}{a}$, por me azimute të ndryshme të boshtit të madh.

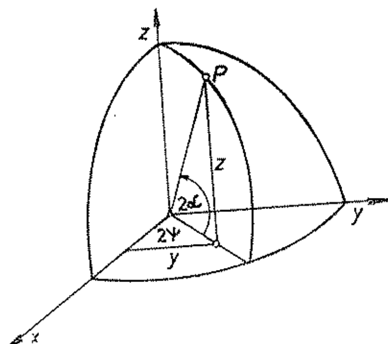


Fig. 150

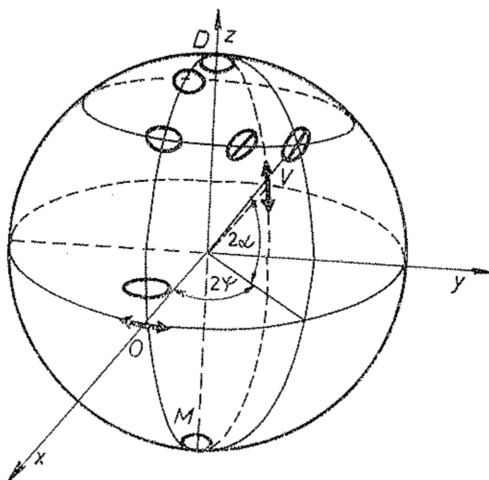


Fig. 151

Të gjitha pikat të cilat qëndrojnë në meridianin filestar i shprehin elipsat me bosht të madh horizontal, ndërsa elipsat me bosht të madh vertikal qëndrojnë në meridianin përballë këtij fillestar. Në meridianin

i cili kalon nëpër bosht y qëndrojnë pikat për të cilat azimuti i boshtit të madh të elipsës është 45°. Kjo shihet në fig. 151. Ekuatori i sferës e ka gjerësinë $\alpha = 0$ dhe në te qëndrojnë të gjitha pikat të cilat e shprehin polarizimin linear. Pika 0 në meridianin fillestar e shpreh polarizimin me kahje horizontale të lëkundjes, ndërsa pika V me kahje vertikale. Sipas marrëveshjes sonë α është pozitiv për rrotullim djathtas nëpër elipsë, ndërsa negativ për rrotullim majtas. Prandaj të gjitha pikat mbi ekuator paraqesin polarizimet eliptike të djathta, ndërsa ato nën ekutor, polarizimet e majta eliptike.

Për pole të sferës $\alpha = \pm 45°$. Këto dy pika shprehin polarizimin rrethor të dritës dhe ashtu që poli pozitiv ate të djathtë, ndërsa negativ polarizimin e majtë rrethor.

Të gjitha gjendjet e polarizimit të kundërt, në sferë të Puankares, shprehen me dy pika të cilat qëndrojnë në anë të kundërta të diametrit të çfarëdo drejtimi.

Interpretimi gjeometrik me ndihmën e sferës së Puankares shpreh faktin pse polarizimi linear me lëkundje horizontale, pastaj me azimut 45° dhe më në fund polarizimi rrethor i kanë vlerat e parametrave të Stoksit më të thjeshta. Këtyre kahjeve të polarizimit iu përgjigjen ato pika të sferës së Puankares të cilat gjenden në boshtet e koordinateve dhe në pole.

Në fund do të cekim se çdo pikë brenda sferës së Puankares grafikisht shpreh një gjendje të polarizimit të pjesërishëm, ndërsa vet qendra e saj shpreh dritën e pa polarizuar.

XXI. MAGNETOHIDRODINAMIKA

1. EKUACIONET THEMELORE TË MAGNETOHIDRODINAMIKËS

Magnetohidrodinamika studion veprimin reciprok të fushës magnetike dhe lëvizjes së fluidit me përqueshmëri të madhe elektrike. Ndonjë fluid, lëng apo gaz, i cili përmban bartësit e elektricitetit, elektronet e lira apo jonet, gjatë lëvizjes së vet, sikurse çdo rrymë elektrike është burim i një fushe magnetike e cila i shtohet fushës së jashtme magnetike. Në anën tjetër, fusha magnetike vepron në bartësit e elektricitetit në lëvizje dhe si e tillë vepron edhe në lëvizjen mekanike të fluidit. Kjo lidhmëri reciproke e fushës magnetike dhe lëvizjes së fluidit është objekt studimi i magnetohidrodinamikës.

Detyra e parë themelore qëndron në paraqitjen e ekuacioneve të magnetohidrodinamikës. Për këte do të supozojmë se fluidi nuk është feromagnetik ashtu që për permeabilitet të tij mund të merret permeabiliteti i boshllëkut.

Nga ekuacionet themelore diferenciale të hidrodinamikës duhet të merret ekuacioni i kontinuitetit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,(\rho \vec{v}) = 0 \tag{1}$$

Këtu me v e kemi shënuar shpejtësinë e rrymimit të fluidit, ndërsa me ρ dendësinë e tij. Natyrisht se të dy këto madhësi varen prej koordinateve dhe kohës.

Si ekuacion tjetër duhet të marrim ekuacionin e Navier-Stoksit (XI.10.12) si ekuacion themelor të fluidit viskoz

$$\rho\,\frac{\partial v}{\partial t} + \rho\, grad\,\frac{v^2}{2} - \rho\,\vec{v} \times rot\,\vec{v} = f - grad\,p + \eta \Delta v \tag{2}$$

Nga (XI.5.3) të tre anëtarët e parë të (2) mund të shkruhet në formën $\rho\, d\vec{v}/dt$. Në anën e djathtë gjendet forca $\vec{f}$ e cila vepron në njësi vëllimi. Kjo përbëhet prej dy pjesëve. Nga forca e gravitacionit $\rho \vec{g}$ dhe forca e fushës magnetike $\vec{j} \times \vec{B}$, ku $\vec{j}$ është dendësia e rrymës elektrike, ndërsa $\vec{B}$ induksioni i fushës magnetike. Prandej

$$\vec{f} = \rho \vec{g} + \vec{j} \times \vec{B} \tag{3}$$

Në shprehjen (2) me p e kemi shënuar presionin ndërsa η koeficientin e viskozitetit. Duke u bazuar në këte çka cekëm, ekuacioni (2) mund të shkruhet në formën

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\, grad\, p + \rho \vec{g} + \vec{j} \times \vec{B} + \eta \Delta \vec{v} \qquad (4)$$

Tani duhet të shfrytëzojmë ekuacionet themelore diferenciale për fushë elektromagnetike, ekuacionet e Maksvelit

$$rot\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (5)$$

$$rot\, \vec{B} = \vec{j} \qquad (6)$$

$$div\, \vec{B} = 0 \qquad (7)$$

Në shprehjen (6) nuk është shkruar anëtari i cili përmban derivatin e induksionit elektrik nga supozimi se është madhësi e vogël, për çka kufizohemi për dukuri me frekuencë të vogël, për çka kufizohemi për dukuri me frekuencë të vogël të ndërrimit të fushës apo me fjalë tjera për fusha që ndërrojnë ngadalë.

Në vazhdim duhet të paraqesim lidhmërinë në mes të dendësisë së rrymës dhe fushës elektrike. E dijmë se për këte ekziston shprehja

$$j' = \sigma E' \qquad (8)$$

ku σ është përqueshmëria elektrike, ndërsa dendësia e rrymës dhe intensiteti i fushës maten në sistem në të cilin mjedisi pushon. Pasi që mjedisi i shqyrtuar lëviz relativisht ndaj sistemit laboratorik me shpejtësi $\vec{v}$, shprehjen (8) duhet ta transformojmë për sistem laboratorik. Dendësia e rrymës në këte sistem përcaktohet me shumën e dendësisë në sistemin lëvizës $\vec{j}'$ dhe rrymës nga lëvizja e sistemit e cila është e barabartë me dendësinë e elektricitetit ρ_e dhe shpejtësisë së tij. Pra,

$$\vec{j} = \vec{j}' + \rho_e \vec{v} \qquad (9)$$

Supozojmë se gjatë lëvizjes nuk ndahen shumë bartësit e elektricitetit të dy parashenjave ashtu që $\rho_e = 0$, që tregon se dendësia e rrymës në të dy sistemit është e barabartë.

Duhet të transfermojmë edhe vektorin e fushës elektrike në sistem laboratorik. Kemi treguar në (XIV.1.b) se vlenë formula

$$\oint \vec{E}'\, d\vec{l} = -\int \frac{d\vec{B}}{dt}\, d\vec{S} \qquad (10)$$

e cila shpreh faktin se tensioni i indukuar i cili gjendet në anën e majtë paraqiten nga ndërrimi i fluksit të induksionit magnetik. Atje kemi supozuar se qarku në të cilin indukohet tensioni është i palëvizshëm, prandej derivatin total e kemi zëvendësuar me derivat parcial. Në këte rast qarku lëviz dhe derivati total duhet të shprehet në formën

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{B}$$

Shfrytëzojmë shprehjen

$$rot\,(\vec{B} \times \vec{v}) = (\vec{v}\nabla)\vec{B} - \vec{v}\,div\,\vec{B}$$

Nga (7) anëtari i dytë është i barabartë me zero, prandaj kemi

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + rot\,(\vec{B} \times \vec{v}) \tag{11}$$

E zëvendësojmë në (10) dhe fitojmë

$$\oint \vec{E}'\,d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,d\vec{S} - \int rot\,(\vec{B} \times \vec{v})\,d\vec{S}$$

Integralin e fundit e transformojmë sipas teoremës së Stoksit në integral vijor. Fitojmë

$$\oint (\vec{E}' + \vec{B} \times \vec{v})\,d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,d\vec{S}$$

Ligji i Faradeut në sistem laboratorik e ka formën

$$\oint \vec{E}\,d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,d\vec{S}$$

dhe duke i krahasuar gjejmë

$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{B} \times \vec{v}$$

prej nga

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$$

E zëvendësojmë në (9) dhe fitojmë lidhmërinë e kërkuar

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{12}$$

Kësisoji kemi fituar sistemin e ekuacioneve (1), (4), (5), (6), (7) dhe (12) të cilat paraqesin ekuacionet themelore të magnetohidrodinamikës.

Në fund të cekim se (shprehja (12) thjeshtësohet për mjedis përçues ideal. Nëse $\sigma \to \infty$, atëherë $\vec{j}/\sigma \to 0$ dhe do të mbetet

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} \tag{13}$$

Kjo është lidhja në mes të fushës dhe shpejtësisë për fluid përçues ideal.

2. DISA MADHËSI TË LIDHURA PËR FUSHËN MAGNETIKE

Për përcaktimin e disa madhësive karakteristike të fushës magnetike do të eliminojmë nga ekuacionet e Maksvelit vektorin elektrik. Kërkojmë rotorin e shprehjes (XXI.1.6) dhe e zëvendësojmë në (XXI. 1.12)

$$rot\, rot\, \vec{B} = \sigma[rot\, \vec{E} + rot\, (\vec{v} \times \vec{B})]$$

E zbërthejmë rotorin e dyfishtë në anën e majtë dhe e zëvendësojmë shprehjen (XXI.1.5)

$$grad\, div\, \vec{B} - \triangle \vec{B} = \sigma \left[-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + rot\, (\vec{v} \times \vec{B}) \right]$$

Shfrytëzojmë (XXI.1.7) dhe mbetet

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = rot\, (\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{1}{\sigma} \triangle \vec{B} \tag{1}$$

Kësisoji kemi fituar ekuacionin për induksion magnetik. Për mjedise përçuese ideale anëtari i dytë bie dhe fitojmë

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = rot\, (\vec{v} \times \vec{B}) \tag{2}$$

Nga (XXI.1.11) shihet se atëherë $\frac{d\vec{B}}{dt} = 0$ që do të thotë se fluksi magnetik nëpër vijë të mbyllur e cila lëviz së bashku me fluidin është konstant gjatë kohës. Në këte rast vijat e induksionit magnetik nuk deformohen gjatë kohës por lëvizin nëpër fluid si tërësi.

Do ta përcaktojmë shpejtësinë e tyre në kahje normale ndaj vektorit $\vec{B}$. Që të përfitojmë vektorin i cili qëndron normal ndaj $\vec{B}$ dhe gjendet në rrafshin e përcaktuar me $\vec{v}$ dhe $\vec{B}$ duhet formuar prodhimin $(\vec{B} \times \vec{v}) \times \vec{B}$. Që ky prodhim të ketë dimension të shpejtësisë duhet të pjesëtohet me B^2. Prandej shpejtësia e kërkuar është

$$\vec{u} = \frac{(\vec{B} \times \vec{v}) \times \vec{B}}{B^2} \tag{3}$$

Në mjedise përciellëse ideale vlenë (XXI.1.13), prandej mund të shkruajmë

$$\vec{u} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \tag{4}$$

Kjo është shpejtësia e drajfit të fluidit dhe vijave të induksionit magnetik.

Në shprehjen (XXI.1.4), anëtari i cili përmban dendësinë e rrymës, në rastin e fluidit përcjellës ideal mund të transformohet ashtu që në vend të dendësisë, të shkruhet induksioni magnetik. Pra,

$$\vec{j} \times \vec{B} = (rot\, \vec{B}) \times \vec{B} = - \vec{B} \times rot\, \vec{B}$$

Shfrytëzojmë shprehjen e njohur nga analiza vektoriale

$$\frac{1}{2} grad\, B^2 = (\vec{B}\, \nabla)\, \vec{B} + \vec{B} \times rot\, \vec{B}$$

prej nga

$$\vec{j} \times \vec{B} = - grad\, \frac{B^2}{2} + (\vec{B}\, \nabla)\, \vec{B} \tag{5}$$

Kur këte e zëvendësojmë në shprehjen (XXI.1.4), në te paraqitet anëtari — $grad\,(p + B^2/2)$, prej nga përfundojmë se $B^2/2$ paraqet një presion si rezultat i fushës magnetike. Prandej në magnetohidrodinamikë përveç presionit hidrostatik p ekziston edhe presioni magnetohidrostatik

$$p_m = \frac{B^2}{2} \tag{6}$$

Nëse forcat e fërkimit mund të mos përfillen, ndërsa forca e gravitacionit shprehet me ndihmën e potencialit $\rho \vec{g} = - grad\, U$, atëherë ekuacioni i lëvizjes (XXI.1.4) do të ketë formën

$$\rho \frac{dv}{dt} = - grad\,(p + p_m + U) + (\vec{B}\, \nabla)\, \vec{B} \tag{7}$$

Për disa marrëdhënie gjeometrike të thjeshta anëtari i fundit bie dhe për rastin statik ana e majtë është e barabartë me zero. Fitojmë

$$p + p_m + U = const. \tag{8}$$

Kjo shprehje tregon se për forcë konstante të gravitacionit, që gati gjithmonë është e realizuar, shuma e presioneve tjera duhet të jetë konstante. Kjo do të thotë se çdo ndërrim të presionit mekanik e përcjell ndërrimi i kundërt i presionit magnetik. Nëse fluidi është i kufizuar në ndonjë hapësirë të caktuar, atëherë pranë skajeve të kësaj hapësire presioni mekanik bie në zero, por presioni magnetik duhet të rritet aq sa mund të ndodhë që ky i fundit e mbyllë fluidin. Në këte dukuri bazohet i ashtuquajturi pinç efekti.

3. RRYMIMI MAGNETOHIDRODINAMIK NË MES TË DY RRAFSHEVE NË FUSHË TË KRYQËZUAR ELEKTRIKE DHE MAGNETIKE

Do të shqyrtojmë rrymimin e lëngut viskoz të pa ngjeshëm në mes të dy rrafsheve paralele, kur në te vepron fusha homogjene elektrike dhe magnetike kahjet e të cilave janë të kryqëzuara dhe normale në kahje të rrymimit. Le të gjendet lëngu në mes të dy rrafsheve paralele të larguara ndërmjet veti për a. E vendos sistemin e koordinateve sikurse në fig. 152. Boshti z qëndron normal ndaj këtyre rrafsheve, ashtu që njëri prej tyre gjendet në $z = 0$, ndërsa tjetri në $z = a$. Le të lëvizin të dy rrafshet në kahje të boshtit x me shpejtësi v_1 dhe v_2 sikurse tregon figura. Pasi që lëngu është viskoz, lëvizja e rrafsheve kufitare shkakton edhe rrymimin e tij në kahje të boshtit x me shpejtësi v e cila varet prej koordinatës z, nëse sypozojmë se këto janë pambarim në kahje të boshteve x dhe y. Le të jetë lëngu përcjellës dhe le të gjendet në fushë homogjene magnetike në kahje të boshtit z dhe fushë elektrike në kahje të boshtit y. Intensitet e tyre i shënojmë me B_o dhe E_o. Duhet të përcaktojmë shpejtësinë mekanike të lëngut $v(z)$.

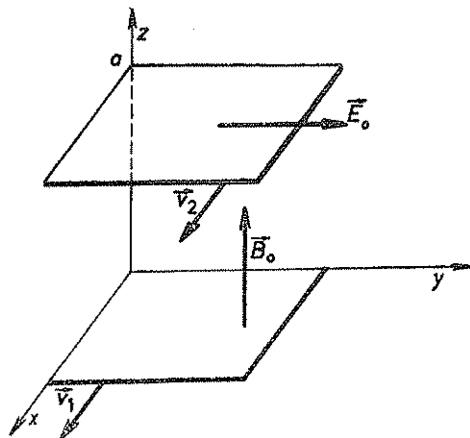


Fig. 152

Për lëngje të pa ngjeshura ekuacioni i kontinuitetit redukohet në

$$div\,\vec{v} = 0 \qquad (1)$$

Në ekuacionin e lëvizjes (XXI.1.4) nuk do të përfillim ndikimin e gravitacionit dhe do të shqyrtojmë rrymimin stacionar. Do të ketë formën

$$grad\, p = \vec{j} \times \vec{B} + \eta \triangle \vec{v} \qquad (2)$$

Sipas supozimit tonë fusha homogjene elektrike vepron vetëm në kahje të boshtit y, prandej dendësia e rrymës elektrike e ka vetëm y — komponenten. Këte e përcaktojmë sipas shprehjes (XXI.1.12). Pasi $\vec{B}$ e ka

vetëm z — komponenten, ndërsa $\vec{v}$ vetëm komponenten x, atëherë komponentja y e prodhimit vektorial $(\vec{v} \times \vec{B})_y = - B_o v_x(z)$, ndërsa shprehja (XXI.1.12) në këte rast do ta ketë formën

$$j_y(z) = \sigma[E_o - B_o v(z)] \tag{3}$$

E njehsojmë vetëm komponenten x të ekuacionit (2)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = (\vec{j} \times \vec{B})_x + \eta \frac{d^2 v}{dz^2}$$

Meqë është

$$(\vec{j} \times \vec{B})_x = j_y B_o = B_o \sigma (E_o - B_o v) \tag{4}$$

do të kemi

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \sigma B_o (E_o - B_o v) + \eta \frac{d^2 v}{dz^2} \tag{5}$$

Supozojmë se presioni mekanik në kahje të boshtit x është konstant. Atëherë ana e majtë e ekuacionit të fundit është e barabartë me zero dhe do të mbetet ekuacioni diferencial

$$\frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{\sigma B^2_o v}{\eta} = - \frac{\sigma B^2_o}{\eta} \frac{E_o}{B_o} \tag{6}$$

Shënojmë shkurtimisht me

$$\frac{\sigma E^2_o}{\eta} = \left(\frac{M}{a}\right)^2$$

ku është

$$M = \sqrt{\frac{\sigma B^2 a^2}{\eta}} \tag{7}$$

Kjo konstant quhet numri i Hartmanit dhe paraqet konstant karakteristike të rëndësishme për rrymim të lëngut. Me ndihmën e këtij numri ekuacioni diferencial (6) mund të shkruhet në formën

$$\frac{d^2 v}{dz^2} - \left(\frac{M}{a}\right)^2 v = - \left(\frac{M}{a}\right)^2 \frac{E_o}{B_o} \tag{8}$$

Ky është ekuacion diferencial jo homogjen me koeficient konstant. Ekuacioni gjegjës homogjen i ka integralet partikulare

$$v = e^{\pm \frac{M}{a} z}$$

ndërsa integrali partikular i ekuacionit jo homogjen është konstantja E_o/B_o. Zgjidhja e përgjithshme e ekuacionit (8) është

$$v(z) = C_1 e^{-\frac{M}{a}z} + C_2 e^{+\frac{M}{a}z} + \frac{E_o}{B_o} \tag{9}$$

Duhet t'i përcaktojmë konstatntet e integrimit nga konditat kufitare:

$$v = v_1 \text{ për } z = 0 \text{ dhe } v = v_2 \text{ për } z = a$$

Zëvendësimi i këtyre konditave na jep

$$v_1 = C_1 + C_2 + \frac{E_o}{B_o}$$

$$v_2 = C_1 e^M + C_2 e^{-M} + \frac{E_o}{B_o}$$

Pasi të zgjidhim ekuacionin e parë sipas C_2 dhe e zëvendësojmë në të dytin, fitojmë

$$C_1 = \frac{1}{2sh\,M}\left[v_1 e^M - v_2 + \frac{E_o}{B_o}\,(e^{-M} - 1)\right]$$

dhe në mënyrë të ngjashme

$$C_2 = \frac{1}{2sh\,M}\left[v_1 e^M - v_2 + \frac{E_o}{B_o}\,(1 - e^M)\right]$$

Vlerat e fituara i zëvendësojmë në (9) dhe pas transformimeve elementare fitojmë

$$v(z) = \frac{1}{sh\,M}\left[v_1\, sh\,M\,\frac{a-z}{a} + v_2\, sh\,M\,\frac{z}{a} - \right.$$

$$\left. - \frac{E_o}{B_o}\left(sh\,M\,\frac{a-z}{a} + sh\,M\,\frac{z}{a}\right)\right] + \frac{E_o}{B_o} \tag{10}$$

Kjo është shprehja për shpërndarje të shpejtësive të lëngut. Ne do ta diskutojmë për dy raste ekstremale.

Së pari supozojmë se rrymimi e ka numrin e Hartmanit mjaft të madh. Pra, $M \gg 1$. Do ta specializojmë shprehjen (10) për $z \ll a$, që do të thotë se kufizohemi në hapësirë në afërsi të pllakës së poshtme. Në

këte rast $sh\,M\,\dfrac{z}{a} \to 0$ dhe do të mbetet

$$v(z) = \frac{E_o}{B_o} + \left(v_1 - \frac{E_o}{B_o}\right)\frac{sh\,M(1 - z/a)}{sh\,M} \tag{11}$$

Faktorin e fundit e zbërthejmë me ndihmën e funksioneve eksponenciale

$$\frac{sh(M - M\,z/a)}{sh\,M} = \frac{e^{M}e^{-M\frac{z}{a}} - e^{-M}e^{M\frac{z}{a}}}{e^{M} - e^{-M}}$$

E shumëzojmë numruesin dhe emëruesin me e^{-M}

$$\frac{sh(M - M\,z/a)}{sh\,M} = \frac{e^{-M\frac{z}{a}} - e^{-2M}e^{M\frac{z}{a}}}{1 - e^{-2M}}$$

Pasi që M është mjaft i madh, mund të marrim se faktori e^{-2M} tenton në zero dhe do të kemi

$$\frac{sh(M - M\,z/a)}{sh\,M} \rightarrow e^{-M\frac{z}{a}}$$

Vlerën e fituar e zëvendësojmë në (11)

$$v(z \ll a) \approx \frac{E_o}{B_o} + \left(v_1 - \frac{E_o}{B_o}\right) e^{-M\frac{z}{a}} \tag{12}$$

Shihet nga kjo shprehje se për $z = 0$ shpejtësia e ka vlerën v_1, ndërsa për z më të madh e ka vlerën konstante E_o/B_o. Këte vlerë e arrin në afërsi të $z = \frac{a}{M}$. Në fig. 153 është paraqitur grafikisht shpejtësia e rrymimit. Shihet se në pllakën e poshtme, për $z = 0$ e ka vlerën v_1 dhe pastaj menjëherë rritet deri te vlera konstante E_o/B_o.

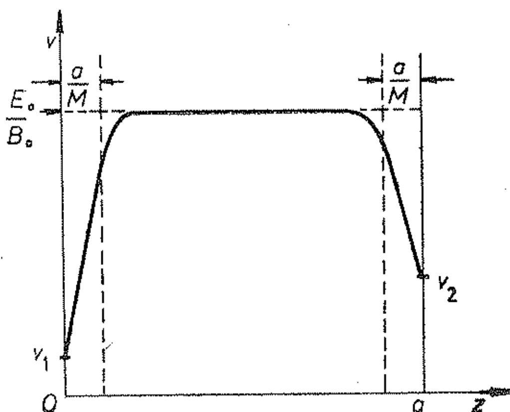


Fig. 153

Duhet të shqyrtojmë shpejtësinë edhe në afërsi të pllakës së lartë. Për z e cila i afrohet vlerës $z = a$ në (10) kemi $sh\,M\frac{a-z}{a} \rightarrow 0$, prandaj mbetet

$$v(z \rightarrow a) \approx \frac{E_o}{B_o} + \left(v_2 - \frac{E_o}{B_o}\right)\frac{sh\,Mz/a}{shM}$$

Faktori i fundit mund të transformohet kësisoji

$$\frac{sh\,M\frac{z}{a}}{sh\,M} = \frac{e^{M\frac{z}{a}} - e^{-M\frac{z}{a}}}{e^{M} - e^{-M}} = \frac{e^{M\left(\frac{z}{a} - 1\right)} - e^{-M\left(\frac{z}{a} + 1\right)}}{1 - e^{-2M}}$$

Anëtari $e^{-M\left(\frac{z}{a}+1\right)}$ është i afërt me e^{-2M} dhe nëse nuk e përfillim, fitojmë

$$\frac{sh\, M\, z/a}{sh\, M} \rightarrow e^{-M\frac{a-z}{a}}$$

prej nga

$$v(z \rightarrow a) \approx \frac{E_o}{B_o} + \left(v_2 - \frac{E_o}{B_o}\right) e^{-M\frac{a-z}{a}} \tag{13}$$

Kjo shprehje tregon se shpejtësia për $z = a$, është e barabartë me shpejtësinë e pllakës v_2, ndërsa për ndryshim më të madh në mes të z dhe a do të ketë vlerën konstante E_o/B_o. Këte e tregon ana e djathtë e figurës 153. Përfundojmë se shpejtësia e rrymimit në pjesën më të madhe është konstante dhe vetëm në afërsi të sipërfaqeve kufitare ndërron shumë shpejt dhe zvogëlohet deri në shpejtësi të pllakave.

Rasti tjetër ekstremal paraqitet për vlerë të vogël të numrit të Hartmanit, pra për $M \ll 1$. Atëherë në ekuacionin (8) mund të mos përfillet M^2. Do të kemi

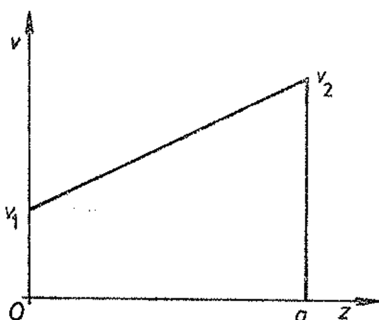


Fig. 154

$$\frac{d^2v}{dz^2} = 0$$

i cili e ka zgjidhjen e përgjithshme

$$v = C_3 z + C_4$$

Edhe për këte rast i përcaktojmë konstantet duke shfrytëzuar konditat kufitare. Fitojmë

$$v = v_1 + \frac{z}{a}\,(v_2 - v_1) \tag{14}$$

Kemi fituar ndërrim linearë të shpejtësisë sikurse te lëvizja shtresore e lëngut viskoz. Në këte rast zotëron viskoziteti mekanik i forcës elektromagnetike, ndërsa në rastin e mëparshëm vlen e kundërta. Grafiku i varshmërisë së shpejtësisë prej z është paraqitur në fig. 154.

Kësisoji i kemi përcaktuar vetitë mekanike të fluidit. Në vazhdim do të përcaktojmë edhe fushën magnetike të tij.

Fillojmë nga ekuacioni (XXI.1.6) i Maksvelit. Pasi që në rastin tonë dendësia e rrymës e ka vetëm komponenten y sipas (3) kemi

$$rot_y \vec{B} = j_y = \sigma\,(E_o - B_o v)$$

Meqë komponentja z e vektorit $\vec{B}$ është konstante, për komponente të rotorit fitojmë

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} \sigma(E_o - B_o v) \tag{15}$$

Për shpejtësi zëvendësojmë shprehjen (10). Do të kemi

$$\frac{dB_x}{dz} = \frac{\sigma B_o}{sh\, M} \left[\left(v_1 - \frac{E_o}{B_o} \right) sh\, M\, \frac{a-z}{a} + \left(v_2 - \frac{E_o}{B_o} \right) sh\, M\, \frac{z}{a} \right] \tag{16}$$

Kondităt kufitare të problemit nuk janë të përcaktuar me te, prandej do të supozojmë se për $z = 0$ dhe $z = a$, $B_x = 0$. Për këte rast nga (15) kemi

$$E_o - B_o v_1 = 0$$

dhe për $z = a$

$$E_o - B_o v_2 = 0$$

prej nga

$$E_o = \frac{B_o}{2} (v_1 + v_2) \tag{17}$$

E zëvendësojmë në (16)

$$\frac{dB_x}{dz} = \frac{\sigma(v_2 - v_1)}{2} B_o \frac{sh\, M \frac{a-z}{a} - sh\, M \frac{z}{a}}{sh\, M} \tag{18}$$

E integrojmë

$$B_x = \frac{\sigma(v_2 - v_1)a}{2} B_o \frac{-ch\, M\, \frac{a-z}{a} - ch\, M\, \frac{z}{a}}{M\, sh\, M} + K$$

Konstanten e integrimit e gjejmë nga kondita $B_x = 0$ për $z = 0$. Vlera e saj është

$$K = \frac{\sigma(v_2 - v_1)a}{2} B_o \frac{1 + ch\, M}{M\, sh\, M}$$

E shënojmë shkurtimisht me

$$R = \frac{\sigma(v_2 - v_1)a}{2} \tag{19}$$

dhe përfundimisht fitojmë

$$B_x = R\, B_o \frac{1 + ch\, M - ch\, M\, z/a - ch\, M(a-z)/a}{M\, sh\, M} \tag{20}$$

Shprehjen e fituar do ta specializojmë për vlera ekstremale të numrit të Harmanit.

Së pari marrim rastin kur $M \gg 1$

E zhvillojmë thyesën me ndihmën e funksioneve eksponenciale

$$\frac{2 + e^{M} + e^{-M} - e^{Mz/a} - e^{-M/z} - e^{M}e^{-Mz/a} - e^{-M}e^{Mz/a}}{M(e^{M} - e^{-M})}$$

E shumëzojmë numëruesin dhe emëruesin me e^{-M}

$$\frac{2e^{-M}+1+e^{-2M}-e^{-M(a-z)/a}-e^{-M(z+a)/a}-e^{-Mz/a}-e^{-2M}\,e^{Mz/a}}{M(1-e^{-2M})}$$

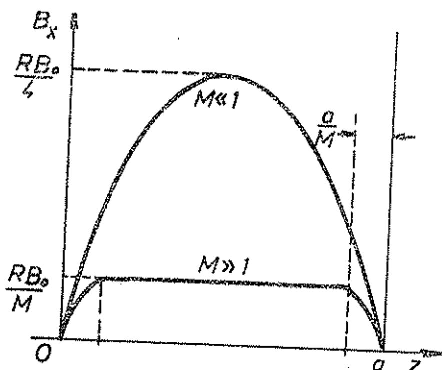


Fig. 155

Nga vlera e madhe e M nuk i përfillim anëtarët me faktorin e^{-2M} dhe $2e^{-M}$. Mbetet

$$B_x(z) \approx \frac{R\,B_o}{M}\,(1 - e^{-Mz/a} - e^{-M(a-z)/a}) \tag{21}$$

Shohim se kjo fushë, përveç në afërsi të pllakave $z = 0$ dhe $z = a$ e ka vlerën konstante

$$B_x = \frac{R\,B_o}{M}$$

ndërsa në pllaka bie në zero. Kjo shpërndarje e fushës grafikisht është paraqitur në pjesën e poshtme të fig. 155.

Rasti tjetër ekstremal paraqitet për $M \ll 1$. Atëherë në (15) mund të zëvendësohet për shpejtësi shprehja (14), ndërsa për E_o shprehja (17). Fitojmë

$$\frac{dB_x}{dz} = \sigma B_o\,\frac{v_2-v_1}{2}\left(1 - \frac{2z}{a}\right)$$

dhe me ndihmën e (19)

$$\frac{dB_x}{dz} = R\,B_o\left(\frac{1}{a} - \frac{2z}{a^2}\right)$$

Me integrim fitojmë

$$B_x = R\,B_o\left(\frac{z}{a} - \frac{z^2}{a^2}\right) \tag{22}$$

shprehjen për induksion magnetik. Shihet se ndërron sipas ligjit parabolik e cila i ka zerot për $z = 0$ dhe $z = a$, ndërsa kulmin për $z = a/2$ me lartësi $R\,B_o/4$ sikurse tregon lakorja e epërme në fig. 155.

4. PINÇ EFEKTI

Kjo është dukuria e mbylljes së fluidit përcjellës nga fusha e vet magnetike në ndonjë pjesë të caktuar të hapësirës. Që të kryejmë njehsimin për këte mundësi supozojmë se fluidi përcjellës rrjedh nëpër cilindër pambarim të gjatë dhe dendësia e rrymës elektrike në te varet vetëm nga largësia nga boshti i tij. Për shqyrtimin e këtij problemi është i preferuar përdorimi i koordinateve cilindrike. Atëherë dendësia e rrymës e ka kahjen e boshtit z dhe varet vetëm prej r, pra $j_z = j(r)$. Nga simetria cilindrike vijat e forcës së fushës magnetike kanë formë rrethore rreth boshtit të cilindrit. Prandej në këto koordinate induksioni magnetik e ka vetëm komponenten azimutale B e cila gjithashtu varet prej r.

Fillojmë nga shprehja (XXI.2.7) në të cilën nuk do të përfillim efektin e gravitacionit. Për gjendje stacionare do të ketë formën

$$-\, grad\, p - grad\, p_m + (\vec{B}\nabla)\vec{B} = 0$$

E zëvendësojmë (XXI.2.6) dhe e shprehim ekuacionin në koordinate cilindrike. Fitojmë

$$-\frac{dp}{dr} - \frac{d}{dr}\left(\frac{B^2}{2}\right) - \frac{B^2}{r} = 0 \qquad (1)$$

Për çdo pikë jasht fluidit, pra për $r > R$, ky vepron sikurse rrymë me intensitet

$$I = \int_0^R p(r)\, 2\pi r\, dr \qquad (2)$$

e cila në vendin e vrojtimit e ka fushën magnetike të shprehur me formulën (XIII.2.4) për rryma vijore

$$B = k_m \frac{2I}{r} \qquad (3)$$

Në shprehjen (1) dy anëtarët e fundit mund të shprehen si derivat i prodhimit, prandej do të ketë formën

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{2r^2}\frac{d}{dr}(r^2 B^2) \qquad (4)$$

dhe me integrim fitojmë

$$p(r) = p_o - \frac{1}{2}\int_0^r \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 B^2)\, dr \qquad (5)$$

Konstantja e integrimit p_o paraqet presionin i cili zotëron në bosht të rrymimit cilindrik të fluidit. Nëse fluidi duhet të jetë i mbyllur në cilindër me rreze R, atëherë në skaje të tij, për $r = R$, presioni duhet të bie në zero. Nga (5) do të fitojmë

$$p_o = \frac{1}{2} \int_{o}^{2} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 B^2)\, dr$$

dhe pasi ta zëvendësojmë në (5) do të kemi

$$p(r) = \frac{1}{2} \int_{r}^{R} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 B^2)\, dr \qquad (6)$$

Kemi fituar shprehjen për varshmëri të presionit i cili zotëron në fluid nga largësia prej boshtit të cilindrit. Për përcaktimin e plotë duhet të dijmë edhe induksionin magnetik si funksion të r.

Në përgjithësi, pa kurrfarë supozimi të varshmërisë funksionale të cekur mund të njehsohet vlera mesatare e presionit. Sipas rregullës së njehsimit të vlerës mesatare, duhet presioni të integrohet nëpër sipërfaqen e prerjes së fluidit dhe të pjesëtohet me sipërfaqen e prerjes. Pra,

$$\bar{p} = \frac{1}{R^2\pi} \int_{o}^{R} p(r)\, 2\pi\, r dr = \frac{2}{R^2} \int_{o}^{R} p(r)\, r\, dr \qquad (7)$$

Këtu mund të kryhet integrimi parcial

$$\bar{p} = \frac{2}{R^2} \left[\frac{r^2}{2} p(r) \Big|_{o}^{R} - \int_{o}^{R} \frac{r^2}{2} \frac{dp}{dr} dr \right]$$

Anëtari i parë në kufij e ka vlerën zero, ndërsa në të dytin e zëvendësojmë vlerën (4)

$$\bar{p} = \frac{1}{2R^2} \int_{o}^{R} \frac{d}{dr} (r^2 B^2)\, dr = \frac{1}{2R^2} (r^2 B^2) \Big|_{o}^{R}$$

$$\bar{p} = \frac{B^2}{2} = k^2_m \frac{2I^2}{R^2} \qquad (8)$$

Shprehja e fundit tregon se vlera mesatare e presionit mekanik është e barabartë me presionin magnetik.

Të shqyrtojmë tani shprehjen (6) për shpërndarje të presionit. Specialisht do të marrim se dendësia e rrymës në fluid nuk varet prej r. Pra, $j(r) = const.$ Induksioni magnetik i kësaj rryme brenda hapësirës së rrymës, pra, për $r < R$ gjendet sipas shprehjes

$$B(r) = k_m \frac{2Ir}{R^2} \qquad (9)$$

E zëvendësojmë në (6)

$$p(r) = k^2_m \frac{2I^2}{R^4} \int_r^R \frac{1}{r^2} \frac{dr^4}{dr} dr = k^2_m \frac{4I^2}{R^4} r^2 \Big|_r^R$$

prej nga

$$p(r) = k^2_m \frac{4I^2}{R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{9}$$

shohim se presioni zvogëlohet në mënyrë parabolike. Në fig. 156 është paraqitur grafikisht varshmëria e presionit nga r e cila fillon nga kulmi i parabolës $p_o = k^2_m 4I^2/R^2$ dhe bie në zero për $r = R$. Në grafikon njëkohësisht është vizatuar edhe lakorja për dendësi të rrymës j e cila është konstante brenda fluidit dhe në skaje të tij menjëherë zvogëlohet në zero. Pastaj është vizatuar edhe shpërndarja e induksionit magnetik. Brenda fluidit është funksion linearë i r, sikurse shihet nga shprehja (9), ndërsa jasht tij zvogëlohet në mënyrë hiperbolike sipas shprehjes (3).

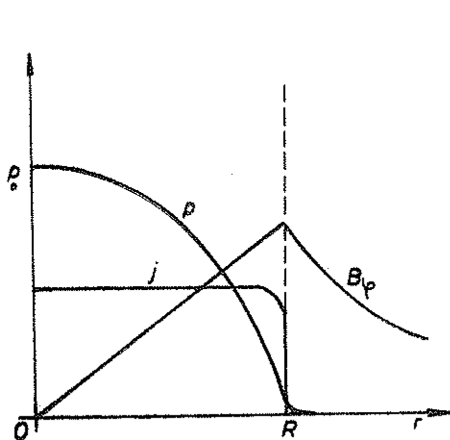


Fig. 156

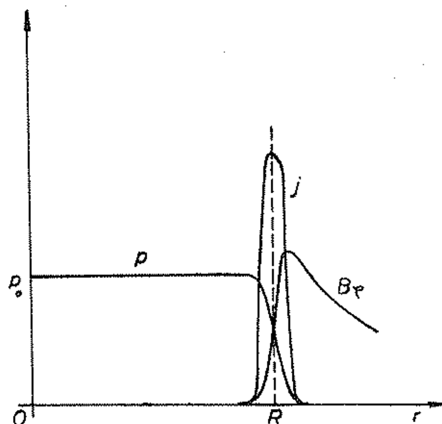


Fig. 157

Rastin tjetër special e fitojmë kur rryma është e koncentruar në shtresë të hollë në skaj të fluidit. Në fig. 157 është paraqitur grafikisht shpërndarja e dendësisë së rrymës. Shihet se ka maje të hollë dhe shumë të lartë në largësinë $r = R$. Induksioni magnetik brenda fluidit është i barabartë me zero, por në kufij ngritet deri te një maksimum ashtu që jasht fluidit prap zvogëlohet në mënyrë hiperbolike sipas shprehjes (3). Për presion, sipas (5) brenda fluidit për $B = 0$ fitohet vlera konstante p_o, ndërsa në skaj të fluidit shumë shpejtë bie në zero.

Këta shembuj tregojnë se fluidi përcjellës mund të mbyllet në hapësirë të caktuar nga fusha vetjake magnetike. Por, marrëdhëniet e këtilla të thjeshta paraqiten vetëm nëse fluidi ka formë ideale cilindrike.

Nëse boshti i cilindrit përkulet paraqiten forcat të cilat e zmadhojnë këte deformim. Gjithashtu nëse në një vend rrezja e cilindrit është e zvogëluar, prap fusha magnetike do ta zmadhojë këtë deformim. Kështu deformimet e këtilla dërgojnë deri në jo stabilitet dhe duhet me mjete tjera të evitohen.

5. VALET MAGNETOHIDRODINAMIKE

Do të shqyrtojmë valet në fluid në të cilin veprojnë forcat hidrodinamike dhe elektromagnetike.

Supozojmë se fluidi është përcjellës ideal dhe nuk ka viskozitet. Që të mund të përhapen valët nëpër te duhet supozuar se ky mjedis është i ngjajshëm. Forca e gravitacionit te lëvizjet valore është e pa përfillshme. Duke u bazuar në këto supozime ekuacionet themelore e kanë formën:

Ekuacioni i kontinuitetit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,(\rho \vec{v}) = 0 \tag{1}$$

ekuacioni i lëvizjes

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}\,\nabla)\,\vec{v} = -\,grad\,p - \vec{B} \times rot\,\vec{B} \tag{2}$$

dhe ekuacioni i Maksvelit

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = rot\,(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{3}$$

Supozojmë gjithashtu se valët shkaktojnë ndërrim të vogël të dendësisë dhe induksionit magnetik. Në mjedis pa valë le të jetë dendësia ρ_o ndërsa induksioni magnetik $\vec{B}_o$. Shpejtësia e grimcave është zero. Kur nëpër mjedis përhapen valët, atëherë dendësia ndryshon nga mesatarja për $\rho_1(\vec{r}, t)$ ndërsa induksioni magnetik nga $\vec{B}_o$ për $\vec{B}_1(\vec{r}, t)$. Shpejtësia e grimcave do të jetë $\vec{v}\,(\vec{r}, t)$. Pra,

$$\vec{B} = \vec{B}_o + \vec{B}_1\,(\vec{r}, t) \tag{4}$$

$$\rho = \rho_o + \rho_1\,(\vec{r}, t) \tag{5}$$

$$\vec{v} = \vec{v}\,(\vec{r}, t) \tag{6}$$

Gjatë kësaj duhet të kemi në konsiderim se madhësitë ρ_1, $\vec{B}_1$ dhe $\vec{v}$ janë mjaft të vogla ashtu që prodhimi i tyre si dhe shkallët e larta mund të mos përfillen. Këto vlera do t'i zëvendësojmë në ekuacionet e lëvizjes. Ekuacioni i kontinuitetit është

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_o + \rho_1) + div\,(\rho_o \vec{v} + \rho_1 \vec{v}) = 0$$

dhe nuk e përfillim prodhimin $\rho_1 \vec{v}$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_o\, div\, \vec{v} = 0 \qquad (7)$$

I zëvendësojmë vlerat edhe në ekuacionin (2)

$$(\rho_o+\rho_1)\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\rho_o+\rho_1)(\vec{v}\,\nabla)\,\vec{v} + grad\, p + (\vec{B}_o+\vec{B}_1)\times(rot\,\vec{B}_o + rot\,\vec{B}_1) = 0$$

Nuk i përfillim prodhimet e madhësive të vogla dhe marrim në konsiderim se $rot\,\vec{B}_o = 0$, sepse $\vec{B}_o = const.$ Do të kemi

$$\rho_o \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + grad\, p + \vec{B}_o \times rot\,\vec{B}_1 = 0$$

Ka ngelë të paraqesim dendësinë në vend të presionit. Lidhjen në mes të këtyre madhësive e përcakton ekuacioni i gjendjes. Mund të merret në rast të përgjithshëm në formën

$$p = p(\rho)$$

Ne kërkojmë

$$grad\, p = \frac{dp}{d\rho}\, grad\, \rho$$

E dijmë nga hidrodinamika se faktori

$$\frac{dp}{dp} = c^2$$

shpreh shpejtësinë e përhapjes së valëve të tingullit, ndërsa

$$grad\, \rho = grad\,(\rho_o + \rho_1) = grad\, \rho_1$$

dhe ekuacioni i lëvizjes e ka formën përfundimtare

$$\rho_o \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + c^2\, grad\, \rho_1 + \vec{B}_o \times rot\,\vec{B}_1 = 0 \qquad (8)$$

Ekuacioni (3) është

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B}_o + \vec{B}_1) - rot\,[\vec{v} \times (\vec{B}_o + \vec{B}_1)] = 0$$

ose

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} - rot\,(\vec{v} \times \vec{B}_o) = 0 \tag{9}$$

Duke shfrytëzuar këto tri ekuacione duhet të fitojmë ekuacionin e shpejtësisë së valëve magnetohidrodinamike. E derivojmë sipas kohës ekuacioni (8)

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} + \frac{c^2}{\rho_o}\,grad\,\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_o}\,\vec{B}_o \times rot\,\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = 0$$

Zëvendësojmë vlerat (7) dhe (9)

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - c\,grad\,div\,\vec{v} + \frac{\vec{B}_o}{\rho_o} \times rot\,rot\,(\vec{v} \times \vec{B}_o) = 0$$

E përkufizojmë shpejtësinë e Alfvenit në formën

$$\vec{v}_A = \frac{\vec{B}_o}{\sqrt{\rho_o}} \tag{10}$$

dhe do të kemi

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - c^2\,grad\,div\,\vec{v} + \vec{v}_A \times rot\,rot\,(\vec{v} \times \vec{v}_A) \tag{11}$$

Ky është ekuacioni diferencial për shpejtësinë e kërkuar.

Për valë të rrafshta të cilat përhapen në kahje të vektorit $\vec{k}$ vlenë shprehja

$$\vec{v} = \vec{v}_o\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \tag{12}$$

ku ω është frekuenca ciklike e valëve. E specializojmë ekuacionin (11) për valë të rrafshta. Nga (12) fitojmë

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{v}_o\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = -\omega^2 \vec{v} \tag{13}$$

Kërkojmë edhe

$$div\,\vec{v}\,div\,\vec{v}_o\,e^{i(\vec{k}\,\vec{r}\,-\,\omega t)} = \vec{v}_o\,grad\,e^{i(\vec{k}\,\vec{r}\,-\,\omega t)} = i\,\vec{k}\,\vec{v}_o\,e^{i(\vec{k}\,\vec{r}\,-\,\omega t)}$$

$$div = \vec{v} = i\,\vec{k}\,\vec{v} \qquad (14)$$

dhe

$$grad\,div\,\vec{v} = i\,grad\,(\vec{k}\,\vec{v}) = i\,[(\vec{k}\,\nabla)\,\vec{v} + \vec{k} \times rot\,\vec{v}]$$

për këte është e nevojshme njohja e

$$rot\,\vec{v} = grad\,e^{i(\vec{k}\,\vec{r}\,-\,\omega t)} \times \vec{v}_o = e^{i(\vec{k}\,\vec{r}\,-\,\omega t)}\,i\,\vec{k} \times \vec{v}_o$$

$$rot\,\vec{v} = i\,(\vec{k} \times \vec{v}) \qquad (15)$$

dhe

$$(\vec{k}\,\nabla)\,\vec{v} = (\vec{k}\,\nabla)\,\vec{v}_o\,e^{i(\vec{k}\,\vec{r}\,-\,\omega t)} = i\,(\vec{k}\,\vec{k})\,\vec{v} = i\,k^2\,\vec{v} \qquad (16)$$

prej nga

$$grad\,div\,\vec{v} = -\,k^2\,\vec{v} - \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{v}) =$$

$$= -\,k^2\,\vec{v} - [\vec{k}\,(\vec{k}\,\vec{v}) - \vec{v}\,k^2]$$

ose

$$grad\,div\,\vec{v} = -\,\vec{k}\,(\vec{k}\,\vec{v}) \qquad (17)$$

Gjatë njehsimit të anëtarit të tretë të (11) duhet marrë në konsiderim se $\vec{v}_A = const.$, prandej sipas rregullës së analizës vektoriale është

$$rot\,(\vec{v} \times \vec{v}_A) = (\vec{v}_A\,\nabla)\,\vec{v} - \vec{v}_A\,div\,\vec{v}$$

Në mënyrë të ngjajshme sikurse në (16) fitojmë

$$(\vec{v}_A\,\nabla)\,\vec{v} = i\,(\vec{v}_A \cdot \vec{k})\,\vec{v}$$

dhe me ndihmën e (14) kemi

$$rot\,(\vec{v} \times \vec{v}_A) = i\,(\vec{v}_A\,\vec{k})\,\vec{v} - i\,\vec{v}_A\,(\vec{k}\,\vec{v}) \qquad (18)$$

Kërkojmë edhe një herë rotorin e kësaj shprehje

$$rot\,rot\,(\vec{v} \times \vec{v}_A) = i\,rot\,(\vec{v}_A\,\vec{k})\,\vec{v} - i\,rot\,\vec{v}_A\,(\vec{k}\,\vec{v}) =$$

$$= i\,(\vec{v}_A\,\vec{k})\,rot\,\vec{v} - i\,grad\,(\vec{k}\,\vec{v}) \times \vec{v}_A$$

E dijmë se

$$grad\,(\vec{k}\,\vec{v}) = (\vec{k}\,\nabla)\,\vec{v} + \vec{k}\times rot\,\vec{v} = i\,k^2\,\vec{v} + \vec{k}\times i\,(\vec{k}\times\vec{v}) =$$

$$= i\,k^2\,\vec{v} + i\,\vec{k}\,(\vec{k}\,\vec{v}) - i\,\vec{v}\,k^2 = i\,\vec{k}\,(\vec{k}\,\vec{v})$$

prandej

$$rot\,rot\,(\vec{v}\times\vec{v}_A) = -(\vec{v}_A\,\vec{k})\,(\vec{k}\times\vec{v}) + \vec{k}\,(\vec{k}\,\vec{v})\times\vec{v}_A \tag{19}$$

Në anëtarin e tretë të (11) kërkojmë

$$\vec{v}_A\times rot\,rot\,(\vec{v}\times\vec{v}_A) = \vec{v}_A\times[\vec{k}\,(\vec{k}\,\vec{v})\times\vec{v}_A] - \vec{v}_A\times(\vec{v}_A\,\vec{k})\,(\vec{k}\times\vec{v}) =$$

$$= \vec{k}\,(\vec{v}\,\vec{k})\,v^2{}_A - \vec{v}_A(\vec{v}_A\,\vec{k})\,(\vec{v}\,\vec{k}) - (\vec{v}_A\,\vec{k})\,[\vec{k}\,(\vec{v}_A\,\vec{v}) - \vec{v}(\vec{v}_A\,\vec{k})] \tag{20}$$

I zëvendësojmë shprehjet (13), (17) dhe 20) në (11)

$$-\omega^2\,\vec{v} + (c^2 + v^2{}_A)\,\vec{k}\,(\vec{v}\,\vec{k}) + (\vec{v}_A\,\vec{k})\,[\vec{v}\,(\vec{v}_A\,\vec{k}) - \vec{k}\,(\vec{v}_A\,\vec{v}) -$$

$$- \vec{v}_A\,(\vec{v}\,\vec{k})] = 0 \tag{21}$$

Kështu kemi fituar specializimin e shprehjes (11) për valë të rrafshta. Kjo mund të thjeshtësohet mjaft nëse valët përhapen në kahje normale ndaj $\vec{v}_A$, sepse atëherë anëtari i tretë është i barabartë me zero. Pra,

$$-\omega^2\,\vec{v} + (c^2 + v^2{}_A)\,\vec{k}\,(\vec{v}\,\vec{k}) = 0$$

fitojmë valën longitudinale magnetosonike me shpejtësi të fazës

$$u_{long} = \sqrt{c^2 + v^2{}_A} \tag{22}$$

e cila është e barabartë me rezultanten e shpejtësisë së tingullit dhe një lloji tjetër të valëve të cilat njihen si valë të Alfvenit.

Mundësia tjetër e specializimit qëndron në rastin e përhapjes së valëve paralel me shpejtësinë $\vec{v}_A$. Atëherë mund të shkruajmë

$$\vec{k} = \frac{\vec{v}_A}{v_A}\,k$$

dhe pasi ta zëvendësojmë në (21) fitojmë

$$(k^2\,v^2{}_A - \omega^2)\,\vec{v} + \left(\frac{c^2}{v^2{}_A} - 1\right)\,k^2\,(\vec{v}_A\,\vec{v})\,\vec{v}_A = 0 \tag{23}$$

Kjo formulë shpreh dy valë. Së pari kemi valën longitudinale për të cilën $\vec{v}\parallel\vec{k}$ dhe $\vec{v}_A$. Atëherë (23) specializohet në

$$(k^2 v^2_A - \omega^2)\, v + \left(\frac{c^2}{v^2_A} - 1\right) k^2 v^2_A\, v = 0$$

ose

$$-\omega^2 + c^2 k^2 = 0$$

prej nga shpejtësia e fazës është

$$u_1 = \frac{\omega}{k} = c$$

Pra, kjo valë longitudinale e ka shpejtësinë e fazës të barabartë me shpejtësinë e tingullit. Vala tjetër të cilën e shpreh (23) është transverzale. Për këte $\vec{v} \cdot \vec{v}_A = 0$, prandej kemi

$$k^2 v^2_A - \omega^2 = 0 \tag{24}$$

Shpejtësia e fazës së saj është

$$u_t = v_A$$

e barabartë me shpejtësinë e Alfvenit. Këto valë quhen valë të Alfvenit dhe janë të natyrës magnetohidrodinamike.

Fushën magnetike të këtyre valëve e njehsojmë nga (9). Duke shfrytëzuar funksionin valorë (12) kemi

$$-i\,\omega^2 \vec{B}_1 = rot\,(\vec{v} \times \vec{B}_o)$$

ndërsa nga (18) me simbolet gjegjës

$$B_1 = -\frac{1}{i\omega}\,[i\,(\vec{B}_o \vec{k})\,\vec{v} - i\,\vec{B}_o\,(\vec{v}\,\vec{k})] \tag{25}$$

Për valët normal ndaj $\vec{B}_o$ bie anëtari i parë dhe fitojmë

$$\vec{B}_1 = \frac{k}{\omega}\, v\, \vec{B}_o \tag{26}$$

Nëse kahja e përhapjes së valëve është paralel me $\vec{B}_o$, atëherë duhet dalluar valët longitudinale dhe transverzale. Për valë longitudinale $\vec{k} \parallel \vec{v}$ dhe meqë të gjithë vektorët në (25) janë paralel, do të jetë

$$\vec{B}_1 = 0$$

Mundësia tjetër paraqitet për valët transverzale që do të thotë se $\vec{v} \cdot \vec{k} = 0$. Pra,

$$\vec{B}_1 = -\frac{k}{\omega} B_o \vec{v} \quad (27)$$

Vala magnetosonike e cila përhapet normal në kahje të induksionit magnetik, shkakton valë longitudinale që do të thotë se shkakton dendësim dhe rrallim të vijave të induksionit magnetik, por gjatë kësaj nuk ndërron kahja e tyre, sikurse tregon fig. 158. Valët e Alfvenit janë transverzale. Ato nuk e ndërrojnë dendësinë e vijave të induksionit magnetik, por këto vija i përkulë në formë sinusoidale, sikurse tregon fig. 159.

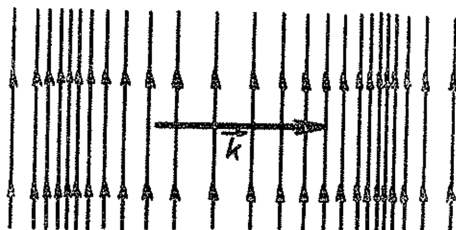


Fig. 158

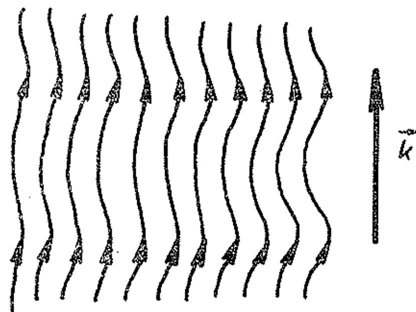


Fig. 159

Njehsimi i deritashëm ka të bëjë për mjedise plotësisht përcjellëse dhe pa viskozitet. Nëse këto kondita nuk plotësohen atëherë njehsimi do të jetë shumë më i ndërlikuar. Kështu në shprehjen (8) paraqitet edhe anëtari për viskozitet nga (XXI.1.4) dhe do të ketë formën

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \eta \triangle \vec{v} + c^2 \, grad \, \rho_1 + \vec{B}_o \times rot \, \vec{B}_1 = 0 \quad (28)$$

Pastaj në vend të shprehjes (9) duhet të merret ajo e cila rrjedh nga (XXI.2.1). Pra,

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} - \frac{1}{\sigma} \triangle \vec{B}_1 = rot \, (\vec{v} \times \vec{B}_o) \quad (29)$$

Për valë të rrafshta vlenë (12) dhe në mënyrë të ngjajshme shprehja për $\vec{B}_1$. Me ndihmën e tyre do të kemi

$$\triangle \vec{v} = - k^2 \vec{v} \qquad \triangle \vec{B}_1 = - k^2 \vec{B}_1$$

Në anën tjetër vlenë

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - i\omega \vec{v}$$

prandej

$$\triangle \vec{v} = -i \frac{k^2}{\omega} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad \text{dhe} \quad \triangle \vec{B}_1 = -i \frac{k^2}{\omega} \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$$

dhe (28), (29) mund të shkruhen kësisoji

$$\rho_o \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \left(1 + i\eta \frac{k^2}{\rho_o \omega} \right) + c^2 \, grad \, \rho_1 + \vec{B}_o \times rot \, \vec{B}_1 = 0 \qquad (30)$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \left(1 + i \frac{k^2}{\sigma \omega} \right) = rot \, (\vec{v} \times \vec{B}_o) \qquad (31)$$

Tani, nga këto ekuacione duhet të eliminojmë $\vec{B}_1$. E derivojmë (30) sipas kohës

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} \left(1 + i\eta \frac{k^2}{\rho_o \omega} \right) + \frac{c^2}{\rho_o} \, grad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\vec{B}_o}{\rho_o} \, rot \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = 0$$

I zëvendësojmë shprehjet (7), (31) dhe shfrytëzojmë (10). Fitojmë

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} \left(1 + i\eta \frac{k^2}{\rho_o \omega} \right) \left(1 + i \frac{k^2}{\sigma \omega} \right) - c^2 \left(1 + i \frac{k^2}{\sigma \omega} \right) grad \, div \, \vec{v} +$$

$$+ \vec{v}_A \times rot \, rot \, (\vec{v} \times \vec{v}_A) = 0 \qquad (32)$$

Shohim se ky ekuacion dallon nga (11) vetëm për nga koeficientët kompleks. Nëse i zëvendësojmë shprehjet (13), (17) dhe (20) do të fitojmë

$$- \omega^2 \left(1 + i\eta \frac{k^2}{\rho_o \omega} \right) \left(1 + i \frac{k^2}{\sigma \omega} \right) \vec{v} + \left[c^2 \left(1 + i \frac{k^2}{\sigma \omega} \right) + v^2_A \right] \vec{k} \, (\vec{v} \, \vec{k}) +$$

$$+ (\vec{v}_A \, \vec{k}) \, [\vec{v} \, (\vec{v}_A \, \vec{k}) - \vec{k} \, (\vec{v}_A \, \vec{v}) - \vec{v}_A \, (\vec{v} \, \vec{k})] = 0 \qquad (33)$$

Shohim se fitohen rezultate të ngjajshme sikurse më parë, por pranë ω^2 qëndron gjithmonë prodhimi i këtyre numrave kompleks, ndërsa pranë c^2 qëndron njëri prej tyre. Prandej për valë të Alfvenit në vend të (24) fitojmë

$$k^2 v^2_A = \omega^2 \left(1 + i\eta \frac{k^2}{\rho_o \omega} \right) \left(1 + i \frac{k^2}{\sigma \omega} \right)$$

Anëtarët imagjinarë janë të vegjël dhe prodhimin e tyre mund të mos e përfillim. Nga

$$k = \frac{\omega}{v_A}$$

fitojmë

$$k^2 v^2_A = \omega^2 \left[1 + i \frac{\omega}{v^2_A} \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{\eta}{\rho_o}\right)\right]$$

ose përafërsisht

$$k = \frac{\omega}{v_A} \left[1 + i \frac{\omega}{2v^2_A} \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{\eta}{\rho_o}\right)\right]$$

dhe përfundimisht fitojmë

$$k = \frac{\omega}{v_A} + i \frac{\omega^2}{2v^3_A} \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{\eta}{\rho_o}\right) \tag{34}$$

Numri valorë i valëve të Alfvenit është kompleks që do të thotë se intensiteti i tyre zvogëlohet nga thithja. Kjo thithje rritet shumë shpejt me frekuencën, por zvogëlohet me zmadhimin e fushës magnetike, sepse $\vec{v}_A$ varet prej $\vec{B}_o$.

XXII. HYRJE NË TEORINË SPECIALE TË RELATIVITETIT

1. PARIMI I RELATIVITETIT

Supozojmë se të njëjtën dukuri mekanike e shikojnë dy vrojtues të cilët relativisht lëvizin njëri ndaj tjetrit. Që këte dukuri të munden ta fiksojnë analitikisht, çdo njëri prej tyre e paraqet sistemin e vet të koordinateve të cilët ndaj vrojtuesit qëndrojnë në qetësi dhe çdo njëri prej tyre e ka orën e vet të lidhur me sistem të koordinateve. Meqë vrojtuesit lëvizin relativisht njëri ndaj tjetrit do të lëvizin edhe sistemet e tyre të koordinateve si dhe orët e tyre. Le të vendos sistemin e vet të koordinateve vrojtuesi i parë $(0, x, y, z)$ dhe e matë kohën t, ndërsa vrojtuesit i dytë sistemin e vet koordinat $(0', x', y', z')$ dhe e matë kohën t'.

Nëse vrojtuesit e përshkruajnë matematikisht dukurinë e shikuar, atëherë në te do të ekzistojnë madhësi të cilat ndryshojnë në njërin sistem nga madhësitë gjegjëse në sistemin tjetër, por do të ekzistojnë edhe aso madhësi të cilat në të dy sistemet e koordinateve paraqiten me të njëjtën shprehje. Madhësitë e këtilla të cilat me ndërrimin e sistemit të koordinateve mbesin të pa ndryshuashuara quhen invariante.

Sistemet e koordinateve mund të lëvizin njëri ndaj tjetrit në mënyra të ndryshme. Me së thjeshti është lëvizja e njërit sistem të koordinateve ndaj tjetrit në mënyrë të njëtrajtshme translatore. Në këte rast në të dy sistemet vlenë ligji i inercionit, prandej sistemet e këtilla quhen inerciale. Në të vërtetë ligji i inercionit pohon se: Trupat që nuk bashkëveprojnë me trupa tjerë vazhdojnë të qëndrojnë në prehje ose të lëvizin në mënyrë të njëtrajtshme. Në sistemin tjetër të koordinateve shpejtësisë së trupit në sistemin e parë duhet t'i shtojmë në mënyrë vektoriale shpejtësinë e vet sistemit, prandej shpejtësia e trupit në sistemin e dytë akoma do të jetë shpejtësi konstante dhe me këte kënaqet kondita e ligjit të inercionit.

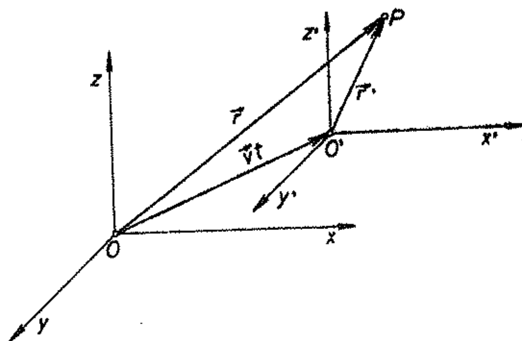


Fig. 160

Dy sisteme të koordinateve mund të lëvizin njëri ndaj tjetrit edhe në mënyrë të nxituar apo rrotulluese. Atëherë lëvizja sipas ligjit të inercionit në sistemin e

parë, nuk do të jetë lëvizje sipas të njëjtit ligj në sistemin e dytë. Sistemet e këtilla të koordinateve janë jo inerciale.

Të mendojmë dy sisteme inerciale me boshte paralele. Le të lëvizë sistemi ($0'$, x', y', z') ndaj sistemit (0, x, y, z) me shpejtësi konstante dhe në mënyrë translatore. Supozojmë se fillojmë të masim kohën nga momenti kur të dy sistemet përputhen. Në fig. 160 shihen këto sisteme në kohën t. Gjatë kësaj kohe sistemi $0'$ është zhvendosur për rrugën $\vec{v}t$. Pika materiale në pozitën P në këte kohë, në sistemin 0 e ka vektorin e pozitës $\vec{r}$, ndërsa në sistemin $0'$ vektorin e pozitës $\vec{r}'$. Nga figura shihet se këta vektorë të pozitës lidhen me shprehjen

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}\,t \tag{1}$$

Përveç kësaj supozojmë se orët e të dy vrojtuesve ecin njësojë pa marrë parasysh a pushojnë njëri ndaj tjetrit apo lëvizin. Pra, në të dy sistemet e koordinateve vlenë e njëjta kohë

$$t = t' \tag{2}$$

Kësisoji janë përcaktuar shprehjet për transformim të koordinateve dhe kohës. Shprehjen (1) mund ta zbërthejmë në komponente

$$\begin{aligned} x' &= x - v_x\, t \\ y' &= y - v_y\, t \\ z' &= z - v_z\, t \\ t' &= t \end{aligned}$$

Zakonisht kahja e boshtit x vendoset në kahje të lëvizjes reciproke të sistemeve. Atëherë vektori $\vec{v}$ e ka vetëm një komponent $v_x = v$ dhe për transformim fitojmë shprehjet

$$\begin{aligned} x' &= x - v\, t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{3}$$

Këto transformime njihen si transformime të Galileut.

Të mendojmë se pika materiale e shqyrtuar lëviz. Shpejtësinë e saj e fitojmë duke e derivuar vektorin e pozitën sipas kohës. Pra,

$$\frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{v}$$

dhe nëse shpejtësitë i shënojmë me simbolin $\vec{u}$ do të kemi

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v} \tag{4}$$

Kjo është shprehja e cila paraqet lidhmërinë e shpejtësive në të dy sistemet. Vrojtusi 0 do të matë shpejtësinë $\vec{u}$, ndërsa vrojtusi 0′ shpejtësinë $\vec{u}'$. Shprehja (4) tregon se si transformohet shpejtësia nga një sistem inercial në tjetrin.

E derivojmë edhe një herë sipas kohës

$$\frac{d^2 \vec{r}'}{dt^{2\prime}} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Pra, nxitimet janë të barabarta

$$\vec{a}' = \vec{a} \tag{5}$$

Prandej edhe vlera e forcës e cila e nxiton pikën materiale është e barabartë në të dy sistemet

$$\vec{f}' = \vec{f}$$

dhe ekuacioni themelorë i mekanikës

$$m \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^{2\prime}} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

mbetet i pandryshuar nga sistemi inercial të cilin e shfrytëzojmë.

Pra, në dy sisteme inerciale të koordinateve ekuacioni themelorë i mekanikës është i barabartë. Shpejtësitë dhe pozitat e pikës materiale nuk janë të barabarta, por e dijmë nga mekanika se edhe shpejtësitë edhe pozitat i përcaktojmë nga konditat fillestare. Kuptojmë se mekanikën mund ta ndërtojmë njësoj në të gjitha sistemet inerciale pasi që ekuacioni diferencial të cilin duhet zgjidhur nuk varet nga zgjedhja e sistemet inercial, ndërsa konditat fillestare edhe ashtu duhet të përcaktohen nga të dhënat eksperimentale të problemit të caktuar.

Nga kjo që u tha mund të përfundojmë se duke shikuar dukuritë mekanike vrojtuesit nuk mund të diktojnë cili prej tyre lëvizë e cili pushon meqë çdo dukuri mekanike mund të shpjegohet duke supozuar se 0 pushon, ndërsa 0′ lëvizë me shpejtësi $\vec{v}$, ose anasjelltas duke supozuar se 0′ pushon ndërsa 0 lëvizë me shpejtësi $-\vec{v}$.

Këte të dhënë, se ligjet themelore të mekanikës janë të barabartë në të gjitha sistemet inerciale e quajmë parim të reletivitetit në mekanikë dhe e njohti edhe Njutni.

Për sisteme jo inerciale kjo nuk vlenë, sepse në sisteme të këtilla paraqiten edhe forcat inerciale, prania e së cilave tregon se vrojtuesi gjendet në sistem të nxituar.

Në anën tjetër lehtë mund të bindemi se ekuacionet themelore të elektrodinamikës, ekuacionet e Maksvelit, apo ekucioni i valëve elektromagnetike i përfituar nga këto ekuacione nuk janë invariante ndaj transformimeve të Galileut (3) e as për sisteme inerciale. E dijmë se nga ekuacionet e Maksvelit fitohet ekuacioni i valëve elektromagnetike

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{ku: } \frac{1}{c^2} = \varepsilon_0\mu_0 \tag{6}$$

Këtu me ψ e kemi shënuar madhësinë e cilësdo komponente të vektorit $\vec{E}$ apo $\vec{H}$. Nga transformimet e Galileut (3) do të kemi

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t'}$$

ose

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^{2\prime}} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^{2\prime}} + \frac{2}{v}\frac{\partial^2}{\partial t'\partial x'} \tag{7}$$

dhe

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^{2\prime}}\ ;\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^{2\prime}}\ ;\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^{2\prime}} \tag{8}$$

Nga (7) dhe (8) ekuacioni (6) transfromohet në formën

$$\Delta'\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^{2\prime}} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^{2\prime}} + \frac{2}{v}\frac{\partial^2\psi}{\partial t'\partial x'} \tag{9}$$

Nëse dëshirojmë që edhe ekuacionet e Maksvelit si dhe ekuacionet që rrjedhin nga këto të jenë invariante për sisteme inerciale, atëherë për transformim të koordinateve dhe kohës duhet paraqitur një sistem tjetër të ekuacioneve transformuese të cilat i paraqiti H. A. Lorenci dhe sipas tij njihen si transformime të Lorencit.

Nga kjo që u cekë deri tani, kuptojmë se viera e parimit të relativitetit është e kufizuar vetëm në dukuri mekanike dhe për sisteme inerciale. Për teori të Maksvelit nuk vlenë parimi i relativitetit i formës së cekur. Këto ekuacione nuk shprehen njësoj në të gjitha sistemet inerciale.

Tani mund të bëjmë këte pyetje: A vlenë parimi i relativitetit sikurse na mëson mekanika e Njutnit apo nuk vlenë sikurse na mëson teoria e Maksvelit për përhapje të valëve elektromagnetike? Ose ndoshta ky parim vlenë në disa lëmi të fizikës por në tjerat jo.

Ajnshtajni në mënyrë intuitive nuk ka mundur të pajtohet se natyra, në dy lëmi të ndryshme na jep dy figura të ndryshme për përmbajtjen e vet. Sipas mendimit të tij ose duhet hudhur parimi i relativitetit edhe nga mekanika, ose duhet përvetsuar edhe në teori të përhapjes së valëve elektromagnetike.

Hudhja e parimit të relativitetit nga mekanika do të na këthente në mekanikën e Aristotelit sipas së cilës për ruajtjen e lëvizjes së njëtrajtshme drejtvizore është i nevojshëm veprimi i vazhduar i forcës. Përvetsimi i parimit të relativitetit në teori të përhapjes së valëve elektromagnetike do të thotë që ekuacionet e Maksvelit dhe ato që rrjedhin prej tyre duhet të shprehen njësoj në të gjitha sistemet inerciale dhe nga këtu shpejtësia e dritës nuk varet nga sistemi inercial ndaj të cilit ajo shikohet.

Zgjidhjen e dytë Ajnshtajni e mendoi si të nevojshme duke i shpreh dy aksioma për ndërtimin e teorisë së relativitetit:

1. Të gjitha ligjet e fizikës shprehen në të njëjtën mënyrë ndaj të gjitha sistemeve inerciale dhe

2. Shpejtësia e dritës — përhapjes së valëve elektromagnetike në boshllëk është madhësi absolute.

Pra, sipas tij, parimi i relativitetit është parim themelor i fizikës. Ai së pari, ligjet e mekanikës i preformuloi ashtu që të jenë invariant ndaj transformimeve të Lorencit dhe kështu parimi i relativitetit u bë parim themelor për tërë fizikën. Por mbeti i kufizuar vetëm për sisteme inerciale. Kjo pjesë e fizikës teorike njihet si teori speciale e relativitetit.

Duke i paraqitur aksiomat e cekura më lart, puna tjetër i mbeti deduksionit. Rrjedhimet ishin të pa paritura deri atëherë.

2. HIPOTEZA E ETERIT KOZMIK

Në fizikën e shekullit të kaluar është tentuar që të gjitha dukuritë të shprehen si dukuri mekanike. Për këte arsye fizikanët menduan se në mes të trupave të dukshëm ekziston supstanca materiale e pa dukshme — eteri. Kësisoji, deformimet dhe lëkundjet e këtij mjedisi i cili e mbushë tërë hapësirën janë menduar si shkaktarë të dukurive elektromagnetike. Natyrisht, kështu tentuan të shpjegojnë edhe Faradeu dhe Maksveli. Në përgjithësi mendohej se eteri pushon dhe çdo lëvizje mund të shqyrtohet në marrëdhënie me sistemin e koordinateve të lidhur për te. Lëvizja ndaj eterit do të ishte lëvizje absolute.

Vrojtuesi i cili lëviz me shpejtësi të ndryshme ndaj eterit mund të matë shpejtësi të ndryshme të dritës, për ndryshim të shpejtësisë së saj në boshllëk prej $3 \cdot 10^5$ km/s. Duke matur shpejtësinë e dritës në eter vrojtuesi njëkohësisht do të përcaktonte shpejtësinë e vet ndaj tij. Shpejtësia e dritës do të ishte e ndryshme nëse matet në kahje të lëvizjes së Tokës nëpër eter apo në kahje të kundërt. Çka tregonin eksperimentet?

Më 1859 Fizo e mate shpejtësinë e përhapjes së dritës nëpër ujë i cili rrjedh me shpejtësi v. Nëse shpejtësia e dritës në ujë të qetë është

$$u = \frac{c}{n}$$

është pritur se në ujë të lëvizshëm do të jetë

$$u = \frac{c}{n} \pm v$$

Parashenji plus paraqet rastin e përhapjes së dritës në kahje të rrjedhjes ndërsa minus në kahje të kundërt. Por matjet eksperimentale mund të shpreheshin me formulën

$$u \simeq \frac{c}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Përfundimi i këtyre matjeve të cilat u përsëriten disa herë është: uji e tërhjek eterin vetëm pjesërisht.

Në anën tjetër eksperimenti i Majkëlsoni i kryer më 1881 e kërkonte shpjegimin në supozimin se Toka ate e tërhjek tërësisht. Supozimet e tërheqjes së pjesërishme të eterit dhe tërheqjes së tërsishme i kundërshton e dhëna për aberacionin e dritës. Është diktuar se yjet çdo vit përshkruajnë elipsa të dukshme boshti i madh i së cilave është afro 41″. Kuptohet se këto janë rezultat i lëvizjes së Tokës rreth Diellit. Aberacioni i dritës kërkon supozimin e mos tërheqjes së eterit nga ana e Tokës sepse në të kundërtën nuk do të paraqitej fare.

Eksperimenti i Majkëlsonit për të cilin do të bëhet fjalë më hollësisht në mësimin e ardhshëm tregoi se mbledhja e shpejtësive me shpejtësinë e sistemit të shqyrtuar nuk vlenë për dritën. Ndërsa ne për përfitimin e sistemit (3) vepruam kësisoji. Kjo do të thotë se transformimet e Galileut nuk vlejnë në përgjithësi. Që të arrihet përputhshmëri me eksperimentet sipas Lorencit dhe Ajnshtajnit në mes të dy sistemeve inerciale duhet paraqitur transformime të tilla ashtu që shpejtësia e dritës në të dy sistemet të mbetet e pandryshuar.

Supozimi themelor i transformimeve të Galileut qëndron në njëkohshmërinë absolute. Koha në të dy sistemet është e njëjtë. Ajnshtajni këtu e përqëndrojë kritikën e vet. Nëse fillohet nga parimi empirik i vërtetuar për shpejtësinë konstante të dritës, atëherë sipas Ajnshtajnit duhet të hudhet kuptimi i njëkohëshmërisë absolute. Relativizimi i kohës mund të shpjegohet me një shembull shumë të thjeshtë.

Të mendojmë tre udhëtarë në tren i cili lëviz në mënyrë të njëtrajtshme drejtvizore dhe vrojtuesin i cili qëndron jashtë tij pranë binarëve të pa lëvizshëm. Udhëtari i dytë në tren gjendet në mes ndërsa i pari dhe i treti në skaje. Le të emitojë udhëtari i dytë një sinjal drite. Shikuar nga vrojtuesi i jashtëm pranë binarëve të trenit i afrohet sinjalit të dritës, ndërsa ai në fillim të tij i largohet. Prandej, për vrojtuesin e jashtëm sinjali më parë do të arrijë te udhëtari në fund të trenit se sa te ai në fillim të tij. Çka do të vërejnë udhëtarët brenda trenit? Duke u bazuar në parimin e relativitetit ata mund të mendojnë se nuk lëvizin fare dhe për ta njëkohësisht arrin sinjali në fund dhe në fillim të trenit. Nga ky shembull kuptojmë se ndodhia e njëkohshme për udhëtarët brenda trenit nuk është e njëkohshme për vrojtuesin e jashtëm pranë binarëve. Duke e relativizuar kohën Ajnshtajni i ndërpreu kuptimet e deri atëhershme.

3. EKSPERIMENTI I MAJKELSONIT

Në fund të shekullit të kaluar kërkohej ose zgjerimi i parimit të relativitetit në mekanikë edhe për procesi elektromagnetike ose zbulimi i sistemit absolut në të cilin shpejtësia e dritës është e njëjtë në të gjitha drejtimet. Meqë zgjerimi i parimit të relativitetit në mekanikë nuk mund të zbatohej edhe për procesi elektromagnetike shpjegimi kërkohej në zgjidhjen e dytë.

Qëllimi i eksperimentit ka qenë përcaktimi i shpejtësisë së Tokës ndaj sistemit absolut të koordinateve të lidhur me eterin. Shema e aparatit është paraqitur në fig. 161. Drita një ngjyrëshe del nga burimi *I* dhe bie me këndin 45° në pasqyrën gjysmë lëshuese *S* e cila e ndanë në dy pjesë. Njëra pjesë duke kaluar nëpër vet pasqyrën arrin deri te pasqyra tjetër 0_1 dhe kthehet prapa, ndërsa pjesa tjetër reflektohet nga *S*, arrin deri te pasqyra 0_2 dhe prap reflektohet nga kjo. Pasqyrat janë të larguara njësoj nga *S* për *l*. Në pasqyrën gjysmë lëshuese takohen të dy rrezet dhe paraqitet interferenca e tyre. Pasqyrat janë të vendosura ashtu që figura interferenciale përbëhet prej vijave të ndriçuara dhe të errëta paralele dhe njësoj të zhvendosura. Këta vija vërehen me teleskop ose fotografohen ne vendin ku gjendet teleskopi.

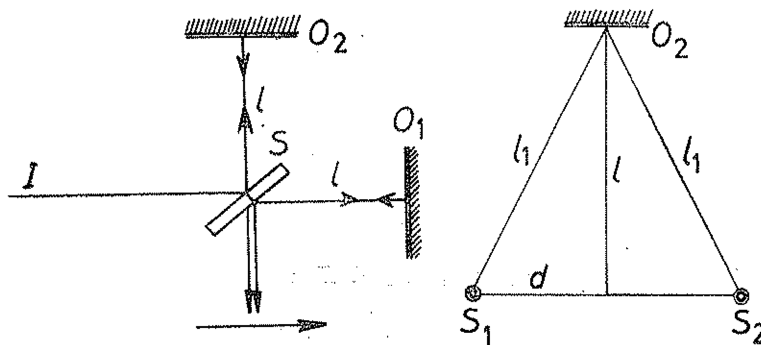


Fig. 161

Majkelsoni e vendosi krahun e interferometrit SO_1 në kahje të lëvizjes së Tokës, ndërsa krahun SO_2 në kahje normale të lëvizjes së saj. Do të shënojmë shpejtësinë e lëvizjes së Tokës me v, ndërsa të dritës me c. Kohën për të cilën drita duhet të kalojë rrugën SO_1S e njehsojmë siç vijon

$$t_1 = \frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v}$$

sepse në rrugën në kahje të lëvizjes së Tokës, sipas ligjeve të mekanikës shpejtësia është $c + v$, ndërsa në kahje të kundërt $c - v$. Këte kohë e shkruajmë në formën

$$t_1 = \frac{2lc}{c^2 - v^2} = \frac{2l}{c(1-\beta^2)} \tag{1}$$

Këtu me β e kemi shënuar shkrutimisht herësin $\frac{v}{c}$. Do të kemi

$$t_1 = \frac{2l}{c} (1 - \beta^2)^{-1}$$

E zhvillojmë në seri të binomit dhe marrim në konsiderim vetëm anëtarin e parë

$$t_1 = \frac{2l}{c} (1 + \beta^2) \tag{2}$$

Për përfitimin e kohës së përhapjes në rrugën SO_2S duhet marrë në konsiderim se interferometri lëviz normal ndaj krahut SO_2. Për deri sa drita përhapet nga S deri në O_2, S do të zhvendoset për d. Për kaq do të zhvendoset edhe gjatë kthimit të dritës prapa. Prandej rruga është $2l_1$, kurse nga figura shohim se $l_1 = \sqrt{l^2 + d^2}$. Do të kemi për kohë të përhapjes

$$t_2 = \frac{2l_1}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{l^2 + d^2} \tag{3}$$

Për përcaktimin e d shfytëzojmë proporcionin

$$\frac{d}{l_1} = \frac{v}{c} = \beta$$

$$d = \beta l_1 = \beta \sqrt{l^2 + d^2}$$

prej nga

$$d^2 = \frac{\beta^2 l^2}{1 - \beta^2}$$

E zëvendësojmë në (3) dhe fitojmë

$$t_2 = \frac{2l}{c\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{2l}{c} (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

dhe pasi ta zhvillojmë në seri do të kemi

$$t_2 = \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2\right) \tag{4}$$

Shihet se dritës i duhet kohë tjetër nga (2) që të kalojë këtë rrugë. Ndryshimi i kohëve është

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{l}{c} \beta^2$$

dhe shkakton ndryshim në fazë të lëkundjes së dritës

$$\Delta \Phi = \nu \cdot \Delta t = \frac{\nu l}{c} \beta^2 \qquad (5)$$

Nga ky ndryshim faze vijat e interferencës janë të zhvendosura nga pozita ku do të paraqiteshin sikur Toka të mos lëvizte.

Pasi që Toka është në lëvizje as që mund të dihet pozita e këtyre vijave. Prandej Majkëlsoni e rrotulloi interferometrin për 90° ashtu që krahu SO_2 do të ketë kahjen e lëvizjes së Tokës, ndërsa SO_1 në kahje normale të lëvizjes së saj. Atëherë vlenë

$$t'_1 = \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2\right)$$

dhe

$$t'_2 = \frac{2l}{c} (1 + \beta^2)$$

ndërsa

$$\Delta\Phi' = \nu \cdot \Delta(t'_1 - t'_2) = - \frac{\nu l}{c} \beta^2 \qquad (6)$$

Ky ndryshim faze do të shkaktojë zhvendosjen e vijave të interferencës në kahje të kundërt.
Me rrotullimin e interferometrit për 90° vijat e interferencës duhet të zhvendosen nga pozita e përcaktuar nga njëri ndryshim në pozitën tjetër të përcaktuar nga ndryshimi tjetër i fazës. Kjo zhvendosje është

$$p = \Delta\Phi - \Delta\Phi' = 2 \frac{\nu}{c} l\beta^2 = \frac{2l}{\lambda} \beta^2 \qquad (7)$$

Nga vrojtimet astronomike shpejtësia e Tokës është e njohur dhe sipas (7) mund të përcaktohet zhvendosja e vijave interferenciale. Kjo zhvendosje është mjaft e madhe që të vërehet. Mirëpo kur është kryer matja eksperimentale nuk është diktuar kurrfarë zhvendosje e vijave. Ky eksperiment është përsëritur disa herë me teknikë më të përsosur dhe gjithmonë nuk ka dhënë zhvendosje të vijave interferenciale.

Të përsërisim edhe një herë se ky eksperiment ka treguar se për dritën nuk vlenë mbledhja e shpejtësisë së saj me shpejtësinë e sistemit. Në këte rast shpejtësia e sistemit është shpejtësia e Tokës. Pra, shpejtësia e dritës në të gjitha sistemet inerciale është e barabartë. Kjo na tërhjek vërejtjen se drita nuk është dukuri mekanike dhe nuk lejohet të krijojmë për te të njëjtin kuptim sikurse për lëvizje të trupave mekanik. Mund të lëvizim sado shpejt pas dritës por ajo gjithmonë do të largohet prej nesh me të njëjtën shpejtësi. Kundër kësaj njeriu mund të ngritet, por natyra është e tillë.

4. TRANSFORMIMET E LORENCIT

a) Transformimet për pozitë speciale të boshteve të koordinateve

Do të përcaktojmë ato transformime të koordinateve për të cilat gjatë kalimit nga një sistem inercial në tjetrin shpejtësia e dritës mbetet e pandryshuar. Do të marrim specialisht rastin më të thjeshtë për boshte paralele të sistemeve të koordinateve, me boshtin x të përbashkët. Këto sisteme të koordinateve janë paraqitur në fig. 162.

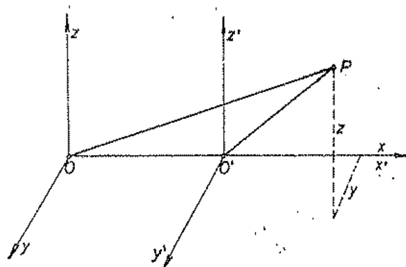


Fig. 162

Të mendojmë se kohën kur përputhen të dy origjinat e sistemeve është emituar një sinjal drite. Pas një kohe ky sinjal do të arrijë në pikën P. Shpejtësinë e dritës në sistemin O e përcaktojmë nga shprehja

$$c^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{t^2} \tag{1}$$

ndërsa në sistemin 0′

$$c^2 = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{t'^2} \tag{2}$$

Meqë boshtet e këtyre sistemeve janë paralele, duhet të marrim

$$\begin{aligned} y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{3}$$

Ka ngelë të përcaktojmë shprehjet e transformimit të cilat i lidhin koordinatet x. Përveç kësaj do të marrim se koha në të dy sistemet nuk është e barabartë dhe duhet të ekzistojë ndonjë shprehje e cila e transformon kohën e një sistemi në kohë të sistemit tjetër.

Çfarë lidhje duhet pritur në mes të këtyre madhësive? Kemi të bëjmë me sisteme inerciale. Sipas ligjit të inercionit pika materiale lëviz nëpër drejtëz, prandej gjatë kalimit nga një sistem në sistem tjetër inercial drejtëza duhet të transformohet në drejtëz. E dijmë se drejtëza mund të shndërrohet në drejtëz me ndihmën e transformimeve lineare. Prandej lidhjen në mes të madhësive gjegjëse do ta marrim në formë të funksioneve lineare:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma x + \delta t \\ t' &= \mu x + \nu t \end{aligned} \tag{4}$$

Ka ngelë të përcaktojmë koeficientët e transformimit.

Qendra e sistemit 0′ në këte sistem e ka koordinaten

$$x' = 0$$

ndërsa në sistemin 0

$$x = v\,t$$

Për $x' = 0$ nga ekuacioni i parë i (4) rrjedh

$$x = -\frac{\delta}{\gamma}\,t$$

dhe duke i krahasuar fitojmë

$$\delta = -\gamma v \qquad (5)$$

Qendra e sistemit 0 në këte sistem të koordinateve është

$$x = 0$$

ndërsa në sistemin 0′ kjo pikë e ka koordinatën

$$x' = -v\,t'$$

Për $x = 0$ nga (4) fitojmë

$$x' = \delta t \text{ dhe } t' = \nu t$$

ose

$$x' = \frac{\delta}{\nu}\,t'$$

Me krahasim fitojmë

$$\frac{\delta}{\nu} = -v$$

Duke e krahasuar me (5) kuptojmë se

$$\nu = \gamma \qquad (6)$$

Në shprehjet për transformim kanë ngelë të panjohura edhe dy konstante. Pasi t'i zëvendësojmë vlerat e fituara në sistemin (4) do të fitojmë

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - v\,t) \\ t' &= \mu x + \gamma t \end{aligned} \qquad (7)$$

Shprehjet e fundit dhe (3) i zëvendësojmë në (2)

$$c^2 = \frac{\gamma^2(x - v\,t)^2 + y^2 + z^2}{(\mu x + \gamma t)^2}$$

Nga (1) rrjedh

$$y^2 + z^2 = c^2t^2 - x^2$$

ndërsa për shpejtësi të dritës kemi

$$c^2(\mu^2x^2 + 2\mu\gamma x\, t + \gamma^2t^2) = \gamma^2(x^2 - 2xtv + v^2t^2) + c^2t^2 - x^2$$

ose

$$x^2(c^2\mu^2 - \gamma^2 + 1) + 2\gamma tx(\mu c^2 + \gamma v) + t^2(c^2\gamma^2 - v^2\gamma^2 - c^2) = 0$$

Pasi që kjo duhet të kënaqet për çfarëdo x dhe për çdo kohë t, atëherë koeficientët duhet të jenë të barabartë me zero

$$c^2\mu^2 - \gamma^2 + 1 = 0$$

$$\mu c^2 + \gamma v = 0$$

$$c^2\gamma^2 - v^2\gamma^2 - c^2 = 0$$

Nga ekuacioni i tretë rrjedh

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} \quad \text{ose} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{8}$$

Nga ekuacioni i dytë kemi

$$\mu = -\frac{v}{c^2}\,\gamma = -\frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{9}$$

Kur këte e zëvendësojmë në ekuacionin e parë shohim se identikisht do të kënaqet. Shprehjet (8) dhe (9) i zëvendësojmë në (7) dhe marrim në konsiderim (3). Do të fitojmë transformimet e Lorencit

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - v\,t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}\,x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{10}$$

Nga sistemi (10) lehtë mund të fitojmë transformimet inverze

$$x = \frac{x' + v\,t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y = y'$$
$$z = z' \qquad (11)$$
$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Shohim se transformimet inverze (11) ndryshojnë nga transformimet (10) vetëm pse madhësitë me apostrof dhe pa te i kanë ndërruar vendet dhe shpejtësia v e ka ndryshuar parashenjin. Kjo është plotësisht e arsyeshme sepse, nëse sistemi 0′ lëviz relativisht kah sistemi 0 me shpejtësi v, atëherë sistemi 0 ndaj sistemit 0′ lëviz me shpejtësi $-v$.

Supozojmë se shpejtësia translatore e sistemit është mjaft e vogël në krahasim me shpejtësinë e dritës c. Në këte rast anëtarët v/c mund t'i mos përfillim. Kur këte e zbatojmë për sistemin (10) fitojmë transformimet e Galileut (XXII.1.3). Pra, transformimet e Galileut janë një formë e veçantë e transformimeve të Lorencit dhe fitohen për shpejtësi të vogël v të lëvizjes së sistemit. Prandej mekanika jo relativiste e cila është invariante ndaj transformimeve të Galileut është rast i veçantë i mekanikës relativiste, e cila është invariante ndaj transformimeve të Lorencit. Meqë specializimi kryhet për shpejtësi të vogla të sistemit, përfundojmë se mekanika jo relativiste vlenë për shpejtësi të vogla në krahasim me shpejtësinë e dritës. Për shpejtësi të krahasueshme me këte, duhet të merren në shqyrtim shprehjet e mekanikës relativiste për të cilat do të diskutojmë më vonë.

b) Transformimet e Lorencit në formën vektoriale

Më parë i fituam transformimet e Lorencit për pozitë të veçantë të sistemeve të koordinateve. Tani do të lirohemi nga kjo pozitë speciale e boshteve të koordinateve duke i shprehur transformimet në formë vektoriale.

Pozita e pikës në sistemin 0 është e përcaktuar me vektorin e pozitës $\vec{r}$. Kahjen e lëvizjes së njërit sistem ndaj tjetrit e përcakton vektori i shpejtësisë $\vec{v}$. E zbërthejmë vektorin e pozitës $\vec{r}$ në dy komponente, prej të cilave njëra është paralele me vektorin e shpejtësisë $\vec{v}$, ndërsa tjetra normale ndaj tij. Pra,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_{\parallel} \\ r_{\perp} \end{pmatrix}$$

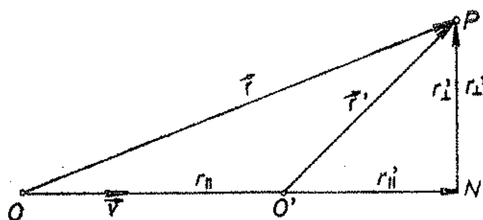


Fig. 163

Komponenta paralele $r_\parallel$ paraqet projeksionin e vektorit $\vec{r}$ në kahje të shpejtësisë së sistemit, prandej e gjejmë nga shprehja

$$r_\parallel = \vec{r}\,\vec{v}_o = \frac{\vec{r}\,\vec{v}}{v}$$

Këte komponent do ta mendojmë si vektor. Që të fitojmë këte vektor intensitetin e tij duhet ta shumëzojmë me vektorin unitarë të kahjes së $\vec{v}$. Pra,

$$\vec{r}_\parallel = \frac{(\vec{r}\,\vec{v})}{v}\,\vec{v}_o = \frac{(\vec{r}\,\vec{v})}{v^2}\,\vec{v} \qquad (12)$$

Në fig. 163 janë paraqitur vektorët e pozitës dhe komponentet e tyre në të dy sistemet inerciale. Shihet se komponentet normale të këtyre vektorëve janë të barabarta

$$\vec{r}'_\perp = \vec{r}_\perp \qquad (13)$$

Ka ngelur të përcaktojmë lidhmërinë në mes të komponenteve paralele. Këto i përgjigjen apsciseve të pozitës speciale të boshteve të koordinateve të përshkruar më parë. Prandej për to mund të zbatojmë shprehjen e parë të sistemit (10) e cila nga shkurtim shënimi

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

do të ketë formën

$$x' = \gamma(x - v\,t)$$

Këtu në vend të x duhet të shkruajmë $r_\parallel$ ndërsa në vend të x' vlerën $r'_\parallel$. Meqë këta vektorë e kanë kahjen e shpejtësisë njëkohësisht mund të shkruajmë edhe vektorët.

$$\vec{r}'_\parallel = \gamma(\vec{r}_\parallel - \vec{v}\,t) \qquad (14)$$

Kjo është shprehja për transformimin e komponenteve paralele të vektorëve të pozitës.

Nga (12) dhe (14) fitojmë

$$\vec{r}' = \vec{r}'_\perp + \vec{r}'_\parallel = \vec{r}_\perp + \gamma(\vec{r}_\parallel - \vec{v}\,t)$$

ose

$$\vec{r}' = \vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel} + (\gamma - 1)\,\vec{r}_{\parallel} - \gamma\,\vec{v}\,t$$

Dy anëtarët e parë të anës së djathtë janë të barabartë me vektorin e pozitës $\vec{r}$, ndërsa për $\vec{r}_{\parallel}$ e zëvendësojmë vlerën e sajë nga (12)

$$\vec{r}' = \vec{r} + (\gamma - 1)\,\frac{(\vec{r}\,\vec{v})}{v^2}\,\vec{v} - \gamma\,\vec{v}\,t \qquad (15)$$

Kështu e kemi fituar shprehjen për transformimin e vektorit të pozitës. Ka ngelë të përcaktojmë shprehjen për transformimin e kohës. Nga sistemi (10) kemi

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}\,x\right)$$

ku: v dhe x janë të të njëjtës kahje. Meqë x paraqet projeksionin e vektorit të pozitës $\vec{r}$ në kahje të vektorit $\vec{v}$ do të kemi

$$x = r\cos\sphericalangle(\vec{r}\,\vec{v})$$

prandej

$$v\,x = v\,r\cos\sphericalangle(\vec{v}\,\vec{r}) = \vec{v}\,\vec{r}$$

dhe mund të shkruajmë

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\vec{v}\,\vec{r}}{c^2}\right) \qquad (16)$$

Kësisoji edhe transformimi i kohës është shprehur në formë vektoriale.

5. SHKURTIMI I GJATËSIVE DHE ZGJERIMI I KOHËS

a) Shkurtimi i gjatësive

Në vazhdim do të shqyrtojmë disa rrjedhime të transformimeve të Lorencit. Së pari do të analizojmë çdo të ndodhë me gjatësinë në sistem i cili lëviz me shpejtësi të madhe.

Me nocionin gjatësi e cila qëndron në kahje të boshtit x kuptojmë ndryshimin e apsciseve të pikave të fundit dhe të fillimit. Natyrisht se apsciset duhet të shikohen në të njëjtën kohë.

Të mendojmë se gjatësia e shqyrtuar pushon në sistemin $0'$. Në te gjatësia është

$$l_o = x'_2 - x'_1 \qquad (1)$$

Këte e mendojmë si gjatësi vehtjake.

Vrojtuesi i cili po këte gjatësi e matë në sistemin 0 do të gjenë për te vlerën

$$l = x_2 - x_1 \qquad (2)$$

Ndaj këtij vrojtuesi gjatësia lëviz me shpejtësi v në kahje të vet. Për shprehjen e lidhmërisë së këtyre vlerave, shfrytëzojmë transformimet e Lorencit (XXII.4.10). Për zbatimin e tyre shënojmë shkurtimisht me

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (3)$$

Nga shprehjet (XXII.3.10) kemi

$$x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\alpha} \quad \text{dhe} \quad x'_1 = \frac{x_1 - v\,t}{\alpha}$$

Paraqitja e të njëjtës kohë t tregon se apscisët lexohen njëkohësisht. I zëvendësojmë në (1)

$$l_o = \frac{x_2 - x_1}{\alpha} = \frac{l}{\alpha}$$

ose

$$l = l_o\alpha = l_o \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (4)$$

Shprehja e fundit tregon se gjatësitë e matura nga dy sisteme nuk janë të barabarta, por $l < l_o$. Pra, gjatësia në lëvizje është më e shkurtër se gjatësia vetjake në sistem në të cilin kjo pushon. Dukuria njihet si shkurtim i gjatësisë.

Ky shkurtim varet prej shpejtësisë së lëvizjes. Për shpejtësi të vogla, për të cilat v^2/c^2 mund të mos përfillet, shkurtimi i gjatësisë fare nuk ekziston. Duket theksuar se të gjitha shpejtësitë teknike janë aq të vogla sa që shkurtimi i gjatësisë nuk mund të diktohet.

Gjatësia shkurtohet vetëm në kahje të lëvizjes. Sikur të lëvizte normal kësaj gjatësie do të vlenë

$$l_o = y_2' - y_1' = y_2' - y_1' = l$$

çka do të thotë se shkurtim nuk ka.

Nëse ndonjë trup lëviz me shpejtësi të madhe atij do t'i shkurtohet vetëm dimensioni në kahje të lëvizjes, ndërsa dimensionet tjera mbesin të pandryshuara. Kuptojmë nga kjo se edhe vëllimi i trupit duhet të zvogëlohet. Shprehja për zvogëlim të vëllimit është

$$V = V_o \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (5)$$

ku me V_o e kemi shënuar vëllimin vetjak të trupit i cili matet në sistem të koordinateve ndaj të cilit trupi pushon.

Shprehja për shkurtimin e gjatësisë tregon se shpejtësia e lëvizjes ndaj vrojtuesit është e kufizuar për shpejtësi

$$v < c$$

sepse për $v = c$ fitohet gjatësia zero dhe më e vogël as që mund të jetë. Kjo tregon se shpejtësia e trupit është e kufizuar me shpejtësi të dritës. Shpejtësia e dritës është shpejtësi kufitare dhe shpejtësitë tjera vetëm mund t'i afrohen. Duke mos tentuar që të hyjmë në arsyetime më të thella do të cekim se shpjtësia konsante e dritës paraqet ligj natyror dhe shpejtësi tjera më të mëdha nuk mund të ketë në gjithësi.

Tani mund të shpjegojmë edhe rezultatin e eksperimentit të Majkëlsonit nga aspekti i rrjedhimit të shkurtimit të gjatësisë në sistem lëvizës. Duhet të merret në konsiderim shkurtimi i krahut të interferometrit SO_1 i cili qëndron në kahje të lëvizjes së Tokës, për $l_o\alpha$. Atëherë koha për të cilën drita e kalon rrugën SO_1S është

$$t_1 = \frac{l_o\alpha}{c+v} + \frac{l_o\alpha}{c-v} = \frac{2cl_o\alpha}{c^2-v^2} = \frac{2l_o\alpha}{c\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{2l_o}{c\alpha} =$$

$$= \frac{2l_o}{c}\,(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2l_o}{c}\left(1+\frac{1}{2}\,\beta^2\right) = t_2$$

Kjo është koha për të cilën drita e kalon rrugën në krahun SO_2S. Pra sipas këtij përfundimi nuk ka ndryshim kohe, nuk ka ndryshim faze dhe nuk mund të ketë as zhvendosje të vijave të interferencës.

b) zgjerimi i kohës

Me kohën e zgjatjes së një ndodhie kuptojmë ndryshimin e kohëve të mbarimit dhe fillimit të saj. Që të dy kohët duhet të maten në të njëjtin vend.

Të mendojmë se ora pushon ndaj vrojtuesit 0'. Atëherë ky do të matë zgjatjen e ndodhisë

$$t' = t'_2 - t'_1$$

Nëse zgjatjen e të njëjtës ndodhi i matë vrojtuesi 0, atëherë ora gjendet në lëvizje ndaj këtij vrojtuesi sepse sistemi 0' lëvizë ndaj sistemit 0. Ky vrojtues do të matë kohën

$$\triangle t = t_2 - t_1$$

E shfrytëzojmë shprehjen e fundit të sistemit (XXII.4.11). Atëherë

$$t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2}x'}{\alpha} \quad \text{dhe} \quad t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2}x'}{\alpha}$$

ndërsa

$$\Delta t = \frac{t'_2 - t'_1}{\alpha} = \frac{\Delta t'}{\alpha}$$

ose

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{6}$$

Kjo formulë shpreh lidhmërinë kohore të zgjatjes së ndodhisë së vrojtuar nga dy sisteme inerciale. Koha vetjake $\Delta t'$ përcaktohet në sistemin ndaj të cilit ndodhia pushon. Në sistemin tjetër ky ineterval kohorë është më i gjatë. Dukuria njihet si zgjerim i kohës.

Zgjerimi apo rrjedhshmëria më e ngadalshme e kohës është më e madhe sa më e madhe të jetë shpejtësia e lëvizjes. Për shpejtësi të vogla v^2/c^2 mund të mos përfillet dhe zgjerim kohe nuk ka. Kjo është edhe arsyeja pse nuk mund të diktohet zgjerimi i kohës në lëvizjet me shpejtësi teknike të sotit.

Por, rrjedhshmëria e ngadalshme e kohës është vërtetuar eksperimentalisht për grimca të cilat lëvizin me shpejtësi të afërt me ate të dritës.

Nga goditja e rrezeve kosmike me atome të shtresave të larta të atmosferës formohen *my*-mezonet. Jeta mesatare e *my*-mezoneve në qetësi është

$$t' = 2{,}1983 \cdot 10^{-6}\,s$$

Rrezet kosmike i prodhojnë *my*-mezonet në lartësi prej 10 deri 20 *km* nga sipërfaqja e Tokës. Sikur të mos ishte zgjerimi i kohës së jetës së tyre, *my*-mezonet do të zbërtheheshin në elektrone dhe neutrine në rrugën afro 0,659 *km*, nëse supozojmë se lëvizin me shpejtësi të afërt me të dritës. Meqë një numër i madh i tyre regjistrohet edhe në sipërfaqe të Tokës, kjo është e mundur vetëm pse jeta mesatare e tyre zgjatet për 10 deri në 30 herë ndaj *my*-mezoneve në qetësi.

6. TRANSFORMIMI I SHPEJTËSIVE

Të mendojmë se të njëjtit trup ia masim shpejtësinë nga dy sisteme të ndryshme inerciale të cilët njëri ndaj tjetrit lëvizin në mënyrë të njëtrajtshme. E shënojmë me u shpejtësinë e trupit, ndërsa me v shpejtësinë e sistemit. Vektorin e shpejtësisë së trupit e zbërthejmë në komponente të veta

$$u_x = \frac{dx}{dt} \qquad u_y = \frac{dy}{dt} \qquad u_z = \frac{dz}{dt} \tag{1}$$

E njëjta shpejtësi në sistemin 0′ i ka komponentet

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} \qquad u_y' = \frac{dy'}{dt'} \qquad u_z' = \frac{dz'}{dt'} \tag{2}$$

Do të përcaktojmë shprehjet për transformimin e komponenteve të shpejtësisë nga njëri në tjetrin.

Duke i derivuar transformimet e Lorencit (XXII.4.10) fitojmë

$$dx' = \frac{dx - v\,dt}{\alpha}$$

$$dy' = dy$$

$$dz' = dz$$

$$dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2}\,dx}{\alpha}$$

Ndërsa për komponente të shpejtësisë së trupit kemi

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v\,dt}{dt - \frac{v}{c^2}\,dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}}$$

dhe sipas ekuacionit të parë të sistemit (1) kemi

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}\,u_x} \tag{3}$$

Në mënyrë të ngjajshme për komponenten tjetër fitojmë

$$u_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\frac{dt - \frac{v}{c^2}\,dx}{\alpha}} = \frac{\alpha\,\frac{dy}{dt}}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}}$$

ose

$$u_y' = \frac{u_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}\,u_x} \tag{4}$$

dhe për komponenten e tretë

$$u_z' = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \tag{5}$$

Shprehjet (3), (4) dhe (5) paraqesin fomulat për transformim të shpejtësisë nga sistem inercial në tjetrin. Për $v/c \to 0$ këto shndërrohen në formula të njohura të mekanikës jo relativiste,

$$u_x' = u_x - v \qquad u_y' = u_y \qquad u_z' = u_z$$

Transformimet inverze i fitojmë duke i zëvendësuar madhësitë me apostrof me madhësitë pa te dhe duke e ndërruar parashenjën e shpejtësisë së sistemit. Pra,

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v}{c^2} u_x'}$$

$$u_y = \frac{u_y' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} u_x'} \tag{6}$$

$$u_z = \frac{u_z' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} u_x'}$$

Më parë kemi cekur se nuk ekziston shpejtësi më e madhe se shpejtësia e dritës. Do të tregojmë se kjo është në pajtim me formulat e transformimit të shpejtësisë. Të mendojmë se në sistemin 0′ shpejtësia e trupit është e barabartë me shpejtësinë e dritës dhe e ka kahjen e boshtit x'. Këte shpejtësi në sistemin 0 e përcaktojmë nga formula e parë e (6). Pra,

$$u_x = \frac{c+v}{1 + \frac{vc}{c^2}} = \frac{c+v}{\frac{c+v}{c}} = c$$

Pra, edhe në sistemin 0 pa marrë parasysh shpejtësinë e sistemit 0′ fitojmë të njëjtën shpejtësi c. Ne mund të supozojmë se shpejtësia e sistemit është c dhe prap do të fitojmë

$$u_x = \frac{c + c}{1 + \frac{c^2}{c^2}} = c$$

Mund të përfundojmë se cilëndo shpejtësi që t'i shtojmë shpejtësisë së dritës prap fitojmë shpejtësi të dritës, por kurrë më të madhe.

Do të përcaktojmë edhe shprehjet për ndërrimin e kahjes dhe intensitetit të shpejtësisë gjatë kalimit nga një sistem inercial në tjetrin. Që njehsimi të jetë më i thjeshtë do të kufizohemi për rastin kur vektori i shpejtësisë qëndron në rrafshin xy.

Supozojmë se shpejtësia në sistemin $0'$ e ka intensitetin u' dhe me boshtin x' e mbyllë këndin ϑ'. Atëherë komponentet e kësaj shpejtësie janë

$$\vec{u'} = \begin{pmatrix} u' \cos\vartheta' \\ u' \sin\vartheta' \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Në sistemin tjetër inercial le të jetë intensiteti i kësaj shpejtësie u, ndërsa ϑ këndi të cilin e mbyllë me boshtin x. Komponentet e shpejtësisë në këte sistem janë

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u \cos\vartheta \\ u \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Lidhmërinë në mes të komponenteve e përcaktojnë formulat (6) në të cilat do t'i zëvendësojmë komponentet e shpejtësisë (7) dhe (8). Pra,

$$u \cos\vartheta = \frac{u' \cos\vartheta' + v}{1 + \dfrac{vu'}{c^2} \cos\vartheta'} \tag{9}$$

$$u \sin\vartheta = \frac{u' \sin\vartheta' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \dfrac{vu'}{c^2} \cos\vartheta'} \tag{10}$$

E pjesëtojmë (10) me (9) dhe do të kemi

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{u' \sqrt{1-\beta^2} \sin\vartheta'}{v + u' \cos\vartheta'} \tag{11}$$

Me ndihmën e kësaj shprehje mund të njehsojmë këndin e kahjes së shpejtësisë në sistemin 0 nga të dhënat e njohura të sistemit $0'$. Nëse (9) dhe (10) i ngrisim në katrorë dhe i mbledhim do të fitojmë

$$u^2 = \frac{u^{2\prime} + v^2 + 2u'v \cos\vartheta' - \dfrac{v^2}{c^2} u^{2\prime} \sin^2\vartheta'}{\left(1 + \dfrac{vu'}{c^2} \cos\vartheta'\right)^2}$$

ose

$$u^2 = \frac{(u' + v)^2 - \frac{1}{c^2}\,(\vec{v} \times \vec{u}\,')^2}{\left(1 + \frac{\vec{v}\,\vec{u}\,'}{c^2}\right)^2} \tag{12}$$

Kemi fituar katrorin e vlerës së shpejtësisë në sistemin inercial 0.

Më në fund do të shpjegojmë edhe eksperimenti e Fizos të cekur në (XXII.2). E vendosim sistemin e koordinateve 0′ në ujë i cili rrjedh me shpejtësi v. Ky sistem do të lëvizë ndaj sistemit 0 me shpejtësi të rrjedhjes së ujit. Në sistemin 0′ uji pushon, prandej shpejtësia e dritës në te është e barabartë me shpejtësinë e dritës në ujë të qetë. Pra,

$$u_x' = \frac{c}{n}$$

ku me n e kemi shënuar indeksin e thyerjes së ujit. Shpejtësinë e dritës në sistemin laboratorik 0 e gjejmë sipas (6)

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v}{c^2}\,u_x'} = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{nc}} = \left(\frac{c}{n} + v\right)\left(1 + \frac{v}{nc}\right)^{-1}$$

Faktorin e dytë e zhvillojmë në seri të binomit

$$u_x = \left(\frac{c}{n} + v\right)\left(1 - \frac{v}{nc}\right)$$

Gjatë shumëzimit nuk e përfillim anëtarin me v^2

$$u_x = \frac{c}{n} + v - \frac{v}{n^2}$$

ose

$$u_x = \frac{n}{c} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \tag{13}$$

Shohim se shpejtësisë së dritës në ujë të qetë c/n duhet shtuar një pjesë të shpejtësisë v sikurse tregon faktori i dytë. I këtillë ishte edhe rezultati i matjeve eksperimentale të Fizos.

7. EFEKTI I DOPLERIT DHE ABERACIONI I DRITËS

Nëse burimi i dritës afrohet apo largohet nga vrojtuesi, atëherë ky dikton se valët e ndryshojnë frekuencën. Dukuria njihet me emrin, efekt i Doplerit.

Të mendojmë vrojtuesin, i cili lëviz normal ndaj kahjes së përhapjes së valëve. Në këte rast vrojtuesi për shkak të lëvizjes së vet duhet ta mënjanojë teleskopin në kahje të lëvizjes së vet, përpara, që të mund të vërejë dritën. Kjo dukuri është diktuar në astronomi dhe njihet si aberacion i dritës.

Në të dy rastet kemi të bëjmë me lëvizjen relative të vrojtuesit ndaj valëve të dritës dhe duhet pritur që këto dukuri mund të shpjegohen nga aspekti i teorisë speciale të relativitetit.

Sistemin e kordinateve e vendosim ashtu që vala të lëvizë në rrafshin xy. Vektori elektrik i saj është

$$\vec{E} = \vec{A} \cos (\vec{k}\vec{r} - \omega t) = \vec{A} \cos \Phi$$

ku me Φ e kemi shënuar fazën e saj

$$\Phi = \vec{k}\vec{r} - \omega t$$

E shënojmë me θ këndin të cilin e mbyllë kahja e përhapjes së dritës me boshtin x. Atëherë komponentet e vektorit $\vec{k}$ janë

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{u} \cos\theta \\ \frac{\omega}{u} \sin\theta \end{pmatrix}$$

ndërsa shprehjen për fazë të lëkundjeve mund ta zbërthejmë në komponente

$$\Phi = \frac{\omega}{u} x \cos\theta + \frac{\omega}{u} y \sin\theta - \omega t \qquad (1)$$

Kjo është shprehja për fazë të valës në sistem ndaj të cilit burimi i valëve pushon. Të shqyrtojmë çdo të ndodhë në sistemin $0'$ në të cilin vrojtuesi lëviz ndaj burimit të dritës me shpejtësi v në kahje të boshtit x. Në këte sistem shprehja për fazë duhet të ketë formë të ngjajshme

$$\Phi' = \frac{\omega'}{u'} x' \cos\theta' + \frac{\omega'}{u'} y' \sin\theta' - \omega' t' \qquad (2)$$

por, këte shprehje mund ta fitojmë edhe nga (1) duke i shfrytëzuar transformimet e Lorencit

$$x = \frac{x' + vt'}{\alpha} \qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\alpha}$$

I zëvendësojmë në (1)

$$\Phi' = \frac{\omega}{u}\frac{x'}{\alpha}\cos\theta + \frac{\omega}{u}\frac{v\,t'}{\alpha}\cos\theta + \frac{\omega}{u}y'\sin\theta - \frac{\omega t'}{\alpha} - \frac{\omega v\,x'}{\alpha c^2}$$

ose

$$\Phi' = \frac{\omega}{u\alpha}\left(\cos\theta - \frac{u\,v}{c^2}\right)x' + \frac{\omega y'}{u}\sin\theta - \frac{\omega}{\alpha}\left(1 - \frac{v}{u}\cos\theta\right)t'$$

Duke i krahasuar koeficientët e kësaj shprehje me koeficientët gjegjës të shprehjes (2) fitojmë

$$\frac{\omega'}{u'}\cos\theta' = \frac{\omega}{u\alpha}\left(\cos\theta - \frac{u\,v}{c^2}\right)$$
$$\frac{\omega'}{u'}\sin\theta' = \frac{\omega}{u}\sin\theta \qquad (3)$$
$$\omega' = \frac{\omega}{\alpha}\left(1 - \frac{v}{u}\cos\theta\right)$$

Nga shprehja e tretë e këtij sistemi do të gjejmë

$$\omega' = \frac{\omega\left(1 - \frac{v}{u}\cos\theta\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (4)$$

lidhmërinë e frekuencave në dy sisteme inerciale. Shihet se këto nuk janë të njëjta. Frekuenca të cilën e përcakton vrojtuesi ndaj të cilit lëviz burimi, varet prej shpejtësisë së lëvizjes dhe kahjes së valëve.

Rasti më i thjeshtë paraqitet, për largim apo afrim kah burimi i dritës. Në këte rast duhet të merret

$$\theta = 0 \text{ ose } \theta = \pi$$

Nëse për shkak të shpejtësisë së vogël nuk e përfillim $\frac{v^2}{c^2}$, fitojmë

$$\omega' = \omega\left(1 \mp \frac{u}{u}\right) \qquad (5)$$

Kjo është formula e njohur e efektit të Doplerit në akustikë dhe optikë. Nga dy shprehjet e para të sistemit (3) duke i pjesëtuar mund të eliminojmë frekuencën

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{\alpha\sin\theta}{\cos\theta - \frac{u\,v}{c^2}} \qquad (6)$$

Kjo shprehje tregon ndërrimin e kahjes së përhapjes së valëve, kur shikohen nga sistemi i cili relativisht lëviz ndaj burimit të tyre.

Shprehjen e fituar mund ta specializojmë për rastin normal të përhapjes së valëve. Pra, $\theta = \frac{\pi}{2}$ dhe për $\alpha \approx 1$ fitojmë

$$\operatorname{tg} \theta' = -\frac{c^2}{u\,v}$$

Parashenja minus tregon se drita i afrohet vrojtuesit, pra shkon kah origjina e sistemit. Në boshllëk $u = -c$ dhe do të kemi

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{c}{v} \tag{7}$$

Kjo është shprehja e njohur për aberacion të dritës.

8. PARAQITJA GJEOMETRIKE NË TEORI TË RELATIVITETIT

a) Interpretimi gjeometrik i transformimeve të Lorencit

Transformimet e Lorencit shprehin lidhshmërinë në mes të ndryshoreve x dhe t në dy sisteme inerciale. Varshmërinë në mes të x dhe t grafikisht mund ta paraqesim në një sistem koordinatesh dy dimensionale. Në boshtin e apscisës e paraqesim madhësinë x. Që të paraqesim në bosht të ordinatës gjithashtu një gjatësi do të përkufizojmë madhësinë

$$u = c\,t \tag{1}$$

e cila ka dimension e gjatësisë.

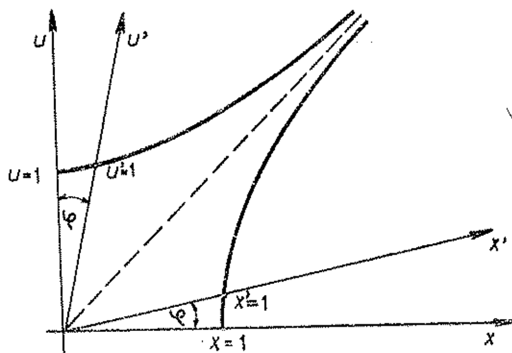


Fig. 164

Në sistemin e koordinateve (x, u) çdo pikë shprehet me apscisën e vet në të cilën gjendet trupi dhe ordinatën që tregon kohën kur trupi gjendej në ate pikë. Faktin se trupi pushon në këte sistem të koordinateve e shpreh paralelja me boshtin e ordinatës, sepse çdo pike të sajë i përgjigjet vlera konstante e x, ndërsa koha rrjedh duke u zhvendosur nëpër paralele. Nëse trupi lëviz njëtrajtësisht nëpër bosht x, atëherë këte lëvizje e tregon drejtëza e pjerrët ndaj x. Në të vërtetë nëse lëvizim nëpër këte drejtëz, atëherë apscisa ndërron proporcional me kohën.

Do të shqyrtojmë si ndërron ky sistem i koordinateve kur kalojmë nga një sistem inercial në tjetrin. Transformimet e Lorencit janë

$$x' = \gamma(x - \beta u) \quad \beta = \frac{v}{c} \tag{2}$$

$$u' = \gamma(u - \beta x)$$

Boshti i apscisës së sistemit $0'$ e ka ekuacionin

$$u' = 0$$

dhe nga (2) kemi

$$u = \beta x \tag{3}$$

Në sistemin 0 kjo paraqet drejtëzën e cila kalon nëpër origjinë dhe me boshtin x mbyllë këndin

$$\mathrm{tg}\varphi = \beta = \frac{v}{c} \tag{4}$$

Boshti i ordinatës në sistemin $0'$ e ka ekuacionin

$$x' = 0$$

E zëvendësojmë në ekuacionin e parë të (2) dhe fitojmë

$$u = \frac{1}{\beta} x \tag{5}$$

Kjo gjithashtu në sistemin 0 paraqet drejtëz e cila me boshtin e ordinatës e mbyllë të njëjtin kënd φ. Në fig. 164 janë vizatuar boshtet e reja x' dhe u'. Shohim se sistemi $0'$ nuk është sistem kënddrejtë, por i pjerrët. Këndi në mes të boshteve të tij është

$$\frac{\pi}{2} - 2\varphi \quad \text{ku:} \quad \varphi = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{v}{c}$$

Pra, për shpejtësi të mëdha v të sistemit $0'$ këndi në mes të boshteve të tij do të jetë më i vogël.
Duhet të përcaktojmë edhe pikat njësi në boshte të sistemit $0'$. Nga ekuacionet (2) rrjedh

$$x'^2 - u'^2 = x^2 - u^2 \tag{6}$$

Në sistemin $0'$ pika njësi e boshtit të apscisës i ka koordinatet $x' = 1$, $u' = 0$, dhe nga (6) do të kemi

$$x^2 - u^2 = 1 \tag{7}$$

Kjo na tregon se pikat njësi të të gjitha apsciseve të mundshme të sistemit $0'$ qëndrojnë në hiperbolën njëkrahëshe. Asimptotë e saj është drejtëza $u = x$ e cila e përgjysmon këndin në mes të boshteve të sistemit të koordinateve.

Nëse dëshirojmë të përcaktojmë pikën njësi në boshtin u', atëherë në (6) duhet të zëvendësojmë $x = 0$, $u' = 1$. Fitojmë ekuacionin

$$x^2 - u^2 = -1 \qquad (8)$$

Gjithashtu kemi fituar hiperbolë njëkrahëshe.

Duke u bazuar në këte interpretim gjeometrik, lehtë mund të shpjegohet shkurtimi i gjatësisë dhe zgjerimi i kohës.

Së pari të shqyrtojmë shkurtimin e gjatësisë. Të vizatojmë edhe një herë në (fig. 165 a) boshtet e koordinateve të të dy sistemeve dhe hiperbolën e pikave njësi. Njësia e gjatësisë e cila pushon në sistemin (x, u) është paraqitur me segmentin $\overline{OA}$. Fakti se kjo pushon, shprehet me paralelen ndaj boshtit u. Kjo paralele e pret boshtin x' të sistemit ndaj të cilit lëviz në pikën B. Në këte sistem gjatësia e saj është $\overline{OB}$. Njësinë e gjatësisë në sistemin (x', u') e përcakton prerja e hiperbolës

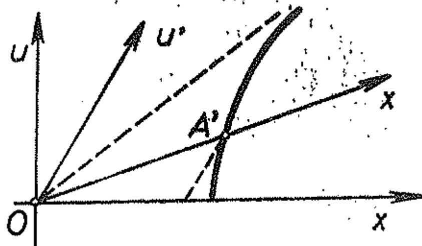


Fig. 165 a

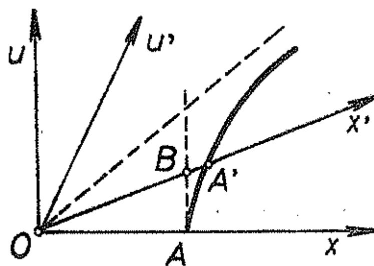


Fig. 165 b

me boshtin x', prandej njësia e gjatësisë në këte sistem është $\overline{OA'}$. Nga figura shihet qartë se

$$\overline{OB} < \overline{OA'}$$

Pra, në sistem i cili lëviz gjatësia është më e shkurtër se në sistem në të cilin pushon. Mund të merret edhe anasjelltas. Le të pushojë njësia e gjatësisë në sistemin 0'. Në fig. 165b këte e shpreh segmenti $\overline{OA'}$. Nëpër A' duhet tërhjekur paralelen me u'. Kjo e pret boshtin x në pikën B, prandej segmenti $\overline{OB}$ paraqet gjatësinë në sistemin 0. Nga figura shihet se ky është më i shkurtër se $\overline{OA}$. Pra, edhe në këte rast njësia e gjatësisë është më e shkurtër në sistem lëvizës.

Të shqyrtojmë tani zgjerimin e kohës. Marrëdhëniet janë paraqitur në fig. 166a.

Në te është paraqitur grafikisht njësia $\overline{OA}$ si njësi $u = 1$ ose kohe $t = 1/c$. Në sistemin (x', u') këte kohë e shpreh gjatësia $\overline{OA'}$. Të mendojmë orën e cila pushon në sistemin $0'$ dhe tregon njësitë kohore. Kur kjo orë shikohet nga sistemi 0, atëherë kjo do të tregojë njësitë kohore të paraqitura grafikisht me paralelen ndaj boshtit x nëpër pikën A'. Kjo e pret boshtin në pikën B. Figura tregon se intervali koho-

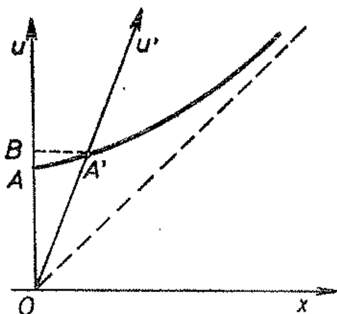


Fig. 166 a

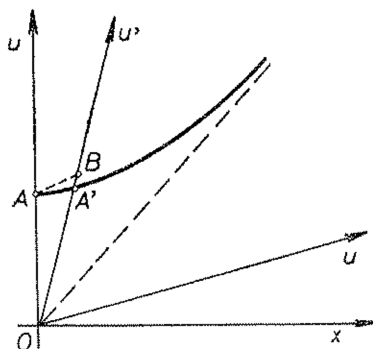


Fig. 166 b

rë $\overline{OB}$ është më i madh se intervali $\overline{OA}$ në sistemin 0. Rezultati i njëjtë fitohet edhe nëse supozojmë se ora pushon në sistemin 0. Atëherë nëpër pikën A duhet tërhjek paralelen me boshtin x'. Kjo e pret boshtin u' në pikën B (fig. 166 b). Gjatësia $\overline{OB}$ shpreh madhësinë u' e cila i përgjigjet njësisë së kohës në sistemin O. Nga figura shihet se $\overline{OB} > \overline{OA'}$. Edhe në këte rast intervali kohorë i cili i përgjigjet njësisë në sistemin lëvizës është më i madh se sa intervali gjegjës në sistemin në të cilin ora pushon.

Interpretimi gjeometrik i transformimeve të Lorencit na shpie në sistemin e koordinateve të pjerrëta. Këte vështirësi matematike mund ta evitojmë nëse në vend të koordinatës reale $u = c\,t$ e paraqesim koordinatën imagjinare

$$x_4 = i\,u = i\,c\,t \tag{9}$$

dhe nëse shënojmë

$$x_1 = x \tag{10}$$

atëherë për transformime të Lorencit (2) mund të shkruajmë

$$x'_1 = \gamma x_1 - \frac{1}{i}\,\beta\gamma x_4$$

$$\frac{x'_4}{i} = -\gamma\beta x_1 + \gamma\,\frac{x_4}{i}$$

ose

$$x'_1 = \gamma x_1 + i\beta\gamma\, x_4$$
$$x'_4 = - i\,\beta\gamma\, x_1 + \gamma x_4 \qquad (11)$$

Këto janë transformimet e Lorencit në sistem me bosht imagjinar kohorë.

I krahasojmë me shprehjet e njohura të rrotullimit të sistemit koordinativ kënddrejtë për këndin ϑ, të cilat e kanë formën

$$x'_1 = x_1 \cos\vartheta + x_4 \sin\vartheta$$
$$x'_4 = - x_1 \sin\vartheta + x_4 \cos\vartheta$$

Shohim se këto janë identike me (11) nëse vlenë

$$\cos\vartheta = \gamma \; \sin\vartheta = i\beta\gamma \qquad (12)$$

ose

$$\mathrm{tg}\,\vartheta = i\,\beta = i\,\frac{v}{c} \qquad (13)$$

Kuptojmë se transformimet e Lorencit paraqesin shprehjet transformuese të rrotullimit të sistemit të koordinateve kënddrejta (x_1, x_4) për këndin imagjinar

$$\vartheta = \mathrm{arc\,tg}\left(i\,\frac{v}{c}\right)$$

Gjatë kësaj nuk duhet harruar se edhe koordinata x_4 është imagjinare. Nëse sistemit (11) i shtojmë edhe dy koordinatet tjera

$$x'_2 = x_2$$

dhe

$$x'_3 = x_3$$

fitojmë hapësirën katërdimenzionale në të cilën çdo pikë përkufizohet si grumbull

$$x_\mu = (x, y, z, ict)$$

dhe njihet me emrin botë e Minkovskit. Në këte rast transformimet e Lorencit, duke shfrytëzuar shemën e koeficientëve gjegjës

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ - i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \qquad (14)$$

shkruhen në formë të thjeshtë

$$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} \alpha_{\mu\nu} x_\nu$$

dhe sipas marrëveshtjes së Ajnshtajnit mund të mos e shkruajmë $\sum$

$$x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu \qquad (15)$$

Transformimet inverze të Lorencit fitohen sikurse edhe në (XXII.4.11)

$$x_\mu = \alpha_{\nu\mu} x'_\nu$$

b) Intervali

Transformimet e Lorencit tregojnë se koordinatet hapësirore dhe koha janë të lidhura dhe formojnë një tërësi të pandarë, me çka teoria e relativitetit thelbësisht dallon nga mekanika klasike. Nga pa ndashmëria e kohës nga hapësira këtu si nocion themelor përkufizohet ngjarja e përcaktuar me grumbullin (x, y, z, t).

Për dy pika të kontinumit hapësirë — kohë $P_1(x_1, y_2, z_1, \theta_1)$ dhe $P_2(x_2, y_2, z_2, \theta_2)$ mund të vendosim në korrespodencë shprehjen

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (\theta_2 - \theta_1)^2 \qquad (16)$$

dhe e quajmë interval në mes të pikave P_1 dhe P_2. Duke shfrytëzuar vlerën $\theta = ict$, shprehjen (16) mund ta shkruajmë në formën

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2$$

Nëse kryejmë transformimin e koordinateve dhe kohës sipas shprehjeve të Lorencit, relacioni i fundit në sistem tjetër do të ketë formën

$$s'^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2 =$$

$$= \gamma^2[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)]^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 -$$

$$- \gamma^2 y^2 \left[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)\right]^2 =$$

$$= \gamma^2 \left[(x_2 - x_1)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - c^2(t_2 - t_1)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right] + (y_2 - y_1)^2 +$$

$$+ (z_2 - z_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2$$

prej nga përfundojmë se

$$s'^2 = s^2 \qquad (17)$$

Çka do të thotë se madhësia s^2 është invariante ndaj transformimeve të Lorencit. Quhet invariantë themelore. Në vend të kësaj shprehje shpesh merret vlera negative e saj

$$\tau^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = c^2\Delta t^2 - r^2 \quad (18)$$

e cila është gjithashtu invariante. Kjo paraqet një madhësi absolute e cila karakterizon „largësinë" në mes të dy ngjarjeve dhe mund të jetë reale apo imagjinare. Nëse $\tau^2 > 0$ për këte themi se është interval i tipit kohor dhe në këte rast gjithmonë mund të gjejmë aso sistemi në të cilin ngjarja ndodhë në mënyrë sukcesive në të njëjtin vend, pra për të cilin është

$$c^2 \triangle t^2 - r^2 = c^2 \triangle t'^2 \quad (19)$$

Nëse është $\tau^2 < 0$ intervali është i tipit hapësiror dhe gjithmonë mund të gjejmë sistem të atillë në të cilin ngjarjet ndodhin njëkohësisht, për të cilat është

$$r^2 - c^2 \triangle t^2 = r'^2 \quad (20)$$

Nëse me t_o e shënojmë kohën në sistemin 0', kjo kohë në sistem i cili lëviz së bashku me trupin quhet kohë vehtjake. Për dy ngjarje shumë të afërta në këte sistem të cilat ndodhin në të njëjtin vend kemi

$$d\tau^2 = c^2dt^2_o - r^2_o = c^2 \cdot dt^2_o \text{ sepse } r_o = 0$$

prej nga

$$dt_o = \frac{d\tau}{c} \quad (21)$$

Kuptojmë se koha vehtjake është invariante ndaj transformimeve të Lorencit dhe luan të njëjtin rol sikurse koha në mekanikë klasike. Koha vehtjake në sistemin 0' lidhet me kohën t në sistemin 0, ndaj të cilit trupi lëviz me shpejtësi v me shprehjen

$$dt = \frac{dt_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (21, a)$$

c) Interpretimi gjeometrik i ngjarjes

Do të kufizohemi për lëvizje njëdimensionale të grimcës përgjatë boshtit x. Për këte arsye në boshtin e apscisës e vendosim x ndërsa në ordinatë madhësinë $u = ct$, sikurse në shqyrtimin gjeometrik nën a), (fig. 167). Ky sistemi i koordinateve na paraqet botën e ngjarjeve, ashtu që çdo ngjarjeje i përgjigjet një pikë e quajtur pikë botërore, ndërsa gjatë lëvizjes së grimcës pika botërore përshkruan të ashtuquajturën vijë botërore. Në figurë, drejtëza a paraqet grimcën e cila pushon, drejtëza b lëvizjen e njëtrajtshme, ndërsa lakorja c lëvizjen e nxituar.

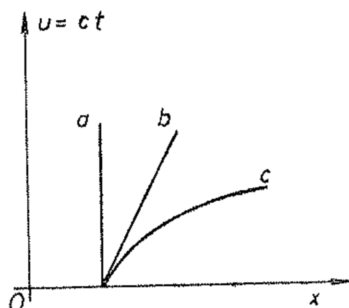


Fig. 167

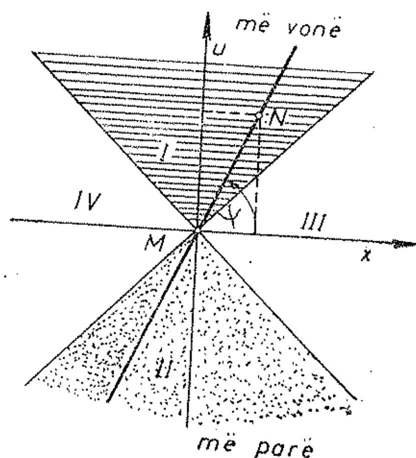


Fig. 168

Për shqyrtimin e kuptimit të intervalit do të shikojmë lëvizjen e njëtrajtshme të grimcës me shpejtësi v duke i veçuar dy ngjarje: fillimin e grimcës nga pika $x = 0$ në kohën $t = 0$ dhe arritjen e saj në pikën x në kohën t. Këto ngjarje do t'i shënojmë me M dhe N sikurse tregon figura 168. Nëse ekuacionin e lëvizjes $x = v\,t$ e shkruajmë sikurse në (5)

$$u = c\,t = \frac{c}{v}\,x$$

kuptojmë se lëvizja e grimcës paraqitet me drejtëzën MN me koeficient të drejtimit

$$\mathrm{tg}\psi = \frac{c}{v}$$

ku ψ është këndi të cilin e mbyllë kjo drejtëz me boshtin x.

Nëse $v < c$, që me të vërtetë paraqet lëvizje reale, $\psi > \frac{\pi}{4}$ dhe drejtëza kalon nëpër I dhe II. Katrori i intervalit në mes të këtyre dy ngjarjeve sipas (18) është

$$\tau^2 = c^2\,t^2 - x^2 \tag{22}$$

dhe në këte rast do të jetë pozitiv, meqë $ct > x$. Prandej ky interval është i tipit kohor dhe nuk ka sistem në të cilin këto dy ngjarje do të jenë të njëkohshme. Grumbull i të gjitha ngjarjeve në hapësirën I paraqet të ardhmën absolute, ndërsa grumbulli i ngjarjeve në II të kaluarën absolute ndaj ngjarjes M.

Në anën tjetër nga invarianca dhe vlera pozitive e (22) rrjedh se

$$t > \frac{x}{c} \text{ dhe } t' > \frac{x'}{c}$$

që do të thotë se sinjali i dritës nga ngjarja M në çfarëdo sistemi inercial do të arrijë deri te pika x përpara se në te të ndodhë ngjarja N. Me fjalë tjera kjo do të thotë se, nëse në ndonjë sistem inercial ngjarja N ndodh pas ngjarjes M, edhe në çfarëdo sistemi tjetër inercial, ngjarja N do të ndodhë pas ngjarjes M.

Nëse $v = c$ që i përgjigjet përhapjes së dritës $\operatorname{tg}\psi = 1$ dhe $\psi = \frac{\pi}{4}$. Në këte rast $x = ct$ dhe intervali në mes të këtyre ngjarjeve është i barabartë me zero, që paraqet vlerën kufitare të rastit të mëparshëm.

Nëse $v > c$ që nuk paraqet kurrfarë lëvizje reale, ψ do të jetë më e vogël se $\frac{\pi}{4}$ dhe drejtëza do të kalojë nëpër hapësirën III dhe IV. Në këte rast x do të jetë më i madh se ct, prandej $\tau < 0$. Intervali do të jetë i tipit hapësinor dhe gjithmonë mund të gjenden sisteme të tilla në të cilët ngjarja e dytë është e njëkohshme, e më hershme apo e mëvonshme ndaj së parës. Në këte kuptim, mund të themi se grumbulli i të gjitha ngjarjeve në hapësirën III dhe IV paraqet të tanishmen absolute ndaj ngjarjeve në M.

9. MEKANIKA RELATIVISTE

a) Masa në teori të relativitetit

Supozojmë se pika materiale pushon në sistemin $0'$. E shënojmë me m_o masën e saj dhe do ta quajmë masë të qetësisë. Gjithashtu supozojmë se për kohën e shkurtër dt' në te vepron forca f në kahje të x'. Kjo forcë e nxiton pikën materiale ashtu që pas kësaj kohe do të ketë shpejtësivnë dv'. Sipas ligjit themelore të mekanikës ndërrimi i sasisë së lëvizjes është i barabartë me impulsin e forcës. Pra,

$$m_o \, dv' = f \, dt' \tag{1}$$

E vrojtojmë të njëjtën dukuri nga sistemi 0. Ndaj tij pika materiale lëviz me shpejtësi v dhe e ka masën m. Prandej ky ligj shprehet

$$d(m\,v) = f \, dt \tag{2}$$

Në sistemin 0, pas veprimit të forcës pika materiale do të ketë shpejtësinë $v + dv$ të cilën e fitojmë nga shprehja për mbledhje të shpejtësive

$$v + dv = \frac{dv' + v}{1 + \frac{v\,dv'}{c^2}}$$

E eliminojmë emëruesin dhe nuk e përfillim anëtarin në të cilin paraqitet prodhimi $dv\, dv'$. Pra,

$$v + dv + \frac{v^2}{c^2}\, dv' = dv' + v$$

prej nga rrjedh

$$dv' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = dv$$

ose

$$dv' = \frac{dv}{\alpha^2} \quad \text{ku } \alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \beta^2}$$

Përveç kësaj, sipas shprehjes për zgjerimin e kohës kemi

$$dt = \frac{dt'}{\alpha}$$

ose

$$dt' = \alpha\, dt$$

I zëvendësojmë në shprehjen (1)

$$m_o \frac{dv}{\alpha} = f\, \alpha\, dt$$

ose

$$m_o \frac{dv}{\alpha^3} = f\, dt$$

Duke e krahasuar me (2) gjejmë se

$$d(m\, v) = m_o \frac{dv}{\alpha^3} \tag{3}$$

Është e nevojshme që edhe anën e djathtë ta shndërrojmë në formë të diferencialit të funksionit. E dijmë se

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

dhe

$$d\alpha = -\frac{v\, dv}{c^2 \alpha} \tag{4}$$

Shprehjen dv/α^3 mund ta shkruajmë edhe në formën

$$\frac{dv}{\alpha^3} = \frac{\dfrac{dv}{\alpha}\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2} + \dfrac{v^2}{c^2}\right)}{\alpha^2}$$

ose

$$\frac{dv}{\alpha^3} = \frac{\alpha\, dv + v\, \dfrac{v\, dv}{c^2\alpha}}{\alpha^2} = \frac{\alpha\, dv - v d\, \alpha}{\alpha^2}$$

Ana e djathtë paraqet diferencialin e thyesës, prandej shkruajmë

$$\frac{dv}{\alpha^3} = d\left(\frac{v}{\alpha}\right)$$

dhe nëse në shprehjen (3) e shkruajmë konstanten m_o nën shenjën e diferencialit, do të kemi

$$d(m\, v) = d\left(\frac{m_o v}{\alpha}\right)$$

prej nga rrjedh përfundimi se

$$m = \frac{m_o}{\alpha}$$

Konstantja e integrimit është zero nëse duam që shprehja relativiste të shndërrohet në ate klasike për $v \ll c$.

Pra

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{5}$$

Kjo është shprehja e njohur për varshmëri të masës nga shpejtësia. Kuptojmë se masa në lëvizje është më e madhe se sa masa në qetësi dhe varet prej shpejtësisë së lëvizjes. Kjo varshmëri i masës prej shpejtësisë diktohet vetëm për lëvizje të grimcës me shpejtësi e cila mund të krahasohet me shpejtësi të dritës. Nëse ajo lëviz me shpejtësi të vogël ashtu që mund të mos përfillet v^2/c^2, atëherë është $m = m_o$ dhe masa nuk varet prej shpejtësisë sikurse merret në mekanikën jo relativiste.

Fakti se masa rritet për shpejtësi të mëdha tregon se për nxitim të mëtejmë të grimcës nevojitet forcë më e madhe, për çka shpejtësia e saj vetëm mund t'i afrohet shpejtësisë së dritës.

Vlenë të ceket se R. Tolmani më 1912 e fitojë të njëjtën shprehje duke shqyrtuar goditjen e dy grimcave të cilat ndaj sistemit 0′ lëvizin me shpejtësi v' dhe $-v'$, paralel me boshtin x'. Njehsimin e tij nuk do ta paraqesim, meqë fitohet i njëjti rezultat.

Në eksperimentet bashkëkohore lëvizja e grimcave me shpejtësi të afërt me ate të dritës është dukuri e përditshme. Elektronet arrijnë një shpejtësi e cila është më e vogël se shpejtësia e dritës vetëm për 30 *km* në sek. Rezultatet e matjeve gjithmonë e kanë vërtetuar varshmërinë e masës nga shpejtësia ashtu si e propozon teoria e relativitetit.

b) Forca në teori të relativitetit

Sasia e lëvizjes përkufizohet edhe në teori të relativitetit si prodhim i masës dhe shpejtësisë, por për masë duhet të merret shprehja relativiste (5). Pra,

$$\vec{p} = m\vec{v} = m_o\gamma\,\vec{v} = \frac{m_o\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad (6)$$

Ligji i Njutnit për lëvizje

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f} \qquad (7)$$

vlenë edhe në teori të relativitetit. Nga (6) kemi

$$\frac{d}{dt}(m_o\,\gamma\,\vec{v}) = \vec{f}$$

dhe pasi ta derivojmë, do të kemi

$$m_o\gamma\,\frac{dv}{dt} + m_o\vec{v}\,\frac{d\gamma}{dt} = \vec{f}$$

E njehsojmë shprehjen

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\,(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-\beta^2)^{-\frac{3}{2}}\,\beta\,\dot{\beta} = \gamma^3\,\beta\,\dot{\beta}$$

dhe fitojmë

$$m_o\gamma\,\frac{d\vec{v}}{dt} + m_o\gamma^3\beta\,\dot{\beta}\,\vec{v} = \vec{f} \qquad (8)$$

Shprehja e fundit tregon se forca nuk e ka të njëjtën kahje sikurse nxitimi $d\vec{v}/dt$ që vlenë për mekanikë jo relativiste. Në mekanikë relativiste forca përbëhet prej dy anëtarëve, ashtu që njëri e ka kahjen e nxitimit ndërsa tjetri kahjen e shpejtësisë.

Do t'i diskutojmë dy raste të veçanta. Të mendojmë së pari rastin kur forca qëndron normal ndaj shpejtësisë. Në këte rast kjo nuk mund ta ndërrojë intensitetin e shpejtësisë, prandej $v = const.$ dhe $\beta = const.$ Meqë $\dot{\beta} = 0$ fitojmë

$$m_o\gamma \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}$$

Në këte rast nxitimi e ka kahjen e forcës dhe faktori i proporcionalitetit në mes tyre është masa $m = m_o\gamma$.

Në rastin tjetër supozojmë se forca e ka kahjen e shpejtësisë. Shihet nga (8) se edhe nxitimi e ka të njëjtën kahje sikurse $\vec{f}$ dhe $\vec{v}$ dhe kjo shprehje vlenë edhe për intensitete të tyre. Pasi që $\beta = v/c$ do të kemi

$$\dot{\beta} = \frac{1}{c}\frac{dv}{dt}$$

dhe anën e majtë të saj mund ta shkruajmë në formën

$$m_o\gamma \frac{dv}{dt} + m_o\gamma^3 \frac{v^2}{c^2}\frac{dv}{dt} = m_o\gamma^3 \frac{dv}{dt}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2}\right) =$$

$$= m_o\gamma^3 \frac{dv}{dt}\left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\right) = m_o\gamma^3 \frac{dv}{dt}$$

dhe për (8) vlenë shprehja

$$m_o\gamma^3 \frac{dv}{dt} = f \tag{9}$$

Në këte rast nxitimi është proporcional me forcën. Faktori i proporcionalitetit

$$m_1 = m_o\gamma^3 \tag{10}$$

quhet masë gjatësore (longitudinale), për ndryshim nga masa tërthore (transverzale) në rastin e mëparshëm. Në raste tjera nxitimi nuk është proporcional me forcën.

c) Energjia

Kur forca $\vec{f}$ vepron në rrugën $d\vec{l}$, ajo kryen punë

$$dA = \vec{f}\, d\vec{l}$$

Për këte element të punës është rritur energjia e përgjithshme e trupit. Pra,

$$dE = \vec{f}\, d\vec{l}$$

Për forcë vlenë shprehja

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

ku është

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{11}$$

ndërsa për zhvendosje $d\vec{l}$ mund të shkruajmë

$$d\vec{l} = \vec{v}\, dt$$

I zëvendësojmë dhe fitojmë

$$dE = \vec{v}\, d\vec{p} \tag{12}$$

Diferencialin $d\vec{p}$ e njehsojmë nga (11)

$$d\vec{p} = \vec{v}\, dm + m\, d\vec{v}$$

dhe nga (12) do të kemi

$$dE = v^2\, dm + m\vec{v}\, d\vec{v} \tag{13}$$

Për masë shfrytëzojmë shprehjen (5)

$$m = \frac{m_o}{\alpha}$$

prej nga

$$dm = -\frac{m_o}{\alpha^2}\, d\alpha$$

Sipas (4)

$$dm = \frac{m_o}{\alpha} \frac{\vec{v}\, d\vec{v}}{c^2\alpha^2} = m \frac{\vec{v}\, d\vec{v}}{c^2\alpha^2}$$

prej nga fitojmë vlerën

$$m\vec{v}\, d\vec{v} = c^2\alpha^2\, dm = c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dm$$

ose

$$m\vec{v}\, d\vec{v} = (c^2 - v^2)\, dm$$

E zëvendësojmë në (13) dhe fitojmë

$$dE = c^2\, dm$$

dhe me integrim, duke pasur parasysh se konstantja e integrimit është zero.

$$E = m\, c^2 \tag{14}$$

Kjo është formula e Ajnshtajnit për energji të trupit. Këte mund ta shkruajmë edhe në formën

$$E = \frac{m_o\, c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{15}$$

Nga kjo shihet se trupi ka energji të caktuar edhe kur gjendet në qetësi. Energjia e qetësisë është

$$E_o = m_o\, c^2$$

Pas zbulimit të lidhjes së masës me energji nga ana e Ajnshtajnit, u tregua se rezerva të mëdha të energjisë mëshifen në bërthama atomike. Ishte e mundur matja eksperimentale e ndryshimit që pëson masa e qetësisë së sistemit si rezultat i lirimit të energjisë së brendshme që shoqëron modifikimin e bërthamave atomike gjatë reaksionit bërthamor. Energjia kinetike si energji e lëvizjes është e barabartë me ndryshimin në mes të energjisë së trupit dhe energjisë së qetësisë

$$T = E - E_o = \frac{m_o\, c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_o\, c^2$$

ose

$$T = m_o\, c^2 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right]$$

Për shpejtësi relativisht të vogla mund ta zhvillojmë në seri të binomit dhe të mos përfillim shkallët e larta të v^2/c^2. Pra,

$$T = m_o c^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c} - 1\right)$$

$$T = \frac{1}{2} m_o v^2 \tag{16}$$

Kemi fituar shprehjen për energji kinetike të mekanikës jo relativiste, sikurse edhe duhet të jetë.

d) Lidhja e masës me energji dhe defekti i masës

Sipas shprehjes (14) energjia dhe masa janë të lidhura ngushtësisht njëra me tjetrën. Rritja e njërës madhësi shoqërohet me zmadhimin e madhësisë tjetër dhe anasjelltas. Pra, çdo ndryshim i masës së trupit dm shoqërohet me ndryshimin e energjisë dE në bazë të relacionit

$$dE = c^2\, dm \tag{17}$$

Në lidhje me shprehjen (14) paraqien dy pyetje nga të cilat njëra është tërësisht e gabuar ndërsa tjetra e ka përgjegjen negative. Pyetja e parë ka të bëjë me interpretimin idealist të transformimit të materies në energji. Gabimi, logjikisht është i ngjajshëm si ai në shtruarjen e pyetjes: A mund të transformohet sendi në një cilësi të tij? Të themi, me fjalë tjera, a mund të transformohet shufra në gjatësi të saj? Pyetja tjetër ka të bëjë me kalimin e masës së grimcës në energji të saj. Këtu përgjegjja është negative, sepse shprehja tregon proporcionalitet të madhësive dhe ndryshimi i njërës është i shoqëruar me ndryshimin, me të njëjtën shenjë të tjerës, sipas (17).

Shprehja (15) mund të zbatohet edhe për lëvizje të trupit të përbër nga një numër i madh i grimcave. Në këte rast me masë duhet kuptuar tërë masën e trupit ndërsa energjia $m_o c^2$ të cilën mund ta quajmë energji të brendshme është gjithmonë pozitive sepse masa është pozitive. Gjithashtu është pozitive edhe energjia totale e trupit

$$E = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

i cili si tërësi lëviz me shpejtësi v. Kësisoji arrijmë deri te përfundimi se në mekanikën relativiste energjia e sistemit të mbyllur është gjithmonë pozitive, përkundër kuptimit i cili ekziston në mekanikë klasike ku mund të jetë si pozitive ashtu edhe negative.

Energjia e brendshme e trupit $m_o c^2$, përmban në vetveti përveç energjisë së grimcave të veta në qetësi edhe energjinë kinetike të tyre dhe energjinë e veprimit reciprok në mes tyre. Me fjalë tjera $m_o c^2$ nuk

është e barabartë me $\sum_i m_{oi} c^2$ e as masa m_o e barabartë me $\sum_i m_{oi}$. Prandej në mekanikë relativiste nuk vlenë ligji mbi ruajtjen e masës, sepse masa e trupit të përbërë nuk është e barabartë me shumën e masave të grimcave të veçuara të tij. Por, vlenë ligji mbi ruajtjen e energjisë në të cilin paraqitet edhe energjia e qetësisë së grimcave. Ndryshimi $\Delta m_o = m_o - \sum_i m_{oi}$ i masës së trupit dhe grimcave përbërëse të tij quhet defekt i masës, ndërsa madhësia $\Delta m_o c^2$ quhet energji e lidhjes së trupit.

Ligji mbi ruajtjen e energjisë së trupit i cili pushon në sistem referimi dhe zbërthehet në mënyrë spontane në masat m_{o1} dhe m_{o2} të cilat lëvizin me shpejtësi v_1 dhe v_2 shprehet në formën

$$m_o c^2 = \frac{m_{o1} c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2_1}{c^2}}} + \frac{m_{o2} c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2_2}{c^2}}}$$

Në anën e djathtë të kësaj shprehje qëndron prodhimi i çdo njërës masë dhe c^2 të cilët shumëzohen me numrin

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2_1}{c^2}}}$$

i cili është më i madh se 1. Prandej për rast të përgjithshëm mund të përfundojmë se

$$m_o \neq m_{o1} + m_{o2} + \ldots + m_{on}$$

gjegjësisht

$$m_o > m_{o1} + m_{o2} + \ldots + m_{on}$$

prej nga për defekt të masës fitojmë

$$m_o - (m_{o1} + m_{o2} + \ldots + m_{on}) = m_o - \sum_i^n m_{oi} > 0$$

vlerën pozitive. Kjo do të thotë se trupi ka veti të zbërthimit spontan. Në të kundërtën për trup stabil

$$m_o < (m_{o1} + m_{o2} + \ldots + m_{on})$$

defekti i masës është negativ.

e) Funksionet e Lagranzhit dhe Hamiltonit në teori të relativitetit

Fillojmë nga ekuacionet e përgjithsuara të Lagranzhit për lëvizje

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

dhe në mënyrë të ngjajshme për dy koordinatet tjera. Ky ekuacion duhet të jetë identik me ekuacionin e lëvizjes së pikës materiale në fushë të veprimit të forcës konservative

$$\frac{dp_x}{dt} - \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

ku: U është potenciali i forcës.
Duke i krahasuar gjejmë se

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p_x = m_o \gamma \dot{x} \tag{18}$$

dhe

$$\frac{\partial L}{\partial x} = - \frac{\partial U}{\partial x}$$

Shprehja e fundit tregon se pjesa e funksionit të Lagranzhit e cila nuk varet nga komponentja e shpejtësisë është e barabartë me $-U$. Që të fitojmë edhe pjesën tjetër e cila varet nga shpejtësia, duhet të integrohet (18) sipas komponenteve të shpejtësisë.

$$\int m_o \gamma \dot{x} \, d\dot{x}$$

Meqë

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

dhe

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}$$

rrjedh se

$$d\beta^2 = \frac{2\dot{x}}{c^2} \, d\dot{x}$$

prandej

$$\dot{x} \, d\dot{x} = \frac{c^2}{2} \, d\beta^2 = - \frac{c^2}{2} \, d(1 - \beta^2)$$

ndërsa integrali do të ketë formën

$$- m_o \frac{c^2}{2} \int (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \, d(1 - \beta^2) = - m_o c^2 (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} = - m_o c^2 \sqrt{1 - \beta^2}$$

Përfundojmë se Lagranzhiani për grimcë relativiste e ka formën

$$L = - m_o c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U(x, y, z) \qquad (19)$$

Funksioni i Hamiltonit njehsohet nga shprehja

$$H = p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z - L$$

I zëvendësojmë shprehjet relativiste për komponente të sasisë së lëvizjes

$$p_x = m_o \gamma v_x \qquad p_y = m_o \gamma v_y \qquad p_z = m_o \gamma v_z$$

dhe fitojmë

$$H = m_o \gamma v^2 - L$$

Për Lagranzhian e shfrytëzojmë (19)

$$H = m_o \gamma v^2 + m_o c^2 \frac{1}{\gamma} + U(x, y, z) = m_o \gamma c^2 \left(\beta^2 + \frac{1}{\gamma^2}\right) + U(x, y, z) =$$

$$= m_o \gamma c^2 (\beta^2 + 1 - \beta^2) + U(x, y, z)$$

Pra,

$$H = m_o \gamma c^2 + U(x, y, z) \qquad (20)$$

Anëtari i parë paraqet energjinë totale prandej

$$H = E + U(x, y, z) \qquad (21)$$

Në funksion të Hamiltonit të gjitha madhësitë duhet të shprehen në varshmëri prej koordinateve dhe komponenteve të sasisë së lëvizjes. Prandej energjinë totale duhet ta shprehim me ndihmën e komponenteve të sasisë së lëvizjes në këte mënyrë. I ngrisim në katrorë, energjinë dhe sasinë e lëvizjes

$$E^2 = m^2_o \gamma^2 c^4$$

$$p^2 = m^2_o \gamma^2 v^2$$

prandej

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2_o \gamma^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m^2_o c^4$$

prej nga

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2_o c^4} \qquad (22)$$

Shprehjen e fituar e zëvendësojmë në (21) dhe fitojmë formën përfundimtare të funksionit të Hamiltonit

$$H = \sqrt{p^2c^2 + m^2_oc^4} + U(x, y, z) \tag{23}$$

për pikën materiale në fushë konservative në teori të relativitetit.

10. PROBLEMI I KEPLERIT NË TEORI TË RELATIVITETIT

Do të shqyrtojmë lëvizjen e grimcës relativiste rreth qendrës tërheqëse nën veprimin e forcës e cila është proporcionale e zhdrejtë me katrorin e largësisë nga kjo qendër.

Forca e këtillë paraqitet në lëvizjen e planeteve rreth Diellit dhe njihet me emrin problem i Keplerit. Përveç kësaj, ky problem paraqitet edhe për lëvizje të elektronit rreth bërthamës së atomit nëse lëvizja përcaktohet me metodat e mekanikës klasike. Prandej për forcë do të marrim shprehjen

$$\vec{f} = -\frac{k}{\vec{r}^2} r_o \tag{1}$$

Këtu me k e kemi shënuar konstanten e proporcionalitetit. Për lëvizje të planeteve kjo përmban masën e planetit dhe Diellit, apo në përgjithësi trupit qendror, ndërsa për lëvizje të grimcës elektrike, sasinë e elektricitetit të qendrës tërheqëse dhe grimcës e cila lëviz rreth saj. Që të përfshijmë njëkohësisht të dy problemet këte konstant nuk do ta konkretizojmë. Forca (1) është konservative dhe potenciali i saj është

$$U = -\frac{k}{r} \tag{2}$$

Për njehsim të mëtejmë është e preferuar që në vend të ndryshores r të paraqesim vlerën e saj reciproke në formën

$$\rho = \frac{1}{r} \tag{3}$$

ndërsa potenciali shkruhet kësisoji

$$U = -k\rho \tag{4}$$

Për energji kinetike shfrytëzojmë shprehjen relativiste. Ajo është e barabartë me ndryshimin e energjisë së trupit në lëvizje dhe energjisë së qetësisë. Pra,

$$T = m\,c^2 - m_oc^2$$

dhe pasi që $m = m_o\gamma$

do të jetë

$$T = m_o c^2(\gamma - 1)$$

Ligjin për ruajtjen e energjisë e shkruajmë në këte mënyrë

$$m_o c^2(\gamma - 1) - k\rho = E \tag{5}$$

prej nga

$$\gamma^2 = \left(1 + \frac{E + k\rho}{m_o c^2}\right)^2 \tag{6}$$

Që të zhvillojmë anën e majtë fillojmë nga përkufizimi i faktorit

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$$

Shpejtësinë e zbërthejmë në komponente polare të rrafshit

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

prandej

$$\beta^2 = \frac{1}{c^2}\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$

E paraqesim lidhmërinë në mes të $\dot{r}$ dhe $\dot{\varphi}$ në formën

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\,\dot{\varphi} \tag{7}$$

dhe fitojmë

$$\beta^2 = \frac{\dot{\varphi}^2}{c^2}\left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right] \tag{8}$$

Nga shprehja (3) kemi

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{d\rho}\,\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{1}{\rho^2}\,\frac{d\rho}{d\varphi} \tag{9}$$

ndërsa (8) do të jetë

$$\beta^2 = \frac{\dot{\varphi}^2}{c^2}\left[\frac{1}{\rho^4}\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\right] \tag{10}$$

Duhet të eliminojmë kohën nga faktori $\dot{\varphi}$. Lëvizjen të cilën po e shqyrtojmë është lëvizje qendrore. E dijmë se për lëvizje të këtilla momenti i sasisë së lëvizjes është konstante. E shënojmë me L dhe sipas përkufizimit është

$$L = m\, v_\varphi = m_o \gamma r \dot{\varphi} = \frac{m_o \gamma \dot{\varphi}}{\rho^2}$$

ndërsa për $\dot{\varphi}$ fitojmë

$$\dot{\varphi} = \frac{L \rho^2}{m_o \gamma} \tag{11}$$

E zëvendësojmë në (10)

$$\beta^2 = \frac{L^2}{m_o^2 \gamma^2 c^2} \left[\left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 + \rho^2 \right] \tag{12}$$

Faktori i fituar β gjendet në shprehjen

$$1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2}$$

ose

$$\gamma^2 = 1 + \beta^2 \gamma^2$$

E zëvndësojmë në këte shprehje vlerën (12)

$$\gamma^2 = 1 + \frac{L^2}{m_o^2\, c^2} \left[\left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 + \rho^2 \right]$$

Shprehjen e fundit e zëvendësojmë në (6). Do të kemi

$$1 + \frac{L^2}{m_o^2 c^2} \left[\left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 + \rho^2 \right] = \left(1 + \frac{E + k\rho}{m_o c^2} \right)^2$$

E derivojmë këte shprehje sipas φ,

$$\frac{L^2}{m_o^2 c^2} \left[2 \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + 2\rho \frac{d\rho}{d\varphi} \right] = 2 \left(1 + \frac{E + k\rho}{m_o c^2} \right) \frac{k}{m_o c^2} \frac{d\rho}{d\varphi}$$

ose

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = \frac{k m_o}{L^2} \left(1 + \frac{E}{m_o c^2} \right) + \frac{k^2}{L^2 c^2} \rho$$

E shkruajmë shprehjen e fundit në këte formë

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \left(1 - \frac{k^2}{L^2 c^2} \right) \rho = \frac{k m_o}{L^2} \left(1 + \frac{E}{m_o c^2} \right) \tag{13}$$

Shënojmë shkurtimisht me:

$$1 - \frac{k^2}{L^2 c^2} = \omega^2$$

$$\frac{km_o}{L^2}\left(1+\frac{E}{m_oc^2}\right)=A$$

dhe fitojmë ekuacionin diferencial

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}+\omega^2\rho=A \tag{14}$$

Ky ekuacion diferencial është jo homogjen. Ekuacionin gjegjës homogjen e zgjidhin funksionet trigonometrike, prandej duhet të gjejmë edhe një integral partikularë të tij. Meqë ana e djathtë është konstante edhe integrali partikularë do të jetë konstant dhe e ka vlerën A/ω^2 për çka mund të bindemi lehtë duke e zëvendësuar në (14). Integrali i përgjithshëm i ekuacionit (14) është

$$\rho=C_1\cos\omega\varphi+C_2\sin\omega\varphi+\frac{A}{\omega^2} \tag{15}$$

Njërën konstant të integramit e përcaktojmë ashtu që boshtin polarë e vendosim në ate pikë të rrugës e cila është më afër qendrës tërheqëse. Në këte pikë e cila quhet perihel, rruga është normale ndaj rreze vektorit, prandej vlenë

$$v_r=\dot{r}=0$$

dhe nga (7) e (9) rrjedh

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=0$$

Këte e njehsojmë nga (15)

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=-C_1\omega\sin\omega\varphi+C_2\omega\cos\omega\varphi$$

për $\varphi=0$ dhe $\dfrac{d\rho}{d\varphi}=0$ fitojmë vlerën

$$C_2=0$$

Konstanten tjetër e shënojmë me

$$C_1=\frac{A}{\omega^2}\varepsilon$$

dhe (15) do të këte formën

$$\rho=\frac{1}{r}=\frac{A}{\omega^2}(1+\varepsilon\cos\omega\varphi)$$

ose

$$r = \frac{\frac{\omega^2}{A}}{1 + \varepsilon \cos\omega\varphi} \qquad (16)$$

Që të përcaktojmë kuptimin gjeometrik të këtij rezultati do të shënojmë me

$$\Phi = \omega\varphi \qquad (17)$$

dhe për (16) do të kemi

$$r = \frac{\frac{\omega^2}{A}}{1 + \varepsilon \cos\Phi} \qquad (18)$$

Ky është ekuacioni i elipsës periheli i së cilës fitohet për

$$\Phi = 0, 2\pi, \ldots n \cdot 2\pi$$

Prandej periheli i parë gjendet për këndin

ose

$$\varphi_1 = 0$$

Periheli tjetër fitohet për

$$\Phi_2 = 2\pi$$

ose

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{\omega}$$

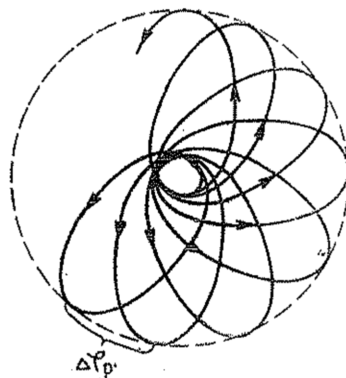


Fig. 169

Pasi që në shprehjen e përkufizimit për ω shihet se gjithmonë

$$\omega < 1$$

periheli tjetër gjendet për

$$\varphi_2 > 2\pi$$

Pra, periheli i elipsës zhvendoset gjatë kohës së një rrotullimi të plotë për këndin

$$\Delta\varphi_p = \frac{2\pi}{\omega} - 2\pi \left(\frac{1}{\omega} - 1\right)$$

Prandej, grimca relativiste lëviz rreth qendrës tërheqëse nëpër elipsë, boshti i madh i së cilës lëviz ngadalë ashtu që periheli i saj përshkruan vijë rrethore. Themi se pe-

riheli kryen precesion rreth qendrës tërheqëse. Rruga e shikuar nga sistemi i palëvizshëm e ka formën e rrozetës sikurse tregon fig. 169.

Precesioni i perihelit është diktuar te lëvizja e planeteve rreth Diellit. Vlerën më të madhe e ka planeti i Merkurit i cili gjendet më së afërmi nga Dielli. Kjo vlerë është 43″ gjatë një shekulli. Nëse zëvendësohen vlerat numerike për këte planet në njehsimin e mëparshëm fitohet vlera 7″. Përputhshmërinë në mes të vlerave të vrojtuara dhe teorike e paraqet teoria e përgjithshme e relativitetit.

Në teorinë e Bohrit për atom të hidrogjenit, Zomerfeldi e shfrytëzojë njehsimin e mëparshëm për shpjegimin e strukturës së imtë të vijave spektrale të hidrogjenit.

11. VEKTORËT KATËRDIMENSIONALE (4 — VEKTORËT)

a) Përkufizimet themelore

Në fizikë zakonisht shfrytëzohen vektorët në hapësirën tridimensionale. Këta vektorë mund të zbërthehen në tri komponente në kahje të tri boshteve të koordinateve.

Dituritë e njohura për vektorë shumë lehtë mund t'i zgjerojmë për hapësirën katërdimensionale. Të mendojmë se në hapsirën katërdimensionale i kemi vendosur katër drejtëza në mes veti normale për boshte të koordinateve. Vektorët unitarë të këtij sistemi i shënojmë me $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ $\vec{a}_3$ dhe $\vec{a}_4$ ose shkurtimisht në formën $\vec{a}_\mu; \mu = 1, 2, 3, 4$. Çfarëdo vektori $\vec{A}$ i ka katër komponentet e veta

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix}$$

dhe mund ta shkruajmë me ndihmën e vektorëve unitarë

$$\vec{A} = \vec{a}_1 A_1 + \vec{a}_2 A_2 + \vec{a}_3 A_3 + \vec{a}_4 A_4 \tag{1}$$

ose shkurtimisht

$$\vec{A} = \sum_{\mu=1}^{4} \vec{a}_\mu \; A_\mu \tag{1a}$$

Për ndryshim nga vektorët në hapësirën tridimensionale, vektorët në hapësirë katërdimensionale i quajmë kuadrivektorë ose 4 — vektorë.

Mbledhja dhe zbritja kryhet në mënyrë të ngjajshme sikurse për vektorë të zakonshëm por këtu paraqitet një anëtarë më tepër. Pra,

$$\vec{B} + \vec{A} = \sum_{\mu=1}^{4} a_\mu \, (B_\mu + A_\mu) \tag{2}$$

Gjithashtu mund të përkufizojmë prodhimin skalarë të dy 4— vektorëve

$$\vec{B}\,\vec{A} = \sum_{\mu=1}^{4} B_\mu \, A_\mu \tag{3}$$

Nëse prodhimi skalarë i dy 4— vektorëve është i barabartë me zero atëherë ata qëndrojnë në mes veti normal. Nëse 4— vektori shumëzohet me vetvehten, fitojmë katrorin e vlerës absolute të tij

$$|\vec{B}|^2 = \vec{B} \cdot \vec{B} = \sum_{\mu=1}^{4} B^2_\mu \tag{4}$$

Faktin se dy vektorë unitarë të sistemit koordinat janë normal e shprehim në mënyrën

$$\vec{a}_\mu \, \vec{a}_\nu = \begin{cases} 0 & \text{për } \mu \neq \nu \\ 1 & \text{për } \mu = \nu \end{cases} \tag{5}$$

Prodhimi vektorial në hapësirën katërdimenzionale nuk është vektor por tenzor, sepse i ka 6 komponente e jo 4. Shkruajmë

$$\vec{B} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Nga kjo matricë mund të ndërtojmë gjashtë kombinime me nga dy shtylla të cilat i marrim si determinante

$$\begin{aligned} (\vec{B} \times \vec{A})_{12} &= \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} = B_1A_2 - B_2A_1 \\ (\vec{B} \times \vec{A})_{13} &= \begin{vmatrix} B_1 & B_3 \\ A_1 & A_3 \end{vmatrix} = B_1A_3 - B_3A_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\vec{B} \times \vec{A})_{34} &= \begin{vmatrix} B_3 & B_4 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = B_3A_4 - B_4A_3 \end{aligned} \tag{7}$$

Lehtë është të kuptojmë se kemi gjashtë këso kombinime. Të përkujtojmë se në mënyrë të ngjashme përcaktohen edhe komponentet e prodhimit vektorial në hapësirën tridimensionale. Por në ate hapësirë kemi vetëm tri determinante, prandej kemi mundur t'i paraqesim si vektorë. Nëse përkujtojmë se prodhimi vektorial në hapësirën tridimensionale përkufizohet si sipërfaqe e orientuar, atëherë komponentet e tij paraqesin projeksionet e asaj sipërfaqe në rrafshe koordinatesh, prandej

prodhimi vektorial i ka tri komponente. Në hapësirën katërdimensionale ndonjë sipërfaqe të orientuar mund ta projektojmë në gjashtë rrafshe të koordinateve dhe nga këtu kuptohet se prodhimi vektorial në këte hapësirë i ka gjashtë komponente.

Në hapësirën e tridimensionale, kur vektori ishte funksion i vendit e kemi përkufizuar operatorin nabla me komponente të barabarta me derivatet parciale sipas koordinateve. Në mënyrë të ngjashme edhe në hapësirën katërdimensionale mund të përkufizojmë operatorin vektorial nabla

$$\square = \vec{a}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{a}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{a}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \vec{a}_4 \frac{\partial}{\partial x_4} = \sum_{\nu=1}^{4} \vec{a} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \tag{8}$$

Kur ky operator vepron në funksion skalarë prej 4 koordinatesh, fitojmë gradientin katërdimensional

$$grad\, \psi = \square\, \psi = \sum_{\nu=1}^{4} \vec{a}_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} \tag{9}$$

Nëse ky operator vepron në 4— vektorë fitojmë divergjencën katërdimensionale

$$div\, \vec{A} = \square\, \vec{A} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} \tag{10}$$

Mund të marrim se ky operator vepron në 4— vektorë në formë të prodhimit vektorial. Fitojmë rotorin katërdimensional

$$rot\, \vec{A} = \square \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Komponentet e këtij rotori janë

$$(rot\, \vec{A})_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \tag{12}$$

Rotori në hapësirën katërdimensionale është tenzor antisimetrik me gjashtë komponente,

Në mënyrë të ngjajshme sikurse në hapësirë tridimensionale, për Laplasian në hapësirë katërdimensionale e përkufizojmë operimin

$$\square^2 \psi = \sum_{\nu}^{4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2_\nu} \tag{13}$$

Sikurse shihet nga kjo që u cekë deri tani, për 4— vektorët vlenë përgjithësimi i madhësive në hapësirën tridimensionale. Vlenë të ceket se sipas konvencës së Ajnshtajnit nuk duhet shkruar shenjën e shumës, të të cilën do ta respektojmë edhe këtu.
Le të jenë $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dhe $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ koordinatet e të njëjtës pikë në dy sisteme të hapësirës n — dimensionale, në mes të cilave ekziston relacioni i formës

$$x'_\mu = x'_\mu \, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (14)$$

dhe supozojmë se mund të zgjidhen sipas koordinateve të vjetra

$$x_\mu = x_\mu \, (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \qquad (15)$$

Këto shprehje përkufizojnë transformimin e koordinateve nga njëri sistem në tjetrin.

Si më të rëndësishme të cekim transformimet lineare homogjene

$$x'_\mu = b_{\mu\nu} \, x_\mu \qquad (16)$$

ku sipas konvencës së Ajnshtajnit nuk e shkruajmë shenjën për mbledhje Σ. Këtu me $b_{\mu\nu}$ i kemi shënuar koeficientët gjegjës të transformimit. Në (16) shuma kryhet nga 1 deri në n sipas ν, ashtu që për çdo μ merret nga 1 deri në n. Për hapësirën 4 dimensionale shprehja (16) e ka formën

$$\begin{aligned}
x'_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 && (\mu = 1, \nu = 1, 2, 3, 4)\\
x'_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 && (\mu = 2, \nu = 1, 2, 3, 4)\\
x'_3 &= b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + b_{34}x_4 && (\mu = 3, \nu = 1, 2, 3, 4)\\
x'_4 &= b_{41}x_1 + b_{42}x_2 + b_{43}x_3 + b_{44}x_4 && (\mu = 4, \nu = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}$$

Të mendojmë grumbullin prej n madhësive A_μ . Nëse këto madhësi gjatë transformimit të koordinateve (14) transformohen sipas ligjit

$$A'_\mu = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} A_\nu \qquad (17)$$

ku sipas konvencës së Ajnshtajnit kuptojmë mbledhjen sipas indeksit ν, grumbulli A_μ quhet vektor kontravariant. Për transformime lineare homogjene (16) kemi

$$\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} = b_{\mu\nu}$$

dhe shprehja e mëparshme do të ketë formë të thjeshtë

$$A'_\mu = b_{\mu\nu} \, A_\nu$$

Transformimet inverze shprehen në formën

$$A_\mu = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu} A'_\nu$$

Nëse kemi n madhësi A_μ të cilat transformohen sipas ligjit

$$A'_\mu = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} A_\nu \tag{18}$$

ky grumbull quhet vektor kovariant. Transformimet inverze shprehen në formën

$$A_\mu = \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\mu} A'_\nu$$

Duhet cekur se grumbulli i n madhësive paraqet vektor, vetëm nëse ato madhësi transformohen sipas njërit prej ligjeve të cekura. Në të kundërtën grumbulli në përgjithësi nuk paraqet vektor.

Nga shprehja për diferencial total të koordinateve

$$dx'_\mu = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} dx_\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n)$$

mund të përfundojmë nga (17) se ky grumbull transformohet sipas ligjit të vektorëve kontravariant. Si shembull tjetër mund të cekim grumbullin e derivateve parciale të skalarit sipas koordinateve $\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$. Sipas rregullës së derivetit të përbërë kemi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}$$

dhe transformimet inverze e kanë formën

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'_\nu} \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\mu}$$

dhe nga (18) kuptojmë se kjo bashkësi është vektor kovariant.

b) Invarianca dhe kovarianca e ekuacioneve në fizikë

Një madhësi quhet invariante në fizikë nëse nuk e ndërron vlerën gjatë transformimit të koordinateve. Themi se ajo është invariante ndaj atij transformimi të koordinateve. Në mekanikën jo relativiste madhësi e këtillë është largësia në mes të dy pikave në dy sisteme për të cilët vlejnë transformimet e Galileut. Ndërsa, në fizikën relativiste intervali hapësirorë — kohorë është invariant ndaj transformimeve të Lorencit. Këte edhe e kemi vërtetuar matematikisht.

Ekuacionet të cilat gjatë transformimit të koordinateve mbesin të pa ndryshuara në ate mënyrë që anëtarët e tyre mbesin invariant quhen ekuacione invariante.

Ekuacionet të cilët edhe pse anëtarët e tyre nuk janë invariant por ata transformohen sipas ligjeve të njëjta quhen ekuacione kovariante.

12. PARAQITJA KATËRDIMENSIONALE E MEKANIKËS RELATIVISTE

a) Transformimi i 4— vektorit

Në teori të relativitetit, gjatë kalimit nga një sistem inercial në tjetrin, paraqitet shprehja

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \tag{1}$$

si invariant themelore, sepse shpejtësia e dritës në të gjitha sistemet është e barabartë.

Sikurse e kemi cekur edhe më parë, Minkovski propozoi idenë e paraqitjes së koordinateve katërdimensionale

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= y \\ x_3 &= z \\ x_4 &= ict \end{aligned} \tag{2}$$

dhe invarianta themelore do të ketë formën e thjeshtë

$$x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 + x^2_4 \tag{3}$$

Prandej duhet pritur që shprehjet në teori të relativitetit do të marrin formë të thjeshtë, nëse në vend të koordinateve dhe kohës, paraqiten koordinatet katërdimensionale (2). Kësisoji fitojmë një kontinum katërdimensional i cili njihet si botë e Minkovskit. Çdo pikë e këtij kontinumi paraqet një ngjarje, sepse në vetveti përmban edhe të dhënat për pozitën në hapësirë por edhe kohën e ndodhjes së ngjarjes.

Duke njohur matricën e Lorencit (XXII.8.14) çdo 4— vektor $\vec{A}$ mund ta transformojmë nga një sistem inercial në tjetrin. Le të ketë në sistemin O 4— vektori këto komponente

$$a = \vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix}$$

Komponentet e këtij 4 — vektori në sistemin O' i fitojmë nga shprehja

$$\begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \\ A'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix}$$

ashtu që pas shumëzimit do të kemi

$$
\begin{aligned}
A'_1 &= \gamma(A_1 + i\,\beta A_4) \\
A'_3 &= A_2 \\
A'_3 &= A_3 \\
A'_4 &= \gamma(A_4 - i\,\beta A_1)
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Këto janë shprehjet për tansformimin e komponenteve të 4 — vektorit. Transformimet inverze fitohen sikurse edhe në rastet e cekura më parë.

b) 4 — vektori i shpejtësisë

Vektori i pozitës së ndonjë pike në botën e Minkovskit përkufizohet në formën

$$x_\mu = (\vec{r}, ict) \qquad (5)$$

Në hapësirën tridimensionale, vektori i shpejtësisë fitohet duke i derivuar komponentet e vektorit të pozitës sipas kohës. Por, koha dt nuk është invariante ndaj transformimeve të Lorencit. Për këte arsye shfrytëzojmë kohën vehtjake të sistemit dt_o. Nga (XXII.8.21a) kemi

$$dt_o = \alpha dt = \frac{1}{\gamma}\, dt \qquad (6)$$

Prandej 4 — vektorin e shpejtësisë e përkufizojmë si derivat të 4 — vektorit të pozitës sipas kohës vehtiake. Këtu shpejtësia e sistemit $0'$ është e barabartë me shpejtësinë e grimcës

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{dt_o} \qquad (7)$$

I shqyrtojmë komponentet e këtij 4 — vektori. Do të kemi

$$u_1 = \frac{dx_1}{dt_o}$$

ose

$$u_1 = \gamma \frac{dx}{dt} = \gamma\,\dot{x} \text{ sepse } x_1 = x$$

dhe në mënyrë të ngjajshme fitojmë edhe dy komponentet

$$u_2 = \gamma\,\dot{y} \qquad u_3 = \gamma\,\dot{z}$$

Tri komponentet e para të 4 — vektorit të shpejtësisë i quajmë komponente hapësirore dhe shohim se janë proporcionale me komponentet e shpejtësisë së zakonshme. E njehsojmë edhe komponenten e katërt.

$$u_4 = \frac{dx_4}{dt_o} = i\,c\,\frac{dt}{dt} = i\,\gamma c$$

Shihet se kjo komponente është imagjinare dhe proporcionale me shpejtësinë e dritës.
Për intensitet të 4 — vektorit të shpejtësisë fitojmë

$$u^2_1 + u^2_2 + u^2_3 + u^2_4 = \gamma^2[\underbrace{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}_{v} - c^2] = - c^2$$

$$u^2_\mu = - c^2 \tag{8}$$

që paraqet invariantë në botën e Minkovskit.

c) 4 — vektori i impulsit

Me ndihmën e 4 — vektorit të shpejtësisë mund të përkufizojmë 4 — vektorin e impulsit

$$p_\mu = m_o\, u_\mu$$

Komponentet hapësirore të tij janë

$$p_1 = m_o u_1 = m_o \gamma \dot{x} = m\,\dot{x} \tag{9a}$$

$$p_2 = m\,\dot{y}$$

$$p_3 = m\,\dot{z}$$

identike me komponentet e impulsit në hapësirën tridimensionale. Komponentja e katër është

$$p_4 = m_o\, u_4 = i\,\gamma c m_o = i\,\frac{m\,c^2}{c}$$

dhe meqë $E = mc^2$ fitojmë

$$p_4 = \frac{i}{c}\,E \tag{9b}$$

Shihit se komponentja e katër e 4 — vektorit të impulsit është proporcionale me energjinë totale të grimcës. Këte lidhmëri do ta shqyrtojmë më gjërësisht nën e)

d) 4 — vektori i nxitimit

Sipas shprehjes së përkufizimit

$$w_\mu = \frac{du_\mu}{dt_o}$$

për komponente të 4 — vektorit të nxitimit kemi

$$w_1 = \frac{du_1}{dt_o} = \frac{du_1}{dt}\,\frac{dt}{dt_o} = \gamma\,\frac{d(\gamma\,\dot{x})}{dt} = \gamma^2\left[\ddot{x} + \gamma^2\,\frac{\dot{x}\,(v\,\dot{v})}{c^2}\right] \qquad (10)$$

dhe në mënyrë të ngjajshme

$$w^2 = \gamma^2\left[\ddot{y} + \gamma^2\,\frac{\dot{y}\,(v\,\dot{v})}{c^2}\right] \qquad (11)$$

$$w_3 = \gamma^2\left[\ddot{z} + \gamma^2\,\frac{\dot{z}\,(v\,\dot{v})}{c^2}\right] \qquad (12)$$

$$w_4 = \frac{du_4}{dt_o} = \frac{d}{dt_o}\,(i\,\gamma\,c) = \frac{du_4}{dt}\,\frac{dt}{dt_o} = \gamma\,\frac{d}{dt}\,(i\,\gamma\,c)$$

$$w_4 = \frac{i\,v\,\dot{v}}{\gamma^2}\,c \qquad (13)$$

Katrori i nxitimit është

$$w^2_1 + w^2_2 + w^2_3 + w^2_4 > 0 \qquad (14)$$

Tani mund të fitojmë një përfundim shumë të rëndësishëm për pozitën reciproke të 4 — vektorit të shpejtësisë dhe 4 — vektorit të nxitimit. E derivojmë shprehjen (8) sipas t_o. Fitojmë

$$\frac{du^2_\mu}{dt_o} = 2u_\mu\,\frac{du_\mu}{dt_o} = 0$$

dhe meqë sipas përkufizimit të 4 — vektorit të nxitimit

$$w_\mu = \frac{du_\mu}{dt_o}$$

fitojmë

$$u_\mu\;w_\mu = 0 \qquad (15)$$

ose

$$u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 + u_4w_4 = 0$$

Në mënyrë të ngjajshme sikurse në hapësirën tridimensionale edhe këtu mund të përfundojmë se 4 — vektorët e shpejtësisë dhe nxitimit gjithmonë qëndrojnë normal njëri ndaj tjetrit. Duhet theksuar se ky lloj ortogonaliteti nuk mund të konkretizohet gjeometrikisht në formë të dy segmenteve ortogonale, sepse asnjëri prej tyre nuk mund të paraqitet gjeometrikisht me një segment të orientuar.

e) 4 — vektori i energjisë dhe impulsit

Do të përkufizojmë forcën 4 — dimensionale e njohur si forcë e Minkovskit, në formën (shpejtësia e sistemit 0′ është e barabartë me shpejtësinë e grimcës.

$$F_\mu = \frac{dp_\mu}{dt_o} = \frac{d}{dt_o}(m_o u_\mu) \tag{16}$$

Koha t_o nuk varet nga sistemi i referimit. Komponentet e forcës së Minkovskit janë:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{dp_1}{dt_o} = \frac{dp_1}{dt}\frac{dt}{dt_o} = \gamma\frac{d}{dt}(m_o\gamma\dot{x}) \\ F_2 &= \frac{dp_2}{dt_o} = \frac{dp_2}{dt}\frac{dt}{dt_o} = \gamma\frac{d}{dt}(m_o\gamma\dot{y}) \\ F_3 &= \frac{dp_3}{dt_o} = \frac{dp_3}{dt}\frac{dt}{dt_o} = \gamma\frac{d}{dt}(m_o\gamma\dot{z}) \\ F_4 &= \frac{dp_4}{dt_o} = \frac{dp_4}{dt}\frac{dt}{dt_o} = \gamma\frac{d}{dt}(i\,c\,m_o\gamma) \end{aligned} \tag{17}$$

Shihet qartë se komponentet hapësirore të forcës së Minkovskit nuk përputhen me komponentet e forcës së zakonshme në hapësirën tridimensionale. Nga (XXII.9.7) për forcë të zakonshme relativiste kemi

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

ku t është koha në sistem të referimit ku studiohet lëvizja. Nëse këte forcë e projektojmë në boshte të koordinateve kënddrejta do të gjejmë komponentet e saj

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{d}{dt}(m_o\gamma\dot{x}) = \frac{dp_x}{dt} \\ F_y &= \frac{d}{dt}(m_o\gamma\dot{y}) = \frac{dp_y}{dt} \\ F_z &= \frac{d}{dt}(m_o\gamma\dot{z}) = \frac{dp_z}{dt} \end{aligned} \tag{18}$$

Nëse i krahasojmë komponentet e forcës së Minkovskit nga sistemi (17) me ekuacionet (18) mund të diktojmë lidhmërinë në mes tyre.

$$F_1\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = F_x \tag{19}$$

etj.

Relacionet (16) janë invariante në lidhje me transformimet e Lorencit, prandej në të njëjtën formë paraqiten edhe në sistemin $0'$. Pra,

$$F'_{\mu} = \frac{dp_{\mu}}{dt_o} = \frac{d}{dt_o}(m_o u'_{\mu})$$

Për $v \ll c$ këto shndërrohen në ekuacionet e njohura të mekanikës jo relativiste, prandej quhen ekuacione të dinamikës relativiste.

Nëse (16) e shumëzojmë me 4 — vektorin e shpejtësisë u_{μ} dhe shfrytëzojmë (15) do të fitojmë

$$u_{\mu} \frac{d(m_o u_{\mu})}{dt_o} = F_{\mu} u_{\mu} = 0$$

ose

$$u_1 F_1 + u_2 F_2 + u_3 F_3 + u_4 F_4 = 0 \qquad (20)$$

I zëvendësojmë komponentet e 4 — vektorit të shpejtësisë

$$F_1 \gamma \dot{x} + F_2 \gamma \dot{y} + F_3 \gamma \dot{z} + F_4 ic\gamma = 0$$

Nga shprehja (19) dhe dy shprehjet e ngjajshme fitojmë

$$F_x \gamma^2 \dot{x} + F_y \gamma^2 \dot{y} + F_z \gamma^2 \dot{z} = - ic F_4 \gamma$$

ose

$$ic F_4 = - \frac{\vec{F}\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

prej nga fitojmë komponenten e katërt të forcës së Minkovskit

$$F_4 = \frac{i\vec{F}\vec{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (21)$$

E barazojmë komponenten e katërt të sistemit (17) me (21) dhe do të kemi

$$\gamma \frac{d}{dt}(i m_o c\gamma) = \frac{i\vec{F}\vec{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = i \frac{\vec{F}\vec{v}}{c} \gamma$$

prej nga fitojmë

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) = \vec{F}\vec{v} \qquad (22)$$

Ana e djathtë e barazimit paraqet punën e kryer të forcës në njësi kohe mbi grimcën, ndërsa në anën e majtë kemi ndryshimin e energjisë në njësinë e kohës, prandej energjia e plotë e grimcës është

$$E = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Po këte shprehje e kemi fituar në (XXII.9.15) por me ecuri tjetër. Më në fund do të tregojmë se si transformohen komponentet e 4 — vektorit të energjisë dhe impulsit gjatë kalimit nga një sistem inercial në tjetrin.

Supozojmë se sistemi 0′ lëviz në mënyrë të njëtrajtshme drejtvizore ndaj sistemit 0 me shpejtësi v. Për këte shfrytëzojmë shprehjet (4), (9a) dhe (9b). Komponentet e 4 — impulsit mund t'i shkruajmë në formën

$$p_\mu = \left(p_x, p_y, p_z, i\frac{E}{c}\right)$$

Fitojmë

$$p_x' = \frac{p_x + i\frac{v}{c}\, i\frac{E}{c}}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}}$$

$$p_y' = p_y$$

$$p_z' = p_z$$

$$\frac{i E'}{i} = \frac{i\frac{E}{c} - i\frac{v}{c}\, p_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ose

$$p_x' = \frac{p_x - \frac{v}{c^2} E}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \; p_y' = p_y, \; p_z' = p_z, \; E' = \frac{E - v\, p_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (23)$$

Transformimet inverze të ekuacioneve (23) fitohen në mënyrë të lehtë nëse madhësitë me apostrof zëvendësohen me madhësitë pa te dhe shpejtësia e ndërron parashenjën.

13. PARAQITJA KATËRDIMENSIONALE E ELEKTRODINAMIKËS

a) Ekuacioni i kontinuitetit

Në bazë të dhënave eksperimentale sasia e elektricitetit nuk varet nga sistemi në të cilën ajo matet. Për sasi të elektricitetit vlenë shprehja

$$dq = \rho \, d\tau \tag{1}$$

ku ρ është dendësia e elektricitetit. Elementi i vëllimit gjatë kalimit nga një sistem në tjetrin ndërron sipas shprehjes

$$d\tau = \alpha \, d\tau_o \qquad \alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ku me $d\tau_o$ e kemi shënuar elementin e vëllimit vehtjak. Nga (1) fitojmë

$$dq = \alpha\rho \, d\tau_o$$

Për sistem në të cilin elektriciteti pushon vlenë

$$dq = \rho_o \, d\tau_o$$

prej nga përfundojmë se

$$\rho = \frac{\rho_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2}$$

Kjo formulë shpreh lidhmërinë në mes të dendësive të elektricitetit në sistemin inercial lëvizës dhe sistemin në të cilin elektriciteti pushon.

Për 4 — vektorin e dendësisë së rrymës, në mënyrë të ngjajshme sikurse në hapësirën e zakonshme kemi

$$j_\mu = \rho_o u_\mu \tag{3}$$

ku me u e kemi shënuar 4 — vektorin e shpejtësisë. Tri komponentet hapësirore, të këtij 4 — vektori janë

$$\begin{aligned} j_x &= j_1 = \rho_o u_1 = \alpha\rho\,\gamma\dot{x} = \rho\dot{x} \quad \text{sepse} \quad \alpha\gamma = 1 \\ j_y &= j_2 = \rho_o\dot{y} \\ j_z &= j_3 = \rho\dot{z} \end{aligned} \tag{4}$$

identike me komponentet e dendësisë së rrymës në hapësirën tridimensionale. Komponentja e katërt është

$$j_4 = \rho_o \, u_4 = \alpha\rho\,\gamma ic = \rho\, ic \tag{5}$$

imagjinare dhe për nga madhësia e barabartë me prodhimin e dendësisë së elektricitetit dhe shpejtësisë së dritës.

Ekuacioni i kontinuitetit në elektrodinamikë, në hapësirën tridimensionale sipas (XIV.3.1) është

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0 \qquad (6)$$

Nga (4) dhe (5), për dendësi të rrymës në botën e Minkovskit mund të shkruajmë

$$j_\mu = (j_x, j_y, j_z, \rho\, ic)$$

ndërsa (6) do të ketë formën

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \qquad \mu = 1, 2, 3, 4$$

ku $x_4 = ict$. Edhe këtu nuk e shkruajmë shenjën e shumës Σ duke zbatuar konvencën e Ajnshtajnit.

Duke zbatuar shprehjet (XXII.12.4) për transformim të çfarëdo 4 — vektori do të kemi për transformim të 4 — vektorit të dendësisë së rrymës

$$j_x' = \gamma(j_x + i\,\beta i\, c\rho)$$
$$j_y' = j_y$$
$$j_z' = j_z$$
$$ic\rho' = \gamma(ic\rho - i\,\beta j_x)$$

ose

$$j_x' = \frac{j_x - v\rho}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$j_y' = j_y$$

$$j_z' = j_z$$

$$\rho' = \frac{\rho - \frac{v}{c^2}\, j_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Kuptojmë se edhe kur nuk ekziston rrjedhje e rrymës në njërin sistem, në tjetrin trupi nuk do të jetë neutral.

b) Potencialet elektromagnetike

Kemi mësuar se burimet e fushës elektromagnetike janë dendësitë e elektricitetit të shpërndarë dhe dendësitë e rrymës. Më parë mësuam se interpretimi katërdimensional i bashkon këto burime në 4 — vektorin e dendësisë së rrymës elektrike j_μ.

Në elektrodinamikë kemi treguar gjithashtu se potencialet e fushës elektromagnetike janë të lidhur me burime të fushës. E dijmë se ekzistojnë dy potenciale: vektorial $\vec{A}$ dhe skalar V. Për komponente të potencialit vektorial në boshllëk vlejnë ekuacionet diferenciale

$$\triangle \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = - \mu_0 \vec{j} \tag{7}$$

dhe

$$\triangle V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = - \frac{\rho}{\varepsilon_0} = - \mu_0 c^2 \rho \tag{8}$$

sepse nga $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$ rrjedh $\frac{1}{\varepsilon_0} = \mu_0 c^2$.

Në anën e majtë të ekuacionit (7) gjenden komponentet hapësirore të 4 — vektorit j_μ . Në ekuacionin tjetër djathtas mund të fitojmë komponenten kohore të 4 — vektorit (5) nëse e shumëzojmë me $\frac{i}{c}$.

Fitojmë

$$\triangle \left(\frac{i}{c} V \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{i}{c} V \right) = - \mu_0 (i \rho c) \tag{9}$$

Prandej mund të ndërtohet 4 — vektori i potencialit elektromagnetik, tri komponentet kohore të të cilit janë të barabarta me komponentet e potencialit vektorial, ndërsa komponenta kohore është $\frac{i}{c} V$. Pra, 4 — vektori i potencialit i ka komponentet

$$A_\mu = \left(A_x, A_y, A_z, \frac{i}{c} V \right) \tag{10}$$

Ky 4 — vektor në vetvete i bashkon të dy potencialet e fushës elektromagnetike. Ekuacionet (7) dhe (8) me ndihmën e tij mund t'i shkruajmë në formën

$$\triangle A_\mu - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial t^2} = - \mu_0 j_\mu \tag{11}$$

Në anën e majtë në vend të kohës e paraqesim koordinatën e katërt kësisoji

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_4} \frac{\partial x_4}{\partial t} = ic \frac{\partial}{\partial x_4}$$

dhe

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \text{ ose } -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$$

ndërsa ekuacionet (11) i shkruajmë në formën përfundimtare

$$\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu^2} = -\mu_0 j_\mu \tag{12}$$

Kjo është forma (XXII.11.13) por nuk është shkruar shenji i shumës sipas konvencës së Ajnshtajnit. Mbledhja kryhet sipas ν.

Duke shfrytëzuar 4 — vektorin e potencialit (10) konditën e Lorencit (XIV.11.3)

$$div\,\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

ose

$$div\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \tag{13}$$

mund ta shakruajmë në këte formë

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial\left(\frac{i}{c}V\right)}{\partial(ict)} = 0 \quad \text{ose} \quad \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \tag{13a}$$

Ka ngelur të përcaktojmë lidhmërinë në mes të intensiteteve të vektorëve të fushës dhe 4 — vektorit të potencialit. E dijmë se në hapësirën tridimensionale kjo lidhmëri shprehet në formën

$$\vec{B} = rot\,\vec{A}$$

$$\vec{E} = -\dot{\vec{A}} - grad\,V$$

I përcaktojmë komponentet dhe i shndërrojmë në komponente të 4 — vektorit

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = (rot\,A_\mu)_{23}$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} = (rot\,A_\mu)_{31}$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = (rot\,A_\mu)_{12}$$

$$E_x = -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} = -ic\frac{\partial A_1}{\partial x_4} - \frac{c}{i}\frac{\partial A_4}{\partial x_1} = ic\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4}\right) = ic\,(rot\,A_\mu)_{14}$$

$$E_y = -\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial y} = -ic\frac{\partial A_2}{\partial x_4} - \frac{c}{i}\frac{\partial A_4}{\partial x_2} = ic\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4}\right) = ic\,(rot\,A_\mu)_{24}$$

$$E_z = -\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial z} = -ic\frac{\partial A_3}{\partial x_4} - \frac{c}{i}\frac{\partial A_4}{\partial x_3} = ic\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4}\right) = ic\,(rot\,A_\mu)_{34}$$

Shohim se gjashtë komponentet e fushës mund të shprehen si rotor i 4 — vektorit të potencialit. E dijmë se rotori i 4 — vektorit është tenzor. Nga rangu i tenzorit dhe numri i komponenteve kuptojmë se ky tenzor është antisimetrik. E shënojmë me Φ këte tenzor të fushës dhe i përkufizojmë komponentet e tij kështu

$$\Phi_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} O & B_z & -B_y & -\frac{i}{c}E_x \\ -B_z & O & B_x & -\frac{i}{c}E_y \\ B_y & -B_x & O & -\frac{i}{c}E_z \\ \frac{i}{c}E_x & \frac{i}{c}E_y & \frac{i}{c}E_z & O \end{pmatrix} \qquad (14)$$

Ky tenzor quhet tenzor i fushës elektromagnetike dhe i bashkon intensitetet e fushës elektrike dhe magnetike që tregon se këto janë reciprokisht të lidhura.

c) Ekuacionet e Maksvelit

Në hapësirën tridimensionale dhe boshllëk ekuacionet e Maksvelit e kanë formën

$$rot\,\vec{B} = \mu_o\vec{j} + \varepsilon_o\mu_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (15)$$

$$div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

$$div\,\vec{B} = 0$$

Për formulimin e këtyre ekuacioneve në hapësirën katërdimensionale e paraqesim grumbullin e madhësive nga (XXII.11.12)

$$\Phi_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \tag{16}$$

E derivojmë këte shprehje sipas x_ν dhe fitojmë

$$\frac{\partial \Phi_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^2_\nu} \tag{17}$$

Shfrytëzojmë shprehjet (12) dhe konditën e Lorencit (13a). Do të kemi, pasi që anëtari i parë i anës së djathtë është i barabartë me zero. Mbledhja bëhet sipas ν.

$$\frac{\partial \Phi_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_o j \tag{18}$$

Shprehja e fundit paraqet ekuacionin e parë dhe të tretë të Maksvelit në boshllëk në formën katërdimensionale.

E derivojmë shprehjen (16) sipas x_σ, ku $\sigma \neq \mu, \nu$ dhe fitojmë

$$\frac{\partial \Phi_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\mu \, \partial x_\sigma} - \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu \, \partial x_\sigma}$$

dhe me permutim ciklik do të gjejmë

$$\frac{\partial \Phi_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial^2 A_\sigma}{\partial x_\nu \, \partial x_\mu} - \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\nu \, \partial x_\nu}$$

$$\frac{\partial \Phi_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\sigma \, \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\mu \, \partial x_\nu}$$

I mbledhim dhe fitojmë formën katërdimensionale të ekuacionit të dytë dhe të katërt të sistemit (15)

$$\frac{\partial \Phi_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial \Phi_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \Phi_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \tag{19}$$

d) Transformimi i komponenteve të fushës elektrike dhe magnetike

Çfarëdo tenzori antisimetrik për të cilin vlenë

$$A_{\mu\nu} = - A_{\nu\mu} \tag{20}$$

gjatë transformimeve të Lorencit i ka këto komponente

$$A'_{12} = \gamma(A_{12} - i\,\beta A_{24}),\ A'_{13} = \gamma(A_{13} - i\,\beta A_{34}),\ A'_{14} = A_{14}$$

$$A'_{23} = A_{23},\ A'_{24} = \gamma(A_{24} + i\,\beta A_{12}),\ A'_{34} = \gamma(A_{34} + i\,\beta A_{13}) \tag{21}$$

Shihet se këta tenzor i kanë vetëm gjashtë komponente të pavarura sepse nga (20) për $\nu = \mu$ $A_{\mu\mu} = 0$. E dijmë se komponentet e fushës elektromagnetike (14). Për të mundur më lehtë t'i lexojmë komponentet gjegjëse do të shkruajmë tabelën

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \tag{22}$$

Nëse e krahasojmë (22) me (14) shihet qartë se për $\nu = \mu$, $A_{\mu\mu} = 0$. Duke i krahasuar komponentet gjegjëse të (22) dhe (14), për (21) do të kemi

$$B'_z = \frac{B_z - i\,\frac{v}{c}\left(-\frac{i}{c}\,E_y\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad -B'_y = \frac{-B_y - i\,\frac{v}{c}\left(-\frac{i}{c}\,E_z\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$-\frac{i}{c}\,E'_x = -\frac{c}{i}\,E_x$$

$$B'_x = B_x, \quad -\frac{i}{c}E'_y = \frac{-\frac{i}{c}\,E_y + i\,\frac{v}{c}B_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad -\frac{i}{c}\,E'_z = \frac{-\frac{i}{c}\,E_z + i\,\frac{v}{c}\,(-B_y)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Prej nga fitojmë shprehjet e transformimit të komponenteve të fushës elektrike dhe magnetike.

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \frac{E_y - v\,B_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad E'_z = \frac{E_z + v\,B_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \frac{B_y + \frac{v}{c^2}\,E_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad B'_z = \frac{B_z - \frac{v}{c^2}\,E_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{23}$$

Nga këto shprehje shohim se gjatë transformimit të komponenteve të fushës nga një sistem inercial në tjetrin komponentet në kahje të lëvizjes reciproke të sistemeve mbesin të pa ndryshuara ndërsa tjerat transformohen ashtu që çdo komponent e njërit vektor përbëhet nga komponentet e të dy vektorëve. Shihet gjithashtu, edhe nëse në ndonjë sistem inercial nuk ka fushë elektrike apo magnetike, në sistemin tjetër do të paraqiten.

14. LËVIZJA E GRIMCËS SË ELEKTRIZUAR NË FUSHË HOMOGJENE ELEKTRIKE

Për lëvizje të grimcës së elektrizuar në fushë elektrike dhe magnetike vlenë ekuacioni i lëvizjes

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_o \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = e\vec{E} + e(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{1}$$

Këtu me $\vec{v}$ e kemi shënuar shpejtësinë e lëvizjes së grimcës. Duke mos u thelluar në vërtetimin rigoroz, cekim se forca e Lorencit, përkatësisht forma e saj është në pajtim me ligjet e përgjithshme të transformimit në teori të relativitetit. Këtu do të bëjmë krahasimin e shqyrtimit dhe rezultateve të lëvizjes së grimcës së elektrizuar në fushë homogjene elektrike në aspektin jo relativist dhe relativist. Nëse fusha është e orientuar në kahje të boshtit z, ndërsa grimca e elektrizuar lëviz në kahje të boshtit x, normal ndaj drejtimit z nga (1) do të kemi

$$\frac{d(m\,v_x)}{dt} = 0 \qquad \frac{d(m\,v_z)}{dt} = e\,E \tag{2}$$

prej nga fitojmë ekuacionin e rrugës (XXIII.12.11) të shqyrtuar në aspektin jo relativist

$$z = \frac{e\,E\,x^2}{2\,m\,v^2_o} \tag{3}$$

Në trajtimin relativist të të njëjtit problem duhet të merret në konsiderim se masa në ekuacionet (2) ndërron me shpejtësinë e lëvizjes së grimcës. Nga (2) kemi

$$p_x = p_o \text{ dhe } p_z = e\,E\,t \tag{4}$$

ku me p_o e kemi shënuar sasinë e lëvizjes së grimcës në momentin $t = 0$. Nga shprehja (XXII.9.22) për energji totale të grimcës kemi

$$W = c\sqrt{m_o c^2 + p^2} \tag{5}$$

Këtu jemi të detyruar të përdorim simbolin W për energji që të mos e ngatërrojmë me komponenten e fushës elektrike E.

Nga (4) fitojmë

$$p^2 = p^2_x + p^2_z = p^2_o + (e\,E\,t)^2$$

E zëvendësojmë në (5) vlerën e fituar

$$W = c\sqrt{m_o c^2 + p_{zo} + (eEt)^2} \tag{6}$$

Në momentin $t=0$ kjo energji është

$$W_o = c\sqrt{m_o c^2 + p^2_o} \tag{7}$$

E dijmë se impulsi është

$$\vec{p} = \frac{m_o \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\vec{v}\, W}{c^2}$$

prej nga

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}\, c^2}{W} \tag{8}$$

Komponentet e shpejtësisë i fitojmë nga shprehja e fundit

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{p_z \cdot c^2}{W} = \frac{c^2 e E t}{c\sqrt{m_o c^2 + p^2_o + (eEt)^2}} = \frac{c^2 e Et}{\sqrt{W^2_o + (ecEt)^2}}$$

Pas integrimit fitojmë z — komponenten

$$z = \frac{1}{e E} \sqrt{W^2_o + (ecEt)^2} \tag{9}$$

Për komponenten tjetër kemi

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{p_x c^2}{W} = \frac{p_o c^2}{\sqrt{W^2_o + (ecEt)^2}}$$

Pas integrimit fitojmë

$$x = \frac{p_o c}{e E}\, arg\, sh\, \frac{ecEt}{W_o} \tag{10}$$

Ekuacionet (9) dhe (10) paraqesin ekuacionet parametrike të rrugës së grimcës së elektrizuar në fushë homogjene elektrike. Pasi të eliminohet koha nga këto fitojmë

$$z = \frac{W_o}{e E}\, ch\, \frac{e E x}{c\, p_o} \tag{11}$$

Shihet se rezultatet përfundimtare të trajtimit klasik (3) dhe relativist (11) ndryshojnë ndërmjet veti. Ky dallim është i theksuar për shpejtësi të mëdha të grimcës, sepse atëherë (11) mjaft devijon nga parabola (3).

Në fund do të cekim se, në fizikë paraqiten teori të ndryshme që shumica e tyre janë teori konstruktive. Zakonisht ato fillojnë nga një

formalizëm bazë dhe pastaj ndërtojnë një figurë të dukurive komplekse. Kështu p.sh., teoria kinetike e gazrave tenton t'i redukojë dukuritë mekanike, termike dhe difuze në lëvizje të molekuleve, pra t'i konstruktojë nga hipoteza e lëvizjes molekulare.

Por, ekziston edhe një klasë tjetër e teorive. Kjo klasë quhet teoria e parimeve. Këto teori nuk përdorin sintetizim, por parimet prej të cilëve rrjedhin kriteriumet e formuluar matematikisht që duhet t'i përmbushin dukuritë e veçanta. Kështu, termodinamika, nga rezultati i përgjithshëm empirik se „perpetum mobile" është e pamundshme, kërkon në mënyrë analitike që të zbulojë lidhjet të cilat dukuritë e veçanta duhet t'i kënaqin. Pavarësisht nga karakteri i një teorie, për vertësinë e saj fjalën e fundit e jep gjithmonë praktika — matja eksperimentale.

Teoria e relativitetit, si e cek vet Ajnshtajni bën pjesë në teorinë e parimeve. Që të kuptohet ajo së pari duhet kuptuar parimet në të cilat bazohet. T'i cekim edhe një herë

1. Të gjitha ligjet e natyrës janë të njëjta në të gjitha sistemet koordinative që lëvizin në mënyrë të njëtrajtshme drejtvizore ndaj njëri-tjeri dhe

2. Drita në boshllëk gjithmonë e ka një shpejtësi të caktuar të përhapjes pavarësisht nga vlera e shpejtësisë dhe gjendja e burimit të dritës.

Përvoja i pranon këto parime, por nuk kanë qenë logjikisht të lidhura në mes veti. Bashkimi i tyre logjik është dhënë në teorinë speciale të relativitetit.

SHTESË MATEMATIKE

SH. 1. PËRKUFIZIME THEMELORE NGA ANALIZA VEKTORIALE

1. Prodhimi skalarë i vektorëve $\vec{A}$ dhe $\vec{B}$ shprehet në formën

$$\vec{A}\,\vec{B} = A\,B\cos\alpha$$

ku α është këndi në mes të vektorëve.

2. Prodhimi vektorial i vektorëve $\vec{A}$ dhe $\vec{B}$ është

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$$

intensiteti i të cilit është $A\,B\sin\alpha$, ku α është këndi në mes tyre. Ky prodhimi gjithashtu është vektor i cili qëndron normal ndaj rrafshit të cilin e përcaktojnë vektorët $\vec{A}$ dhe $\vec{B}$ dhe i orientuar ashtu që vektorët $\vec{A}$, $\vec{B}$ dhe $\vec{C}$ formojnë sistemin e djathtë koordinativ.

3. Mjaft të rëndësishme janë edhe këto shprehje:

$$\vec{A}(\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B}(\vec{C} \times \vec{A})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\,\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\,\vec{B})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) - \vec{C} \times (\vec{B} \times \vec{A}) = \vec{B} \times (\vec{A} \times \vec{C})$$

4. **Gradienti, grad.** Madhësia e dhënë varet vetëm prej vendit në hapësirë. Ky është skalari $\varphi = \varphi\,(x, y, z)$. Ekuacioni

$$\varphi(x, y, z) = const.$$

shpreh ekuacionin e sipërfaqeve ekuipotenciale. Ndërrimi më i madh i skalarit φ është në kahje normale të sipërfaqes ekuipotenciale

$$grad\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial l}\,\vec{n}$$

ku l është koordinata në kahje normale të sipërfaqes ekuipotenciale, ndërsa $\vec{n}$ vektori unitar i normales. *Grad*φ është vektor i cili ka kahje të normales në sipërfaqen ekuiskalare.

5. **Divergjenca, div.** Madhësia e dhënë varet nga pozita në hapësirë dhe ka kahje. Madhësia e tillë quhet funksion vektorial. Fluksi i ndonjë vektori $\vec{A}$ nëpër sipërfaqe S shprehet në formën

$$\Phi = \int_S \vec{A}\, d\vec{S} = \int_S \vec{A}\, \vec{n}\, dS$$

ku $\vec{n}$ është vektori unitarë i normales në sipërfaqen S. Kjo sipërfaqe është e mbyllur dhe brenda saj gjendet vëllimi V i shqyrtuar. Vektori $\vec{n}$ shikohet nga hapësira e shqyrtuar. Fluksi nëpër këte sipërfaqe është

$$\Phi = \oint_S \vec{A}\, \vec{n}\, dS$$

Shprehja

$$\lim_{V \to 0} \frac{\oint \vec{A}\, \vec{n}\, dS}{V} = div\, \vec{A}$$

quhet divergjencë e vektorit $\vec{A}$. Paraqet fluksin e vektorit $\vec{A}$ në vëllim të caktuar në njësi të atij vëllimi. Sipërfaqja S e mbyllë këte vëllim, ndërsa V tenton në zero. Nëse divergjenca e ndonjë vektori është e ndryshme nga zeroja, atëherë ai në ate vend do të ketë burimin e vet apo humnerën.

6. **Rotori, rot.** Madhësia e dhënë është vektor i cili varet nga vendi në hapësirë. Integrali vijorë i vektorit $\vec{A}$ në rrugën l është

$$\int_1^2 \vec{A}\, d\vec{l} = R_{21}$$

Nëse vektori $\vec{A}$ shpreh forcën, atëherë integrali vijor paraqet punën e kryer të saj në rrugën e dhënë. Nëse rruga është e mbyllur atëherë shkruhet në formën

$$Cir\, \vec{A} = \oint_l \vec{A}\, d\vec{l}$$

dhe quhet cirkulim i vektorit. Rotori i vektorit $\vec{A}$ përkufizohet në këte mënyrë

$$\lim_{S \to 0} \frac{Cir\, \vec{A}}{S} = \lim_{S \to 0} \frac{\oint_l \vec{A}\, d\vec{l}}{S} = \vec{n}\, rot\, \vec{A}$$

Lakorja l paraqet konturën e sipërfaqes S. Vlera e rotorit të vektorit është e barabartë me cirkulimin maksimal të tij në njësi të sipërfaqes kur kjo tenton në zero, ndërsa cirkulimi përcaktohet në konturën e saj. Atëherë rotori i vektorit është vektor i cili e ka kahjen e normales në sipërfaqen elementare S,

$$\vec{B} = rot\,\vec{A} = |rot\,\vec{A}| \cdot \vec{n}$$

7. Duke shfrytëzuar operatorin e Hamiltonit

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

do të kemi

$$grad\,\varphi = \vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$div\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$rot\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

8. **Operatori i Laplasit.** Sikurse edhe operatori i Hamiltonit edhe ky operator është diferencial dhe shprehet

$$\triangle = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$$

Nëse operatori i Laplasit zbatohet në skalarë kuptimi i tij është

$$\triangle\varphi = div\,grad\varphi = \lim_{V\to 0} \frac{\oint\limits_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS}{V}$$

ku: $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ paraqet ndërrimin e skalarit φ në njësi të gjatësisë në kahje normale të sipërfaqes S e cila e mbyllë vëllimin V. Rezultati i veprimit të operatorit të Laplasit në skalarë φ është prapë skalar. Nëse i njëjti operator vepron në vektor, rezultati i këtij veprimi është

$$\triangle\,\vec{A} = grad\,div\,\vec{A} - rot\,rot\,\vec{A}$$

që do të thotë se fitohet vektor. Në koordinate kënddrejta vlenë:

$$\triangle\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}; \quad \triangle\,\vec{A} = \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial z^2}$$

SH. 2. OPERACIONET VEKTORIALE TË PËRBËRA

1. $grad\,(\varphi + \psi) = grad\varphi + grad\psi$

2. $div\,(\vec{A} + \vec{B}) = div\,\vec{A} + div\,\vec{B}$

3. $rot\,(\vec{A} + \vec{B}) = rot\,\vec{A} + rot\,\vec{B}$

4. $grad\,(\varphi \cdot \psi) = \psi\, grad\, \varphi + \varphi .\, grad \psi$

5. $div\,(\varphi \cdot \vec{A}) = \vec{A}\, grad\, \varphi + \varphi\, div\, \vec{A}$

6. $rot\,(\varphi \vec{A}) = grad\, \varphi \times \vec{A} + \varphi\, rot\, \vec{A}$

7. $(\vec{A}\, \nabla)\, \vec{B} = |\vec{A}|\, (\vec{a}_o\, \nabla) \vec{B}$, paraqet prodhimin e intensitetit të vektorit $\vec{A}$ dhe derivatit të vektorit $\vec{B}$ në drejtim të vektorit $\vec{A}$.

8. $grad\,(\vec{A}\,\vec{B}) = (\vec{B}\, \nabla)\, \vec{A} + (\vec{A}\, \nabla)\, \vec{B} + \vec{A} \times rot\, \vec{B} + \vec{B} \times rot\, \vec{A}$

9. $div\,(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B}\, rot\, \vec{A} - \vec{A}\, rot\, \vec{B}$

10. $rot\,(\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B}\, \nabla)\, \vec{A} - (\vec{A}\, \nabla)\, \vec{B} + \vec{A}\, div\, \vec{B} - \vec{B}\, div\, \vec{A}$

11. $grad\,(c\, \varphi) = c\, grad\, \varphi \quad c = konstant.$

12. $div\,(c\, \vec{A}) = c\, div\, \vec{A}$

13. $rot\,(c\, \vec{A}) = c\, rot\, \vec{A}$

14. $grad\,(\vec{C}\,\vec{A}) = (\vec{C}\, \nabla) \vec{A} + \vec{C} \times rot\, \vec{A},\ \vec{C} = vektor$ konstant

15. $div\,(\vec{C}\, \varphi) = \vec{C}\, grad\, \varphi$

16. $div\,(\vec{C} \times \vec{A}) = -\, \vec{C}\, rot\, \vec{A}$

17. $rot\,(\vec{C}\, \varphi) = grad\, \varphi \times \vec{C}$

18. $rot\,(\vec{C} \times \vec{A}) = -\, (\vec{C}\, \nabla) \vec{A} + \vec{C}\, div\, \vec{A}$

19. $rot\; grad \varphi = 0$

20. $div\; rot\, \vec{A} = 0$

21. $grad\, f(r) = \frac{d}{dr} [f(r)\, \vec{r}_o] = f'(r)\, \vec{r}_o,\ \vec{r}_o$ është vektor unitar i pozitës.

22. $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\, \nabla)\, \vec{A},\ \vec{v}$ është shpejtësia e vrojtuesit të vektorit $\vec{A}$.

23. $(\vec{A}\, \nabla) \varphi = \vec{A}\, grad\, \varphi$

24. $div\,[f(r)\cdot\vec{r}_o] = 2\,\dfrac{f(r)}{r} + f'(r)$

25. $rot\,[f(r)\,\vec{r}_o] = 0$

26. $\Delta(\varphi\cdot\psi) = \varphi\Delta\psi + \psi\Delta\varphi + 2\,grad\varphi\;grad\psi$

27. $grad\,div\,(\varphi\vec{A}) = grad\varphi\,div\,\vec{A} + \varphi\,grad\,div\,\vec{A} +$

$+ grad\varphi\times rot\,\vec{A} + (\vec{A}\,\nabla)\,grad\varphi + (grad\varphi\,\nabla)\vec{A}$

28. $rot\,rot\,(\varphi\vec{A}) = grad\varphi\times rot\,\vec{A} - \vec{A}\Delta\varphi + (\vec{A}\,\nabla)\,grad\varphi +$

$+\varphi\,rot\,rot\,\vec{A} + grad\,\varphi\,div\,\vec{A} - (grad\varphi\,\nabla)\,\vec{A}$

SH. 3. MARREDHENIET E INTEGRALEVE TË FUNKSIONEVE VEKTORIALE

1. **Teorema e Gausit.** Integrali sipërfaqësor i vektorit $\vec{A}$ kryhet nëpër sipërfaqe S e cila e mbyllë vëllimin V në të cilin integrohet divergjenca e të njëjtit vektor. Pra,

$$\int_V div\,\vec{A}\,d\tau = \oint_S \vec{A}\,\vec{n}\,dS$$

2. **Teorema e Stoksit.** Integrali vijor i vektorit $\vec{A}$ kryhet nëpër lakoren l e cila paraqet konturën e sipërfaqes S në të cilën integrohet rotori i të njëjtit vektor. Pra,

$$\int_S rot\,\vec{A}\,\vec{n}\,dS = \oint_l \vec{A}\,d\vec{l}$$

3. **Teorema e Grinit.** Për dy funksione skalare φ dhe ψ vlenë

$$\int_V (\varphi\,\Delta\,\psi + grad\varphi . grad\psi)\,d\tau = \oint_S \varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\,dS$$

Këtu $\dfrac{\partial\psi}{\partial n}$ paraqet ndërrimin e skalarit ψ në njësi të gjatësisë së vendosur në kahje të normales në sipërfaqen S, e cila e mbyllë vëllimin V. Nëse φ dhe ψ i ndërrojnë vendet e tyre fitojmë formën e dytë të teoremës së Grinit

$$\int_V (\varphi\,\Delta\,\psi = \psi\,\Delta\,\varphi)d\tau = \oint_S \left(\varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) dS$$

SH. 4. DELTA FUNKSIONI

Ndryshe quhet funksion i Direkut. Përkufizohet në formën

$$y = \delta(x-a)$$

dhe gëzon këto veti:

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0 \text{ për } x \neq a \\ \infty \text{ për } x = a \end{cases}$$

si dhe

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\, dx = 1$$

Impulsi kënddrejt kalon në delta funksion nëse gjërësia e tij tenton në zero, ndërsa lartësia tenton në pambarim, ashtu që sipërfaqja i mbetet konstante. Vetitë tjera të delta funksionit janë:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(x-a)\, dx = f(a)$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, f(x-a)\, dx = f(-a)$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta'(x-a)\, dx = -f'(a)$ Apostrofi tregon diferencimin sipas x

4. $\delta(-x) = \delta(x)$

5. $\delta(a\,x) = \frac{1}{|a|}\, \delta(x)$

6. $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}\, [\delta(x-a) + \delta(x+a)]$

8. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a-x)\, \delta(x-b)\, dx = \delta(a-b)$

8. Pozita e dy pikave në hapësirë është e përcaktuar me vektorët e pozitave $\vec{r}$ dhe $\vec{r}'$. Në këte rast vlenë

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(x_1 - x_1')\, \delta(x_2 - x_2')\, \delta(x_3 - x_3')$$

nëse vektorët e pozitave i shkruajmë në formën

$$\vec{r} = x_1\, \vec{x}_{o1} + x_2\, \vec{x}_{o2} + x_3\, \vec{x}_{o3}$$

$$\vec{r}' = x_1' \vec{x}_{o1} + x_2' \vec{x}_{o2} + x_3' \vec{x}_{o3}$$

ku $\vec{x}_{o1}$, $\vec{x}_{o2}$ dhe $\vec{x}_{o3}$ janë vektorët unitarë në kahje të koordinateve.

9. $\int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}')\, d\tau = 1$ nëse V përmban pikën $\vec{r} = \vec{r}'$

$\int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}')\, d\tau = 0$ nëse V nuk përmban pikën $\vec{r} = \vec{r}'$.

Delta funksioni matet në njësi të vëllimit reciprok pa marrë parasysh sa dimensione i ka hapësira.

10. Duke zbatuar delta funksionin, grumbulli i sasive pikësore të elektricitetit shprehet me dendësinë hapësirore

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{n} q_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k)$$

Këtu kemi n sasi pikësore të elektricitetit, ndërsa lokaliteti i këtyre pikave është i përcaktuar me vektorët e pozitave $\vec{r}_k$.

11. Densiteti i rrymës të sistemit të n grimcave të ngarkuara shprehet në formën

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{n} q_k \vec{v}_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k)$$

ku: k është indeksi i grimcës, r_k rreze vektori i saj, $\vec{v}_k$ shpejtësia e saj, ndërsa $\vec{r}$ është rreze vektori i pikës ku e kërkojmë densitetin.

12. Delta funksioni mund të shprehet edhe në formën

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\, dk$$

ku: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

SH. 5. OPERATORËT VEKTORIAL NË KOORDINATE KËNDDREJTA TË VIJËPËRKULTA

a) Gjatësia e harkut

Në fizikë duhet zgjedhur sisteme të atilla të koordinateve, për zgjidhje analitike të problemit, në të cilët kondităt kufitare kanë formë sa më të thjeshtë. Për këte arsye shfrytëzojmë sisteme të ndryshme të koordinateve të cilët janë në pajtim me konditat e dhëna të problemit. Është e preferuar që edhe sistemet e reja të jenë kënddrejta, që do të

thotë se vektorët unitarë të koordinateve të qëndrojnë normal në mes veti. Në fig *a*, është paraqitur një sistem i këtillë, në të cilin vektorët unitarë $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ dhe $\vec{a}_3$ në kahje të boshteve të koordinateve x_1, x_2 dhe x_3 janë normal ndërmjet veti. Renditja është e atillë që vlenë $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \vec{a}_3$. E dijmë se sistemi i koordinateve të Dekartit është kënddrejt, boshtet e të cilit zakonisht shënohen me x, y, z ndërsa vektorët unitarë në kahje të tyre me $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Renditja është e atillë që vlenë

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

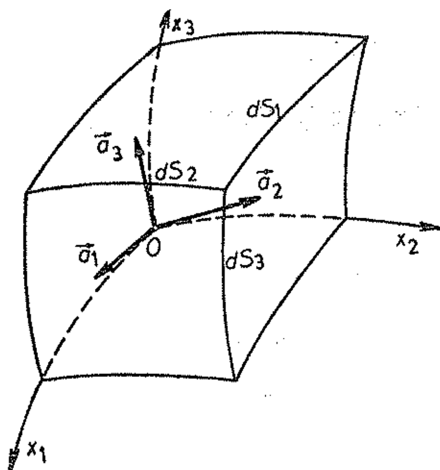


Fig. 170

Duhet të përcaktojmë marrëdhëniet e sistemit të zgjedhur kënddrejtë me sistemin e koordinateve të Dekartit.

Në përgjithësi, koordinatet e ndonjë pike x_i në sistemin e zgjedhur kënddrejtë janë funksione të koordinateve x, y, z. Pra,

$$x_i = x_i\,(x, y, z)$$

Gjithashtu ekziston varshmëria e kundërt e shprehur në formën

$$x = f_1(x_1, x_2, x_3), \quad y = f_2(x_1, x_2, x_3), \quad z = f_3(x_1, x_2, x_3)$$

Kjo varshmëri funksionale kushtëzon edhe diferencialet totale të cilët për një koordinatë shprehen kësisoji

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial x}\,dx + \frac{\partial x_i}{\partial y}\,dy + \frac{\partial x_i}{\partial z}\,dz \tag{1}$$

dhe

$$dx = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\,dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\,dx_3 \tag{2}$$

Gjatësia e harkut duhet të jetë e njëjtë në të dy sistemet e koordinatave. Në koordinatat e Dekartit gjatësia e harkut është

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{3}$$

E zëvendësojmë shprehjen (2) dhe dy shprehjet e ngjajshme dhe rikujtojmë se prodhimet e dyfishta janë të barabartë me zero, meqë kemi të bëjmë me koordinata kënddrejta. Fitojmë

$$ds^2 = h^2_1 dx^2_1 + h^2_2 dx^2_2 + h^2_3 dx^2_3$$

ku:

$$h^2_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)^2$$

$$h^2_2 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right)^2 \qquad (4)$$

$$h^2_3 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right)^2$$

Faktorët h_i përcaktohen nga (4) dhe nevojiten gjatë kalimit nga njëri sistem në tjetrin. Për gjatësi të harqeve, tani mund të shkruajmë

$$ds_1 = h_1 dx_1, \quad ds_2 = h_2 dx_2. \quad ds_3 = h_3 dx_3 \qquad (5)$$

prej nga gjatësia e harkut është

$$ds^2 = ds^2_1 + ds^2_2 + ds^2_3$$

b) Operacionet vektoriale

Meqë e kemi përkufizuar gjatësinë e harkut, tani mund të përcaktojmë operacionet vektoriale në sistemin e zgjedhur kënddrejtë. Sipas shprehjes së përkufizimit të gradientit kemi

$$grad_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial s_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \qquad (6)$$

Divergjencën e ndonjë vektori $\vec{A}$ e përfitojmë duke shfrytëzuar teoremën e Gausit e cila thotë se integrali vëllimor i divergjencës së ndonjë vektori është i barabartë me fluksin total të atij vektori i cili del nga vëllimi i shqyrtuar. Për vëllim shfrytëzojmë hapësirën brenda prizmës në fig. *a*. Pra,

$$div \vec{A} \cdot ds_1 ds_2 ds_3 = \frac{\partial}{\partial s_1} (ds_2 ds_3 A_1) ds_1 + \frac{\partial}{\partial s_2} (ds_1 ds_3 A_2) ds_2 + \\ + \frac{\partial}{\partial s_3} (ds_1 ds_2 A_3) ds_3$$

Zëvendësojmë shprehjet (5) dhe do të fitojmë

$$div \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 h_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 h_3)\right] \qquad (7)$$

Rotori në sistemin e ri fitohet duke zbatuar teoremën e Stoksit e cila thotë se integrali sipërfaqësor i ndonjë vektori është i barabartë me integralin vijorë të atij vektori nëpër konturën që e mbyllë ate sipërfaqe. Duhet të zbatohet nëpër anët e prizmës te fig. *a*. Pra,

$$rot_1 \vec{A}\, ds_2 ds_3 = \frac{\partial}{\partial s_2}(ds_3 A_3)\, ds_2 - \frac{\partial}{\partial s_3}(ds_2 A_2)\, ds_3$$

Zëvendësojmë shprehjet (5) dhe do të kemi

$$rot_1 \vec{A} = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(h_2 A_2)\right] \qquad (8)$$

Komponentet tjera të rotorit i fitojmë me permutimin ciklik

$$rot_2 \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}(h_3 A_3)\right]$$

$$rot_3 \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1 A_1)\right] \qquad (9)$$

Operatorin e Laplasit e fitojmë nga shprehja

$$\Delta\varphi = div\, grad\varphi$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)\right]$$

c) Sistemi i koordinatave cilindrike

1. Koordinatet

$x_1 = r$ koordinata radiale

$x_2 = \vartheta$ koordinata tangjenciale

$x_3 = z$ koordinata aksiale

2. Vektorët unitarë

$\vec{r}_o$ radial

$\vec{t}_o$ tangjencial

$\vec{z}_o$ aksial

3. Gjatësitë e harqeve

$$ds_1 = dr$$
$$ds_2 = r\, d\vartheta$$
$$ds_3 = dz$$

4. Koeficientët e harqeve

$$h_1 = 1$$
$$h_2 = r$$
$$h_3 = 1$$

5. $grad\varphi = \vec{r}_o \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \vec{t}_o \frac{\partial\varphi}{r\, d\vartheta} + \vec{z}_o \frac{\partial\varphi}{\partial z}$

6. $div\,\vec{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r A_r) + \frac{\partial}{\partial\vartheta} A_\vartheta + \frac{\partial}{\partial z}(r A_z)\right]$

7. $rot\,\vec{A} = \vec{r}_o\, rot_r\,\vec{A} + \vec{t}_o\, rot_\vartheta\,\vec{A} + \vec{z}_o\, rot_z\,\vec{A}$

$$rot_r\,\vec{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial A_z}{\partial\vartheta} - \frac{\partial}{\partial_z}(r A_\vartheta)\right]$$

$$rot_\vartheta\,\vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

$$rot_z\,\vec{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right]$$

8. $\Delta\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$

9. $\Delta\vec{A} = \vec{r}_o\,\Delta r\,\vec{A} + \vec{t}_o\,\Delta_\vartheta\,\vec{A} + \vec{z}_o\,\Delta_z\,\vec{A}$

$$\Delta_r\,\vec{A} = \Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\vartheta}{\partial\vartheta}$$

$$\Delta_\vartheta\,\vec{A} = \Delta A_\vartheta - \frac{A_\vartheta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}$$

$$\Delta_z\,\vec{A} = \Delta A_z$$

d) Sistemi i koordinatave sferike

1. Koordinatat

$x_1 = r$ koordinata radiale

$x_2 = \vartheta$ koordinata tangjenciale

$x_3 = \alpha$ koordinata azimutale

2. Vektorët unitarë

$\vec{r}_o$ radial

$\vec{t}_o$ tangjencial

$\vec{a}_o$ azimutal

3. Gjatësitë e harqeve

$$ds_1 = dr$$

$$ds_2 = r\, d\vartheta$$

$$ds_3 = r \sin\vartheta\, d\alpha$$

4. Koeficientët e harqeve

$$h_1 = l$$

$$h_2 = r$$

$$h_3 = r \sin\vartheta$$

5. $$grad\varphi = \vec{r}_o \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \vec{t}_o \frac{\partial\varphi}{r\partial\vartheta} + \vec{a}_o \frac{\partial\varphi}{r \sin\vartheta\, \partial\alpha}$$

6. $$div\, \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin\vartheta \cdot A_r) + \frac{\partial}{\partial\vartheta} (r \sin\vartheta\, A_\vartheta) + \frac{\partial}{\partial\alpha} (r\, A_\varphi)\right]$$

7. $$rot\, \vec{A} = \vec{r}_o\, rot_r\, \vec{A} + \vec{t}_o\, rot_\vartheta\, \vec{A} + \vec{a}_o\, rot_\alpha\, \vec{A}$$

$$rot_r\, \vec{A} = \frac{1}{r \sin\vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial\vartheta} (\sin\vartheta\, A_\alpha) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\alpha}\right]$$

$$rot_\vartheta\, \vec{A} = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial\alpha} - \frac{\partial}{\partial r} (r\, A_\alpha)\right]$$

$$rot_\alpha\, \vec{A} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r\, A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right]$$

8. $$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}$$

9. $$\Delta\vec{A} = \vec{r}_o \Delta_r \vec{A} + \vec{t}_o \Delta_\vartheta\, \vec{A} + \vec{a}_o \Delta \vec{A}$$

$$\Delta_r \vec{A} = \Delta A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2\, ctg\vartheta}{r^2} A_\vartheta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial A}{\partial\alpha}$$

$$\Delta_\vartheta\, \vec{A} = \Delta A_\vartheta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta} - \frac{A_\vartheta}{r^2 \sin^2\vartheta} - \frac{2 \cos\partial}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\vartheta A_?}{\partial\alpha}$$

$$\Delta_\alpha\, \vec{A} = \Delta A_\alpha + \frac{2}{r^2\, sin\vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial\alpha} - \frac{A_\alpha}{r^2 \sin^2\vartheta} + \frac{2 \cos\vartheta}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\alpha}$$

e) Ndarja e fushave vektoriale

Duke u bazuar në vlerat e divergjencës dhe rotorit fushat vektoriale mund t'i ndajmë në katër grupe:

1. **Fushat potenciale ose pa shtjella,** për të cilat në të gjitha pikat e fushës $rot\,\vec{A} = 0$, por së paku në ndonjë pikë të tyre $div\,\vec{A} \neq 0$.

2. **Fushat solenoidale apo shtjellore,** për të cilat në të gjitha pikat e fushës $div\,\vec{A} = 0$, por së paku në ndonjë pikë $rot\,\vec{A} \neq 0$.

3. **Fusha e Laplasit,** për të cilat në të gjitha pikat e fushës vlenë $div\,\vec{A} = 0$ dhe $\text{rot}\,\vec{A} = 0$. Për këto fusha $\Delta\varphi = 0$, prej nga e marrin emrin.

4. **Fusha e përbërë,** për të cilat së paku në ndonjë pikë $div\,\vec{A} \neq 0$ dhe $rot\,\vec{A} \neq 0$.

Shembull: Është e dhënë fusha vektoriale

$$\vec{A} = \vec{i}\,x^2 + \vec{j}\,y^2 + \vec{k}\,z^2$$

a) përcakto llojin e fushës

b) përcakto konditën për fushë të Laplasit.

Zgjidhje: Shihet lehtë se

$$rot\,\vec{A} = 0 \quad div\,\vec{A} = 2(x + y + z) \neq 0$$

prej nga përfundojmë se fusha është potenciale. Në çdo pikë të saj $div\,\vec{A} \neq 0$ përveç në rrafshin

$$x + y + z = 0$$

që do të thotë se fusha është e Laplasit në rrafshin

$$x + y + z = 0$$

SH. 6. DISA VETI TË MATRICAVE

Matrica paraqet një sistem të numrave të cilët mund të renditen në formë të shumës

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{ss} \end{pmatrix}$$

Çdo element i matricës është i shënuar me dy indekse. I pari tregon në cilin rend gjendet elementi, ndërsa i dyti në cilën shtyllë.

Për dy matrica A dhe B mund të përkufizojmë disa operime matematike.

1. Shuma e dy matricave

$$A + B = C$$

përkufizohet ashtu që çdo element i shumës është i barabartë me shumën e elementeve të matricave gjegjëse

$$C_{mn} = A_{mn} + B_{mn}$$

2. Prodhimi i dy matricave katrore

$$P = A\,B$$

përkufizohet si matricë elementet e së cilës janë

$$P_{mn} = \sum_i A_{mi}\,B_{in}$$

Për shumëzim të dy matricave vlenë ligji i shoqërizimit dhe grupimit

$$A(BC) = (AB)C$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

Por nuk vlenë ligji i komutimit

$$AB \neq BA$$

Nëse shumëzohen tri matrica

$$P = ABC$$

atëherë elementet e prodhimit të tyre janë

$$P_{mn} = \sum_i A_{mi}(BC)_{in}$$

por meqë

$$(BC)_{in} = \sum_j B_{ij}C_{jn}$$

fitojmë

$$P_{mn} = \sum_i \sum_j A_{mi}\,B_{ij}\,C_{jn}$$

3. Matrica zero kënaq konditën

$$A \cdot 0 = 0 \quad \text{dhe} \quad 0 \cdot A = 0$$

Nga përkufizimi i prodhimit të matricave kuptojmë se elementet e saj janë të barabartë me zero.

4. Matrica njëshe kënaq konditën

$$A\,1 = A \quad \text{dhe} \quad 1\,A = A$$

Nga përkufizimi i prodhimit kemi

$$A_{mn} = \sum_i A_{mi}\,1_{in}$$

Kjo mund të jetë e kënaqur vetëm nëse vlenë

$$1_{in} = \delta_{in}$$

ku δ_{in} është simboli i Kronekerit i cili është i barabartë me një nëse indekset janë të njëjtë dhe zero nëse indekset janë të ndryshëm. Të gjithë elementet e matricës njëshe janë të barabartë me zero përveç atyre në diagonale, sikurse shihet në shemën vijuese

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Matrica diagonale i ka të gjithë elementet e barabartë me zero, përveç ata në diagonale të cilët mund të kenë çfarëdo vlere. Për elementet e saj vlenë

$$D_{mn} = C_n \cdot \delta_{mn}$$

p.sh.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

6. Matrica me një shtyllë shërben si një prej mënyrave të paraqitjes së vektorit në hapësirën n — dimensionale.

LITERATURA

a) Kurset e përgjithshme

1. L. Landu dhe E. Lifshic, — *Teoretiçeskaja fizika I—IV*, Moskva (1948—62).
2. V. Leviç, — *Kurs teoretiçeskoj fiziki I—I*, Moskva (1962).
3. A. Zomerfeld, — *Vorlesungen über Theoretische Physik I—IV*, Leipzig (1943—49).
4. G. Jos, — *Lehrbuch der theoretischen Physik, Leipzig* (1943).
5. I. Supek, — *Teorijska fizika i struktura materije I*, Zagreb (1974).
6. Gj. Mushicki, — *Uvod u teorijsku fiziku I—II*, Beograd (1964—65).
7. B. V. Medvedev, — *Naçala teoretiçeskoj fiziki*, Moskva (1977).
8. R. Wangsness, — *Introduction to Theoretical Physics*, J. Wiley (1963).

b) Metodika Teorike

1. L. A. Pars, — *Analitiçeskaja dinamika*, Moskva (1971).
2. I. M. Voronkov, — *Kurs teoretiçeskoj mehaniki*, Moskva (1962).
3. R. Becker, — *Introduction to Theoretical Mechanics*, N. York (1954).
4. A. Bilimoviç, — *Racionalna Mehanika, I—IV*, Beograd (1950—55).
5. O. V. Golubeva, — *Teoretiçeskaja Mehanika*, Moskva (1976).
6. O. V. Golubeva, — *Teoretiçeskaja Mehanika*, Moskva (1976).
7. H. J. Pain, — *Fizika Kolebanii i Voln*, Moskva (1979).
8. H. Goldstein, — *Klasiçeskaja Mehanika*, Moskva (1975).
9. G. S. Gorelik, — *Kolebanija i Volni*, Moskva (1959).
10. E. Whittaker, — *Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge (1952).
11. Z. Jankoviç, — *Teorijska Mehanika*, Zagreb (1963).
12. D. Haar, — *Elements of Hamiltonian Mechanics*, Amsterdam (1961).
13. I. I. Alhoski, — *Kurs teoriçeskoj mehaniki dlja fizikov*, M. G. U. (1974).
14. D. Rashkoviç, *Mehanika III*, Beograd (1962).

c) Elekrodinamika, optika dhe teoria e relativitetit

1. J. D. Jackson, — *Classical Electrodynamics*, J. Wiley (1975).
2. N. N. Fedorov, — *Osnovi Elektrodinamiki*, Moskva (1965).
3. V. V. Nikolskii, — *Elektrodinamika i Rasprostranenie radiovoln*, Moskva (1978).
4. J. V. Novozhilov, J. A. Japa, — *Elektrodinamika*, Moskva (1978).
5. W. Panofsky, M. Fillips, — *Classical Electricity and Magnetism*, Cambridge (1955).
6. N. N. Miroljubov, M. V. Kostenko, M. L. Levinshtejn, N. N. Tihodjev, — *Metodi Resçeta Elektrostatiçeskih polej*, Moskva (1963).
7. S. V. Beljustin, — *Klasiçeskaja Elektronaja Teorija*, Moskva (1971).
8. I. Tamm, — *Osnovi teorii elektriçestva*, Moskva (1957).
9. M. Abraham, R. Becker, — *Theorie der Elektrizität I—II*, Leipzig (1930—33).
10. M. Born, E. Wolf, — *Principles Of Optics*, P. Press (1964).
11. G. Bruhat, — *Cours De Physique Generale, Optique*, Masson (1965).
12. W. Shurcliff, — *Polarizovanij svet*, Moskva (1965).

13. H. Mueller, *JOSA*. 38, 661 (1948).
14. H. Poincare, — *Theorie mathematique de la lumiere*, Paris (1892).
15. P. Skënde, — *Elektrodinamika*, Tiranë (1962).
16. J. B. Marion, — *Classical Electromagnetic Radiation*, Academic Press (1967).
17. V. A. Ugarov, —*Specialnaja teorija atnasitelnosti*, Moskva (1969).
18. C. Möller, — *The Theory of Relativity*, Oxford (1952).
19. D. Ivanoviç, — *O teroriji Relativnosti*, Beograd (1962).
20. T. Angjeliç, — *Uvod u teoriji relativnosti*, Beograd (1962).
21. S. Koja, — *Teoria Speciale e Relativitetit*, Tiranë (1971).
22. R. Utijama, — *Teorija atnasitelnosti*, Moskva (1979).

c) **Metodat e matematikës fsizike**

1. A. N. Tihonov, A. A. Samarskij, — *Uravnenija matematiçeskoz fiziki*, Moskva (1977).
2. I. G. Aramanoviç, V. I. Levin, — *Uravnenija matematiçeskoj fiziki*, Moskva (1964).
3. T. Pejoviç, — *Matematiçka analiza V*, Beograd (1962).

PËRMBAJTJA

MEKANIKA TEORIKE

Faqe

PJESA E DYTË

E L E K T R O D I N A M I K A

DR. JOSIP MOSER dhe DR. RASIM BEJTULLAHU

HYRJE NË FIZIKË TEORIKE

BOTUES

Enti i Teksteve dhe i Mjeteve Mësimore
i Krahinës Socialiste Autonome të Kosovës
Prishtinë, Pallati i shtypit, kati XIII--XIV

Për botuesin
RAMUSH RAMA

Redaktor teknik
BAJRAM BARDHAJ

Lektor
MEHMET SHALA, ILAZ METAJ dhe SYLEJMAN METAJ

Korrektor
RIZA NOKA

U dorëzua në shtyp në prill të vitit 1981
Doli nga shtypi në gusht të vitit 1982.

Madhësia: 50¼ tabakë shtypi
Tirazhi: 1000 ekzemplarë
Formati: 17 x 24 cm.

U shtyp në NGBG ,,Rilindja'' Prishtinë